

06/06/2003

SEÑALES Y SISTEMAS

continuos y discretos


06/06/2003

SEÑALES Y SISTEMAS continuos y discretos

Segunda edición

Samir S. SOLIMAN

*QUALCOMM Incorporated
San Diego, California*

Mandyam D. SRINATH

*Southern Methodist University
Dallas, Texas*

Traducción:

Ana Torres Suárez

Licenciada en Ciencias Físicas

Revisión técnica:

Miguel Ángel Rodríguez Hernández

Universidad Politécnica de Valencia

PRENTICE HALL

Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima
Montevideo • San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

Samir S. Soliman, Mandyam D. Srinath
SEÑALES Y SISTEMAS CONTINUOS
Y DISCRETOS. Segunda edición
PRENTICE HALL IBERIA, S.R.L., Madrid, 1999

ISBN: 84-8322-154-3

Materia: Ingeniería. 62

Formato 195 × 250

Páginas: 560

Samir S. Soliman, Mandyam D. Srinath
SEÑALES Y SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS. Segunda edición

No esta permitida la reproducción total o parcial de esta obra
ni su tratamiento o transmisión por cualquier medio o método
sin autorización escrita de la Editorial.

DERECHOS RESERVADOS

© 1999 respecto a la primera edición en español por:
PRENTICE HALL IBERIA, S.R.L.
Núñez de Balboa, 120
28006 MADRID

ISBN: 84-8322-154-3

Depósito Legal: M. 31.512-1999

Traducido de:

CONTINUOUS AND DISCRETE SIGNALS AND SYSTEMS
PRENTICE HALL
© MCMXCVIII
ISBN: 0-13-569112-5

Edición en español:

Editora: Isabel Capella
Editor de producción: Pedro Aguado
Diseño de cubierta: DIGRAF, S.A.
Composición: COPIBOOK, S.L.
Impreso por:

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

Contenido

PRÓLOGO	XIII
1. REPRESENTACIÓN DE SEÑALES	1
1.1. Introducción.....	1
1.2. Señales en tiempo continuo y señales en tiempo discreto.....	2
1.3. Señales periódicas y aperiódicas.....	3
1.4. Señales de energía finita y de potencia media finita.....	6
1.5. Transformaciones de la variable independiente.....	10
1.5.1. La operación de desplazamiento.....	10
1.5.2. La operación de reflexión.....	13
1.5.3. La operación de escalado temporal.....	16
1.6. Señales elementales.....	19
1.6.1. La función escalón unidad.....	20
1.6.2. La función rampa.....	21
1.6.3. La función de muestreo.....	22
1.6.4. La función impulso unidad.....	23
1.6.5. Derivadas de la función impulso.....	30
1.7. Otros tipos de señales.....	33
1.8. Resumen.....	34
1.9. Lista de términos importantes.....	35
1.10. Problemas.....	36
1.11. Problemas para computador.....	42
2. SISTEMAS EN TIEMPO CONTINUO	43
2.1. Introducción.....	43
2.2. Clasificación de sistemas en tiempo continuo.....	44
2.2.1. Sistemas lineales y no lineales.....	44
2.2.2. Sistemas variantes e invariantes con el tiempo.....	48
2.2.3. Sistemas con memoria y sin memoria.....	50
2.2.4. Sistemas causales.....	51
2.2.5. Sistemas invertibles y sistema inverso.....	53
2.2.6. Sistemas estables.....	54

VIII Contenido

2.3.	Sistemas lineales e invariantes con el tiempo.....	55
2.3.1.	La convolución.....	55
2.3.2.	Interpretación gráfica de la convolución.....	61
2.4.	Propiedades de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo.....	66
2.4.1.	Propiedad de memoria de los sistemas LTI.....	66
2.4.2.	Sistemas LTI causales.....	66
2.4.3.	Sistemas LTI invertibles.....	67
2.4.4.	Sistemas LTI estables.....	68
2.5.	Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales.....	69
2.5.1.	Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.....	69
2.5.2.	Componentes básicos de los sistemas.....	71
2.5.3.	Diagramas de simulación para sistemas en tiempo continuo.....	73
2.5.4.	Obtención de la respuesta al impulso.....	75
2.6.	Representación mediante variables de estado.....	78
2.6.1.	Ecuaciones de estado.....	79
2.6.2.	Solución en el dominio del tiempo de las ecuaciones de estado.....	81
2.6.3.	Ecuaciones de estado en la primera forma canónica.....	89
2.6.4.	Ecuaciones de estado en la segunda forma canónica.....	90
2.6.5.	Consideraciones sobre estabilidad.....	94
2.7.	Resumen.....	96
2.8.	Lista de términos importantes.....	97
2.9.	Problemas.....	98
3.	SERIES DE FOURIER	109
3.1.	Introducción.....	109
3.2.	Representaciones ortogonales de señales.....	110
3.3.	Desarrollo en serie de Fourier mediante exponenciales complejas.....	115
3.4.	Condiciones de Dirichlet.....	125
3.5.	Propiedades de desarrollo en serie de Fourier.....	127
3.5.1.	Propiedad de aproximación de mínimos cuadrados.....	127
3.5.2.	Efectos de la simetría.....	129
3.5.3.	Linealidad.....	132
3.5.4.	Producto de dos señales.....	132
3.5.5.	Convolución de dos señales.....	133
3.5.6.	Teorema de Parseval.....	135
3.5.7.	Desplazamiento en el tiempo.....	135
3.5.8.	Integración de señales periódicas.....	137
3.6.	Sistemas con entradas periódicas.....	137
3.7.	El fenómeno de Gibbs.....	145
3.8.	Resumen.....	148
3.9.	Lista de términos importantes.....	151
3.10.	Problemas.....	151
3.11.	Problemas para computador.....	164
4.	LA TRANSFORMADA DE FOURIER	167
4.1.	Introducción.....	168
4.2.	La transformada de Fourier en tiempo continuo.....	168
4.2.1.	Desarrollo de la transformada de Fourier.....	168
4.2.2.	Existencia de la transformada de Fourier.....	170
4.2.3.	Ejemplos de transformadas de Fourier en tiempo continuo.....	171
4.3.	Propiedades de la transformada de Fourier.....	176

4.3.1.	Linealidad.....	178
4.3.2.	Simetría.....	179
4.3.3.	Desplazamiento temporal.....	180
4.3.4.	Escalado temporal.....	180
4.3.5.	Diferenciación.....	182
4.3.6.	Energía de señales no periódicas.....	184
4.3.7.	Convolución.....	186
4.3.8.	Dualidad.....	189
4.3.9.	Modulación.....	191
4.4.	Aplicaciones de la transformada de Fourier.....	195
4.4.1.	Modulación de amplitud.....	195
4.4.2.	Multiplexación.....	198
4.4.3.	El teorema de muestreo.....	199
4.4.4.	Filtrado de señales.....	205
4.5.	Relaciones entre duración y ancho de banda.....	209
4.5.1.	Definiciones de duración y ancho de banda.....	209
4.5.2.	El principio de incertidumbre.....	213
4.6.	Resumen.....	216
4.7.	Lista de términos importantes.....	217
4.8.	Problemas.....	218
5.	LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.....	231
5.1.	Introducción.....	231
5.2.	La transformada bilateral de Laplace.....	232
5.3.	La transformada unilateral de Laplace.....	235
5.4.	Cálculo de transformadas bilaterales mediante transformadas unilaterales.....	237
5.5.	Propiedades de la transformada unilateral de Laplace.....	238
5.5.1.	Linealidad.....	238
5.5.2.	Desplazamiento temporal.....	239
5.5.3.	Desplazamiento en el dominio s	240
5.5.4.	Escalado temporal.....	240
5.5.5.	Diferenciación en el dominio del tiempo.....	241
5.5.6.	Integración en el dominio del tiempo.....	244
5.5.7.	Diferenciación en el dominio s	245
5.5.8.	Modulación.....	246
5.5.9.	Convolución.....	246
5.5.10.	Teorema del valor inicial.....	250
5.5.11.	Teorema del valor final.....	251
5.6.	La transformada inversa de Laplace.....	253
5.7.	Diagramas de simulación para sistemas en tiempo continuo.....	259
5.8.	Aplicaciones de la transformada de Laplace.....	263
5.8.1.	Solución de ecuaciones diferenciales.....	263
5.8.2.	Aplicación al análisis de circuitos RLC.....	264
5.8.3.	Aplicación en control.....	266
5.9.	Ecuaciones de estado y transformada de Laplace.....	269
5.10.	Estabilidad en el dominio s	272
5.11.	Resumen.....	274
5.12.	Lista de términos importantes.....	276
5.13.	Problemas.....	277
6.	SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO.....	285
6.1.	Introducción.....	285

X Contenido

6.1.1. Clasificación de señales en tiempo discreto	286
6.1.2. Transformaciones de la variable independiente	288
6.2. Señales elementales en tiempo discreto	290
6.2.1. Funciones discretas impulso y escalón	290
6.2.2. Secuencias exponenciales	291
6.3. Sistemas en tiempo discreto	294
6.4. Convolución periódica	301
6.5. Representación de sistemas en tiempo discreto mediante ecuaciones en diferencias	305
6.5.1. Solución homogénea de la ecuación en diferencias	307
6.5.2. La solución particular	309
6.5.3. Determinación de la respuesta al impulso	312
6.6. Diagramas de simulación para sistemas en tiempo discreto	314
6.7. Representación de sistemas discretos mediante variables de estado	319
6.7.1. Solución de las ecuaciones en el espacio de estados	321
6.7.2. Respuesta al impulso de sistemas descritos por ecuaciones de estado	324
6.8. Estabilidad de sistemas en tiempo discreto	324
6.9. Resumen	326
6.10. Lista de términos importantes	328
6.11. Problemas	328
7. ANÁLISIS DE FOURIER DE SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO	339
7.1. Introducción	339
7.2. Desarrollo en serie de Fourier de señales discretas periódicas	341
7.3. La transformada discreta de Fourier	350
7.4. Propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto	355
7.4.1. Periodicidad	356
7.4.2. Linealidad	356
7.4.3. Desplazamientos en el tiempo y en la frecuencia	356
7.4.4. Diferenciación en frecuencia	356
7.4.5. Convolución	359
7.4.6. Modulación	360
7.4.7. Transformada de Fourier de secuencias periódicas en tiempo discreto	361
7.5. Transformada de Fourier de señales en tiempo continuo muestreadas	362
7.5.1. Reconstrucción de señales muestreadas	369
7.5.2. Modificación de la velocidad de muestreo	370
7.5.3. Conversión A/D y D/A	375
7.6. Resumen	379
7.7. Lista de términos importantes	381
7.8. Problemas	381
8. LA TRANSFORMADA Z	387
8.1. Introducción	387
8.2. La transformada Z	388
8.3. Convergencia de la transformada Z	390
8.4. Propiedades de la transformada Z	395
8.4.1. Linealidad	398
8.4.2. Desplazamiento temporal	398
8.4.3. Escalado en frecuencia	400
8.4.4. Diferenciación con respecto a z	401
8.4.5. Valor inicial	402

8.4.6. Valor final.....	402
8.4.7. Convolución.....	403
8.5. La transformada Z inversa.....	406
8.5.1. Inversión por desarrollo en serie de potencias.....	406
8.5.2. Inversión por descomposición en fracciones simples.....	408
8.6. Transformadas Z de sistemas causales en tiempo discreto.....	411
8.7. Análisis de sistemas descritos mediante ecuaciones de estado utilizando la transformada Z	415
8.8. Relación entre la transformada Z y la transformada de Laplace.....	424
8.9. Resumen.....	425
8.10. Lista de términos importantes.....	427
8.11. Problemas.....	427
9. LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER.....	433
9.1. Introducción.....	433
9.2. La transformada discreta de Fourier y su inversa.....	435
9.3. Propiedades de la DFT.....	436
9.3.1. Linealidad.....	436
9.3.2. Desplazamiento temporal.....	436
9.3.3. Fórmula de inversión alternativa.....	437
9.3.4. Convolución temporal.....	437
9.3.5. Relación con la transformada de Fourier en tiempo discreto y con la transformada Z	438
9.3.6. Representación matricial de la DFT.....	439
9.4. Convolución lineal mediante la DFT.....	440
9.5. Transformadas rápidas de Fourier.....	442
9.5.1. Algoritmo de decimado en el tiempo.....	443
9.5.2. Algoritmo de decimado en frecuencia.....	447
9.6. Estimación espectral de señales analógicas mediante la DFT.....	450
9.7. Resumen.....	458
9.8. Lista de términos importantes.....	461
9.9. Problemas.....	461
10. DISEÑO DE FILTROS ANALÓGICOS Y DIGITALES.....	465
10.1. Introducción.....	465
10.2. Transformaciones de frecuencia.....	467
10.3. Diseño de filtros analógicos.....	470
10.3.1. El filtro de Butterworth.....	470
10.3.2. El filtro de Chebyshev.....	476
10.4. Filtros digitales.....	480
10.4.1. Diseño de filtros digitales IIR por el método de invarianza al impulso.....	481
10.4.2. Diseño de filtros IIR mediante la transformación bilineal.....	485
10.4.3. Diseño de filtros FIR.....	488
10.4.4. Diseño asistido por computador de filtros digitales.....	494
10.5. Resumen.....	495
10.6. Lista de términos importantes.....	496
10.7. Problemas.....	496
APÉNDICE A. NÚMEROS COMPLEJOS.....	499
A.1. Definición.....	499
A.2. Operaciones aritméticas.....	501
A.2.1. Suma y diferencia.....	501

XII Contenido

A.2.2. Producto.....	501
A.2.3. División.....	502
A.3. Potencias y raíces de números complejos.....	502
A.4. Desigualdades.....	504
APÉNDICE B. RELACIONES MATEMÁTICAS.....	505
B.1. Identidades trigonométricas.....	505
B.2. Funciones exponencial y logarítmica.....	506
B.3. Funciones especiales.....	507
B.3.1. Funciones gamma.....	507
B.3.2. Funciones gamma incompleta.....	508
B.3.3. Funciones beta.....	508
B.4. Desarrollos en serie de potencias.....	508
B.5. Sumas de potencias de números naturales.....	509
B.5.1. Sumas de coeficientes binomiales.....	509
B.5.2. Series de exponenciales.....	510
B.6. Integrales definidas.....	510
B.7. Integrales indefinidas.....	512
APÉNDICE C. TEORÍA ELEMENTAL DE MATRICES.....	517
C.1. Definiciones básicas.....	517
C.2. Operaciones básicas.....	518
C.2.1. Suma de matrices.....	518
C.2.2. Diferenciación e integración.....	518
C.2.3. Producto de matrices.....	518
C.3. Matrices especiales.....	519
C.4. Inversa de una matriz.....	521
C.5. Autovalores y autovectores.....	522
C.6. Funciones de una matriz.....	523
APÉNDICE D. DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES.....	527
D.1. Caso 1: Factores lineales no repetidos.....	528
D.2. Caso 2: Factores lineales repetidos.....	529
D.3. Caso 3: Factores de segundo grado no repetidos e irreducibles.....	531
D.4. Caso 4: Factores de segundo grado repetidos e irreducibles.....	532
BIBLIOGRAFÍA.....	535
ÍNDICE ALFABÉTICO.....	537

Prólogo

La segunda edición del libro *Señales y sistemas continuos y discretos* es una versión modificada de la primera edición, basada en nuestra experiencia en su utilización como libro de texto en el curso introductorio sobre señales y sistemas que se imparte en la Southern Methodist University. Incorpora también los comentarios de numerosos colegas que han utilizado el libro en otras universidades. El resultado, esperamos, ha sido un libro que proporciona un tratamiento introductorio pero completo de las materias relacionadas con las señales y los sistemas continuos y discretos. Hemos introducido algunos cambios con el objeto de mejorar la calidad del libro, como desplazar la sección sobre representaciones ortogonales del Capítulo 1 al principio del Capítulo 3 dedicado a las series de Fourier. Esto nos permite tratar las series de Fourier como un caso particular de representaciones más generales. Hemos añadido en el Capítulo 7 secciones sobre filtros prácticos de reconstrucción, conversión de velocidad de muestreo, y conversión A/D y D/A. También hemos añadido varios problemas en algunos capítulos, haciendo especial énfasis en el uso del computador. Sin embargo, hemos decidido no sugerir ni requerir el uso de ningún paquete de software matemático específico, ya que creemos que esta elección debe quedar en manos del profesor. En general, se han cambiado casi un tercio de los problemas y la quinta parte de los ejemplos del libro.

Como ya se indicó en la primera edición, la necesidad de diseñar sistemas complejos para realizar tareas complicadas impone a los estudiantes de ingeniería una necesidad de mejorar su conocimiento sobre las señales y los sistemas, de modo que puedan utilizar de forma efectiva la rica variedad de técnicas de análisis y síntesis disponibles. Por tanto, las asignaturas sobre señales y sistemas son materia troncal en los planes de estudio de ingeniería eléctrica de la mayor parte de las escuelas. Al escribir este libro hemos intentado presentar, de forma apropiada, a un nivel de pregrado las técnicas sobre análisis de señales y sistemas más ampliamente utilizadas. Los conceptos y técnicas que forman el núcleo del libro son de importancia fundamental y resultarán útiles también a los ingenieros que deseen actualizar o ampliar sus conocimientos sobre señales y sistemas mediante su estudio personal.

El libro se divide en dos grandes partes. La primera parte presenta un tratamiento completo de las señales y los sistemas en tiempo continuo. La segunda parte extiende los resultados a las señales y sistemas en tiempo discreto. Según nuestra experiencia, presentar conjuntamente los sistemas en tiempo discreto y en tiempo continuo confundía muchas veces a los estudiantes, que no terminaban de ver claro si un determinado concepto o técnica se aplicaba a los sistemas en tiempo continuo, en tiempo discreto o a

ambos. El resultado es que muchas veces utilizaban técnicas de solución que no eran adecuadas para problemas particulares. Como la mayor parte de los estudiantes están familiarizados con las señales y los sistemas en tiempo continuo, debido a que los han visto en cursos básicos anteriores a éste, pueden seguir sin dificultad el desarrollo de la teoría y los análisis de estos sistemas. Una vez que se han familiarizado con este material, que se cubre en los cinco primeros capítulos, están preparados para enfrentarse a las señales y sistemas en tiempo discreto.

El libro se organiza de forma que todos los capítulos son diferentes, pero con transiciones entre ellos suaves. Esto proporciona una flexibilidad considerable en el diseño de cursos. Seleccionando apropiadamente el material, este libro se puede utilizar como texto en diversos cursos como teoría de transformadas (Capítulos 1, 3, 4, 5, 7 y 8), señales y sistemas en tiempo continuo (1, 2, 3, 4 y 5), señales y sistemas en tiempo discreto (Capítulos 6, 7, 8 y 9) y señales y sistemas: continuos y discretos (Capítulos 1, 2, 3, 4, 6, 7 y 8). Hemos utilizado muchas veces este libro en la Southern Methodist University, en un curso de un semestre sobre señales y sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto, con probado éxito.

Normalmente, los cursos sobre señales y sistemas se imparten en el tercer o cuarto año de los planes de estudio de pregrado. Aunque el libro se ha diseñado para ser autocontenido, se supone una cierta familiaridad con el cálculo, concretamente con la integración de funciones trigonométricas, así como algunos conocimientos de cálculo diferencial. Es preferible, pero no necesario, un conocimiento previo de álgebra matricial y análisis de circuitos. Estos prerrequisitos son adquiridos por los estudiantes en ingeniería eléctrica en sus primeros cursos. No se requiere experiencia previa en análisis de sistemas. Aunque utilizamos extensamente técnicas matemáticas, nuestro interés no es emplearlas de forma rigurosa, sino más bien como herramienta en un contexto de ingeniería. Hacemos un amplio uso de ejemplos para ilustrar de forma intuitiva el material teórico.

Como en todas las materias que involucran la resolución de problemas, pensamos que es de importancia primordial que los estudiantes vean muchos problemas resueltos relacionados con la materia que se considera. Por eso hemos incluido un gran número de ejemplos resueltos con detalle, para ilustrar conceptos y mostrar a los estudiantes la aplicación de la teoría que se desarrolla. Se mencionan aplicaciones con significación práctica para mostrar a los estudiantes la amplia variedad de aplicaciones de los principios que se tratan. Se han seleccionado para ilustrar conceptos clave, estimular el interés y resaltar conexiones con otras ramas de la ingeniería eléctrica.

Es bien sabido que los estudiantes no asimilan completamente una materia de esta naturaleza, a menos que tengan la oportunidad de resolver problemas utilizando y aplicando las herramientas básicas desarrolladas en cada capítulo. Esto no sólo refuerza la comprensión de la materia sino que en algunos casos permite la ampliación de los conceptos que se discuten en el texto. En ciertos casos, incluso se introduce materia nueva mediante los problemas. En consecuencia, se han incluido más de 260 problemas al final de los capítulos. Estos problemas son de varias clases; algunos son aplicaciones directas de las ideas básicas que se presentan en los capítulos y se incluyen para asegurar que los estudiantes han entendido satisfactoriamente la materia presentada. Otros son de dificultad moderada y otros requieren que el estudiante aplique la teoría aprendida en el capítulo a problemas de importancia práctica.

La cantidad relativa de trabajos de «diseño» es un tema de interés en los cursos de una escuela de ingeniería. La inclusión en este texto del diseño de filtros analógicos y digitales, así como de otras materias relacionadas con el diseño, es una respuesta directa a esta preocupación.

Al final de cada capítulo hemos incluido un resumen en forma de puntos que enumeran los conceptos y fórmulas relevantes presentadas, y una lista con todos los términos importantes. Esta lista sirve de recordatorio para el estudiante del material que requiere una atención especial.

A lo largo del libro se da especial énfasis a los sistemas lineales invariantes con el tiempo. El Capítulo 1 se centra en las señales. Este material, básico para el resto del texto, considera la representación matemática de las señales. En el capítulo consideramos una variedad de conceptos como las señales periódicas, las señales de energía finita y de potencia media finita, las transformaciones de la variable independiente y las señales elementales.

El Capítulo 2 está dedicado a la caracterización de los sistemas lineales invariantes con el tiempo (LTIV-*Linear time invariant*) en tiempo continuo. Comienza con una clasificación de los sistemas en tiem-

po continuo y presenta, a continuación, la caracterización mediante la respuesta al impulso de los sistemas LTIV y la convolución. Sigue una presentación de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Se presentan los diagramas de simulación de estos sistemas, que se utilizan como base para introducir el concepto de variable de estado. El capítulo concluye con una discusión sobre la estabilidad.

Hasta este punto nos hemos enfocado en la descripción en el dominio del tiempo de las señales y los sistemas. El Capítulo 3 considera descripciones en el dominio de la frecuencia. Comienza con una discusión sobre la representación ortogonal de señales periódicas. Se presentan, a continuación, las propiedades de las series de Fourier. Se presenta también el concepto de espectro de líneas para describir el contenido en frecuencia de una señal y se discute a continuación la respuesta de los sistemas lineales a entradas periódicas. El capítulo termina con una presentación del fenómeno de Gibbs.

El Capítulo 4 comienza con el desarrollo de la transformada de Fourier. Se presentan las condiciones bajo las que existe la transformada y se discuten sus propiedades. Se consideran aplicaciones de la transformada de Fourier en áreas como modulación de amplitud, multiplexación, muestreo y filtrado de señales. Se discute también el uso de la transformada de Fourier en la determinación de la respuesta de sistemas LTIV. El teorema de Nyquist sobre el muestreo se obtiene a partir del modelo de muestreo mediante la modulación de impulsos. Se presentan también diversas definiciones para el concepto de ancho de banda y las relaciones entre duración y ancho de banda.

El Capítulo 5 trata de la transformada de Laplace. Se definen las transformadas de Laplace unilateral y bilateral. Se obtienen las propiedades de la transformada de Laplace y se dan ejemplos para demostrar cómo se utilizan esas propiedades en la obtención de nuevas parejas de transformadas y para encontrar transformadas inversas de Laplace. Se presentan el concepto de función de transferencia y otras aplicaciones de la transformada de Laplace como la solución de ecuaciones diferenciales, análisis de circuitos y sistemas de control. Se considera también la representación de sistemas en el dominio de la frecuencia utilizando variables de estado y la solución de las ecuaciones de estado utilizando transformadas de Laplace.

El tratamiento de las señales y los sistemas en tiempo continuo finaliza con el Capítulo 5 y, por tanto, un curso centrado únicamente en este material puede terminar aquí. Al finalizar este capítulo el lector habrá adquirido una buena comprensión de las señales y los sistemas en tiempo continuo y estará preparado para abordar la segunda parte del curso en la que se considera el análisis de las señales y los sistemas en tiempo discreto.

Empezamos nuestra discusión sobre sistemas en tiempo discreto en el Capítulo 6, que trata sobre sistemas elementales en tiempo discreto. Se presenta la respuesta al impulso y la convolución para determinar la respuesta a entradas arbitrarias. Se considera también la representación de sistemas en tiempo discreto mediante la ecuación en diferencias y se obtiene su solución. Como en el caso de los sistemas en tiempo continuo, se discuten los diagramas de simulación para obtener la representación utilizando variables de estado.

El Capítulo 7 considera el análisis de Fourier de señales en tiempo discreto. Se obtiene el desarrollo en serie de Fourier de secuencias periódicas y la transformada de Fourier de señales arbitrarias. Se hace hincapié en las similitudes y diferencias con sus conceptos equivalentes en tiempo continuo y se discuten propiedades y aplicaciones. Se presenta la relación entre la transformada de Fourier en tiempo continuo y la transformadas de Fourier en tiempo discreto de señales analógicas muestreadas y dicha relación se utiliza para obtener el modelo de muestreo, basado en modulación de impulsos, que se presenta en el Capítulo 4. Se considera también la reconstrucción de señales analógicas muestreadas utilizando dispositivos prácticos de reconstrucción como el filtro de retención de orden cero. Se discute también la conversión de velocidad de muestreo mediante el diezmado y la interpolación de las señales muestreadas. Este capítulo concluye con una breve discusión sobre la conversión A/D y D/A.

El Capítulo 8 se ocupa de la transformada Z de señales en tiempo discreto. El desarrollo es semejante al realizado en el Capítulo 5 sobre la transformada de Laplace. Se obtienen las propiedades de la transformada Z y se desarrolla su aplicación al análisis de sistemas en tiempo discreto. También se discute la solución de ecuaciones en diferencias y el análisis de sistemas descritos mediante variables de estado. Fi-

nalmente se obtiene la relación entre la transformada de Laplace y la transformada Z de señales muestreadas, y se presenta la correspondencia entre el plano s y el plano z .

El Capítulo 9 presenta la transformada discreta de Fourier (DFT-*Discrete Fourier Transform*) para el análisis de secuencias de longitud finita. Se obtienen las propiedades de la DFT y se discuten las diferencias con otras transformadas presentadas en el libro. Se utiliza brevemente la interpretación de la DFT como una operación matricial sobre un vector de datos, para establecer su relación con otras transformadas ortogonales. Se considera también la aplicación de la DFT al análisis de sistemas lineales y a la estimación espectral de señales analógicas. Se presentan dos populares algoritmos para realizar la transformada rápida de Fourier (FFT-*Fast Fourier Transform*).

El capítulo final, Capítulo 10, considera algunas técnicas para diseñar filtros analógicos y digitales. Se proporcionan técnicas de diseño de filtros analógicos paso bajo, como los filtros de Butterworth y de Chebyshev. Se presentan las técnicas de invarianza del impulso y las técnicas bilineales para el diseño de filtros digitales IIR (*Infinite Impulse Response*). Se discute también el diseño de filtros digitales FIR (*Finite Impulse Response*) mediante técnicas de enventanado. Se presenta un ejemplo que ilustra la aplicación de los filtros FIR en la aproximación de filtros no convencionales. El capítulo termina con una revisión muy breve de las técnicas de diseño asistido por computador.

Se incluyen además cuatro apéndices, que son una fuente útil y rápidamente disponible de material sobre variable compleja y álgebra matricial, necesario para el curso. Se incluye también una extensa lista de fórmulas frecuentemente utilizadas.

Deseamos dar las gracias a todas las personas que nos han ayudado al escribir este libro, especialmente a los estudiantes que sirvieron para probar en las clases una buena parte de este material, y a los revisores cuyos comentarios fueron muy útiles. Hemos intentado incorporar la mayor parte de sus comentarios al preparar la segunda edición del libro. Queremos dar también las gracias a Dyan Muratalla, que escribió en computador una parte sustancial del manuscrito. Finalmente, queremos agradecer a nuestras esposas y familias su paciencia durante la realización de este libro.

S. Soliman
M. D. Srinath

Representación de señales

1.1. INTRODUCCIÓN

Las señales son magnitudes físicas o variables detectables mediante las que se pueden transmitir mensajes o información. Existen una gran variedad de señales que son de importancia práctica en la descripción de fenómenos físicos. Como ejemplos tenemos la voz humana, las imágenes de televisión, los datos de un teletipo y la temperatura atmosférica. Las señales eléctricas constituyen el tipo de señales que se pueden medir con más facilidad y que se pueden representar de forma más simple. Es por eso que muchos ingenieros prefieren transformar variables físicas en señales eléctricas. Por ejemplo, muchas magnitudes físicas, como la temperatura, la humedad, la voz, la velocidad del viento y la intensidad de luz se pueden transformar, mediante transductores, en señales de tensión o de corriente que varían con el tiempo. Los ingenieros en electricidad, electrónica y comunicaciones tratan con señales que pueden tener características muy variadas: forma, amplitud, duración, y posiblemente otras propiedades físicas. Por ejemplo, el diseñador de un sistema radar que analiza pulsos de microondas de alta frecuencia; o el ingeniero especialista en sistemas de comunicaciones que se ocupa de detección y análisis de señal, que analiza las señales que transportan información; o el ingeniero de sistemas de potencia, que trata con señales de alta tensión; o el ingeniero en computadores, que maneja señales con millones de pulsos por segundo.

Matemáticamente, las señales se representan como funciones de una o más variables independientes. Por ejemplo, las señales consistentes en tensiones o corrientes que varían con el tiempo son funciones de una sola variable (el tiempo). La vibración de una membrana rectangular se puede representar como una función de dos variables espaciales (las coordenadas x e y). La intensidad de campo eléctrico se puede ver como una función de dos variables (el espacio y el tiempo). Finalmente, una imagen se puede ver también como una función de dos variables (las coordenadas x e y). En este curso introductorio sobre señales y sistemas, centraremos nuestra atención en señales que dependen de una sola variable independiente, que asumiremos que es el tiempo, aunque en algunas aplicaciones específicas puede ser otra magnitud.

Este capítulo comienza con una introducción a las dos clases de señales que vamos a considerar a lo largo del libro. Concretamente, las señales en tiempo continuo y en tiempo discreto. Seguidamente, la Sección 1.3 define las señales periódicas. La Sección 1.4 considera las señales de energía finita y de potencia media finita. En la Sección 1.5 se presentan varias transformaciones de la variable independiente. La Sección 1.6 introduce algunas señales elementales importantes que no aparecen frecuentemente en las aplicaciones, pero que sirven de base para la representación de otras señales. La Sección 1.7 menciona otros tipos de señales de importancia en ingeniería.

1.2. SEÑALES EN TIEMPO CONTINUO Y SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

Una forma de clasificar las señales es atendiendo a la naturaleza de la variable independiente. Si la variable independiente es continua, la correspondiente señal se denomina señal en tiempo continuo, y está definida para valores continuos de la variable independiente. Ejemplos de señales continuas pueden ser una señal telefónica o de radio como función del tiempo, o la presión atmosférica como función de la altitud (véase Figura 1.2.1).

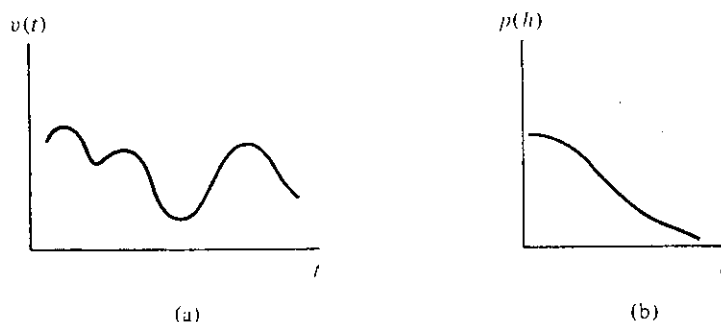


Figura 1.2.1. Ejemplos de señales en tiempo continuo.

Sea t_1 un instante temporal determinado, y ε un número real positivo infinitesimalmente pequeño. Indicaremos mediante t_1^+ y t_1^- los instantes $t_1 + \varepsilon$ y $t_1 - \varepsilon$, respectivamente. Si se cumple que $x(t_1^-) = x(t_1^+) = x(t_1)$, decimos que la señal es continua en $t = t_1$. Si no se cumple lo anterior, diremos que la señal es discontinua en t_1 , y la amplitud de la señal $x(t)$ presentará un salto en ese punto. Una señal $x(t)$ es continua si es continua en cualquier valor de t . Una señal que presente sólo un número finito o infinito numerable de discontinuidades se dice que es continua por tramos, siempre que el salto de amplitud que se produce en cada discontinuidad sea finito.

Existen muchas señales en tiempo continuo de interés que no son continuas. Por ejemplo, la función pulso rectangular $\text{rect}(t/\tau)$ (véase Figura 1.2.2) que se define así:

$$\text{rect}(t/\tau) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Esta señal es continua por tramos, ya que es continua en todos los valores de t excepto para $t = \pm\tau/2$, y el salto en esos puntos es de amplitud 1. Otro ejemplo puede ser el tren

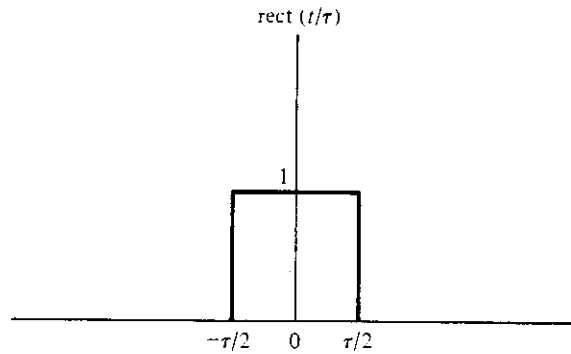


Figura 1.2.2. Un pulso rectangular.

de pulsos que se muestra en la Figura 1.2.3. Esta señal es continua para todo t excepto en $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

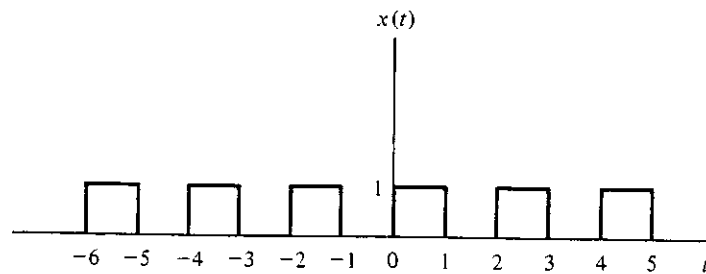


Figura 1.2.3. Un tren de pulsos.

Generalmente se considera que el valor de la señal $x(t)$ es indefinido en los puntos de discontinuidad. No obstante, con objeto de poder considerar de forma similar las señales continuas y las discontinuas por tramos, asignaremos el valor

$$x(t_1) = \frac{1}{2} [x(t_1^+) + x(t_1^-)] \quad (1.2.2)$$

a la señal $x(t)$ en el punto de discontinuidad $t = t_1$.

Si la variable independiente toma sólo valores discretos $t = kT_s$, siendo T_s un número real positivo fijo, y k un número entero (es decir, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, etc.), la correspondiente señal $x(kT_s)$ se denomina señal en tiempo discreto. Las señales en tiempo discreto surgen de forma natural en muchas áreas de negocios, economía, ciencia e ingeniería. Como ejemplos tenemos la amortización de un préstamo en el mes k -ésimo, el valor semanal del índice Dow Jones o la salida de una fuente de información que produzca cada vez uno de los dígitos 1, 2, ..., M cada T_s segundos. En el Capítulo 6 consideraremos con más detalle las señales en tiempo discreto.

1.3. SEÑALES PERIÓDICAS Y APERIÓDICAS

Cualquier señal en tiempo continuo que satisfaga la condición

$$x(t) = x(t + nT), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.3.1)$$

siendo $T > 0$ una constante denominada período fundamental, se considera una señal periódica. Si una señal $x(t)$ no es periódica se denomina señal aperiódica. Las señales sinusoidales son ejemplos familiares de señales periódicas. Una señal sinusoidal real se puede expresar matemáticamente como una función que varía con el tiempo de la siguiente forma:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (1.3.2)$$

donde

A = amplitud

ω_0 = frecuencia angular en rad/s

ϕ = ángulo de fase inicial con respecto al origen temporal en radianes

Las señales sinusoidales son periódicas con período fundamental $T = 2\pi/\omega_0$ para todos los valores de ω_0 .

La función sinusoidal del tiempo descrita en la Ecuación (1.3.2) se conoce generalmente como onda sinusoidal. Existen fenómenos físicos que producen aproximadamente señales sinusoidales: la tensión de salida de un alternador eléctrico y el desplazamiento vertical de una masa unida a un muelle bajo la suposición de que la masa del muelle es despreciable y que no hay amortiguamiento. El tren de pulsos que se muestra en la Figura 1.2.3 es otro ejemplo de señal periódica con período fundamental $T = 2$. Nótese que si $x(t)$ es periódica con período fundamental T , también será periódica con período $2T$, $3T$, $4T$, ... La frecuencia fundamental, en radianes (frecuencia angular) de la señal periódica $x(t)$ se relaciona con el período fundamental mediante la siguiente expresión:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1.3.3)$$

Los ingenieros y la mayoría de los matemáticos denominan armónico k -ésimo a la señal sinusoidal de frecuencia angular $\omega_k = k\omega_0$. Por ejemplo, la señal que se muestra en la Figura 1.2.3 tiene una frecuencia angular fundamental de $\omega_0 = \pi$, la frecuencia angular del segundo armónico es $\omega_2 = 2\pi$ y la frecuencia angular del tercer armónico es $\omega_3 = 3\pi$. La Figura 1.3.1 muestra los armónicos primero, segundo y tercero de la señal de la Ecuación (1.3.2) para valores específicos de A , ω_0 y ϕ . Nótese que las formas de onda correspondientes a cada armónico son distintas. En teoría, podemos asociar un número infinito de señales armónicas distintas con una determinada forma de onda sinusoidal.

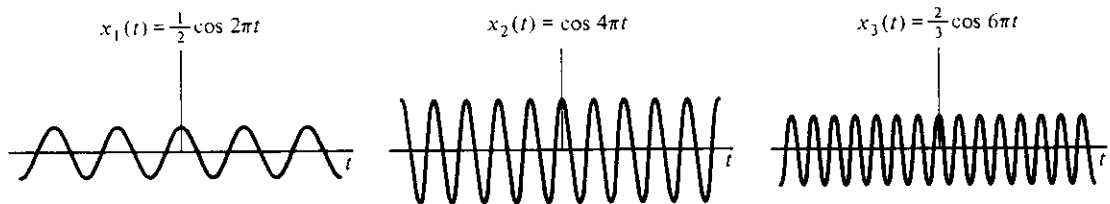


Figura 1.3.1. Sinusoides armónicamente relacionadas.

Ejemplo 1.3.1

Las exponenciales en tiempo continuo armónicamente relacionadas son conjuntos de exponenciales complejas cuyas frecuencias fundamentales son múltiplos de una frecuencia positiva ω_0 . Matemáticamente:

$$\phi_k(t) = \exp[jk\omega_0 t], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3.4)$$

Demostraremos que para $k \neq 0$, $\phi_k(t)$ es periódica con período fundamental $2\pi/|k\omega_0|$ o frecuencia fundamental $|k\omega_0|$.

Para que la señal $\phi_k(t)$ sea periódica con período $T > 0$ debe cumplirse

$$\exp[jk\omega_0(t + T)] = \exp[jk\omega_0 t]$$

o, lo que es lo mismo

$$T = \frac{2\pi}{|k\omega_0|} \quad (1.3.5)$$

Nótese que como una señal periódica con período T es también periódica con período lT para todo entero positivo l , todas las señales $\phi_k(t)$ tienen como período común $2\pi/\omega_0$.

La suma de dos señales periódicas puede ser o no ser periódica. Consideremos dos señales periódicas con períodos fundamentales T_1 y T_2 , respectivamente. Investigaremos bajo qué condiciones la suma

$$z(t) = ax(t) + by(t)$$

es periódica y cuál es el período fundamental de la señal si ésta es periódica. Como $x(t)$ es periódica de período T_1 , esto implica que

$$x(t) = x(t + kT_1)$$

Análogamente

$$y(t) = y(t + lT_2)$$

donde k y l son enteros de forma que se cumple que

$$z(t) = ax(t + kT_1) + by(t + lT_2)$$

Para que $z(t)$ sea periódica de período T es necesario que se cumpla

$$ax(t + T) + by(t + T) = ax(t + kT_1) + by(t + lT_2)$$

y por lo tanto debemos tener

$$T = kT_1 = lT_2$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{l}{k}$$

En otras palabras, la suma de dos señales periódicas es periódica sólo si el cociente de sus respectivos períodos se puede expresar como un número racional.

Ejemplo 1.3.2 Deseamos determinar cuál de las siguientes señales es periódica

(a) $x_1(t) = \sin \frac{2\pi}{3} t$

(b) $x_2(t) = \sin \frac{2\pi}{5} t \cos 4 \frac{\pi}{3} t$

$$(c) \quad x_3(t) = \sin 3t$$

$$(d) \quad x_4(t) = x_1(t) - 2x_3(t)$$

$x_1(t)$ es periódica con período $T_1 = 3$. Podemos escribir $x_2(t)$ como la suma de dos sinusoides de períodos $T_{21} = 15/13$ y $T_{22} = 15/7$. Como $13T_{21} = 7T_{22}$, se concluye que $x_2(t)$ es periódica con período $T_2 = 15$. $x_3(t)$ es periódica con período $T_3 = 2\pi/13$. Como no se pueden encontrar enteros k y l que cumplan que $kT_1 = lT_3$, $x_4(t)$ no es periódica.

Nótese que si $x(t)$ e $y(t)$ tienen el mismo período T , entonces $z(t) = x(t) + y(t)$ es periódica de período T . Es decir, las operaciones lineales (en este caso la suma) no afectan a la periodicidad de la señal resultante. Si se realizan operaciones no lineales sobre señales periódicas (como por ejemplo, la multiplicación), se producen señales periódicas con períodos fundamentales diferentes. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 1.3.3

Sea $x(t) = \cos \omega_1 t$ e $y(t) = \cos \omega_2 t$. Consideremos la señal $z(t) = x(t)y(t)$. La señal $x(t)$ es periódica de período $2\pi/\omega_1$, y la señal $y(t)$ es periódica de período $2\pi/\omega_2$. Se puede demostrar que la señal $z(t) = x(t)y(t)$ tiene dos componentes, una de frecuencia angular $\omega_2 - \omega_1$ y otra de frecuencia angular $\omega_2 + \omega_1$. Para ello, basta con escribir de otra forma el producto $x(t)y(t)$

$$\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{1}{2} [\cos(\omega_2 - \omega_1)t + \cos(\omega_2 + \omega_1)t]$$

Si $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, la señal $z(t)$ tiene un término constante, de valor $1/2$, y un segundo armónico de valor $1/2 \cos 2\omega t$. En general, cuando se realizan operaciones no lineales sobre señales periódicas, se pueden producir armónicos de orden superior.

Como las señales periódicas son de duración infinita, deberían comenzar en $t = -\infty$ y terminar en $t = \infty$. Por lo tanto, en la práctica, todas las señales son aperiódicas. No obstante, el estudio de la respuesta de los sistemas a entradas periódicas es esencial al proceso de obtener la respuesta de los sistemas a entradas de valor práctico, como veremos en el Capítulo 4.

1.4. SEÑALES DE ENERGÍA FINITA Y DE POTENCIA MEDIA FINITA

Sea $x(t)$ una señal real. Si $x(t)$ representa la tensión en una resistencia de valor R , se producirá una corriente cuya intensidad será $i(t) = x(t)/R$. La potencia instantánea de la señal es $Ri^2(t) = x^2(t)/R$, y la energía correspondiente al intervalo infinitesimal dt es $[x^2(t)/R]dt$. En general, no sabremos si $x(t)$ corresponde a una señal de tensión o de corriente, y para normalizar la potencia, asumiremos que la resistencia R es de 1 ohmio. Por tanto, la potencia instantánea correspondiente a la señal $x(t)$ vale $x^2(t)$. La energía de la señal durante un intervalo temporal de duración $2L$ se define así

$$E_{2L} = \int_{-L}^L |x(t)|^2 dt \quad (1.4.1)$$

y la energía total de la señal en el intervalo $t \in (-\infty, \infty)$ es

$$E = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |x(t)|^2 dt \quad (1.4.2)$$

La potencia media puede definirse entonces así

$$P = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |x(t)|^2 dt \right] \quad (1.4.3)$$

Aunque en el desarrollo de las Ecuaciones (1.4.2) y (1.4.3) hemos empleado señales eléctricas, dichas ecuaciones definen respectivamente la energía y la potencia media para cualquier señal arbitraria $x(t)$.

Cuando el límite definido en la Ecuación (1.4.2) existe y es finito ($0 < E < \infty$), se dice que la señal $x(t)$ es de energía finita. Observando la Ecuación (1.4.3) vemos que las señales de energía finita tienen una potencia media de cero. Por otra parte, si el límite de la Ecuación (1.4.3) existe y es finito ($0 < P < \infty$), se dice que $x(t)$ es de potencia media finita. Las señales de potencia media finita tienen energía infinita.

Como mencionamos anteriormente, las señales periódicas están definidas para cualquier valor del tiempo entre $-\infty$ e ∞ y, por lo tanto, tienen energía infinita. En la mayoría de los casos las señales periódicas tienen potencia media finita. Por el contrario, las señales de duración limitada son señales de energía finita.

Ejemplo 1.4.1

En este ejemplo demostraremos que el valor de la potencia media de una señal periódica de período T viene dado por

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad (1.4.4)$$

Si $x(t)$ es una señal periódica de período T , la integral de la Ecuación (1.4.3) tiene el mismo valor sobre cualquier intervalo de longitud T . Tomando los límites de forma que $2L$ sea un múltiplo entero del período (es decir, $2L = mT$), encontramos que la energía total de $x(t)$ en un intervalo de longitud $2L$ es m veces la energía en un período. Por tanto, la potencia media es

$$\begin{aligned} P &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{mT} m \int_0^T |x(t)|^2 dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.2

Sean las señales que se muestran en la Figura 1.4.1. Deseamos determinar si se trata de señales de energía finita o de potencia media finita. La señal de la Figura 1.4.1(a) es aperiódica con energía total

$$E = \int_0^{\infty} A^2 \exp[-2t] dt = \frac{A^2}{2}$$

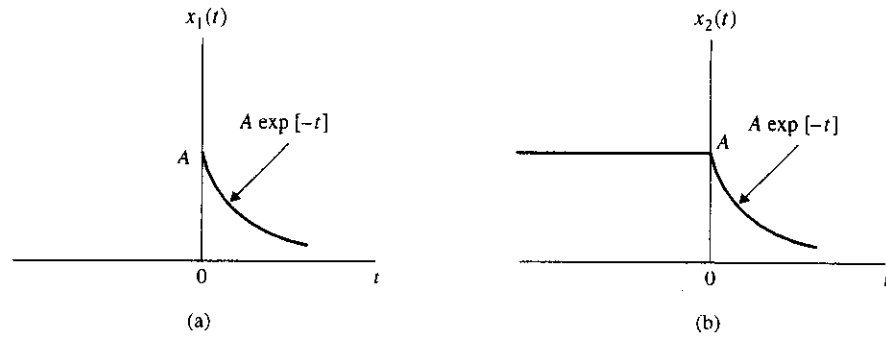


Figura 1.4.1. Las señales del Ejemplo 1.4.2.

que es un valor finito. Por tanto esta señal es de energía finita y su energía total es $A^2/2$. Su potencia media es

$$P = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L A^2 \exp[-2t] dt \right)$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4L} = 0$$

que vale cero como era de esperar.

La energía de la señal de la Figura 1.4.2(b) se puede encontrar así:

$$E = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\int_{-L}^0 A^2 dt + \int_0^L A^2 \exp[-2t] dt \right] = \lim_{L \rightarrow \infty} A^2 \left[L + \frac{1}{2} (1 - \exp[-2L]) \right]$$

que claramente no está acotada. Por lo tanto, no es una señal de energía finita. Su potencia media puede encontrarse así:

$$E = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \left[\int_{-L}^0 A^2 dt + \int_0^L A^2 \exp[-2t] dt \right] = \frac{A^2}{2}$$

de modo que se trata de una señal de potencia media finita y el valor de dicha potencia media es $A^2/2$.

Ejemplo 1.4.3 Consideremos la señal sinusoidal

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

que es periódica de período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

La potencia media de la señal es

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2 \omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\phi) \right] dt \\
&= \frac{A^2}{2}
\end{aligned}$$

Este último paso es debido a que la señal $\cos(2\omega_0 t + 2\phi)$ es periódica de período $T/2$ y el área encerrada bajo un coseno medida sobre cualquier intervalo de longitud lT , siendo l un entero positivo, es siempre cero [para comprobar este resultado, se sugiere dibujar dos períodos completos de la señal $\cos(2\omega_0 t + 2\phi)$].

Ejemplo 1.4.4

Consideremos las dos señales aperiódicas que se muestran en la Figura 1.4.2. Estas señales son ejemplos de señales de energía finita. El pulso rectangular que se muestra en la Figura 1.4.2(a) está estrictamente limitado en el tiempo, ya que $x_1(t)$ es idénticamente cero fuera del intervalo de duración del pulso. La otra señal está limitada en el tiempo asintóticamente, en el sentido de que $x_2(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm \infty$. Este tipo de señales se pueden considerar como «pulsos» en sentido amplio. En ambos casos, la potencia media es cero. La energía de la señal $x_1(t)$ es

$$\begin{aligned}
E_1 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L x_1^2(t) dt \\
&= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A^2 dt = A^2 \tau
\end{aligned}$$

Para la señal $x_2(t)$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L A^2 \exp[-2a|t|] dt \\
&= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{A^2}{a} (1 - \exp[-2aL]) = \frac{A^2}{a}
\end{aligned}$$

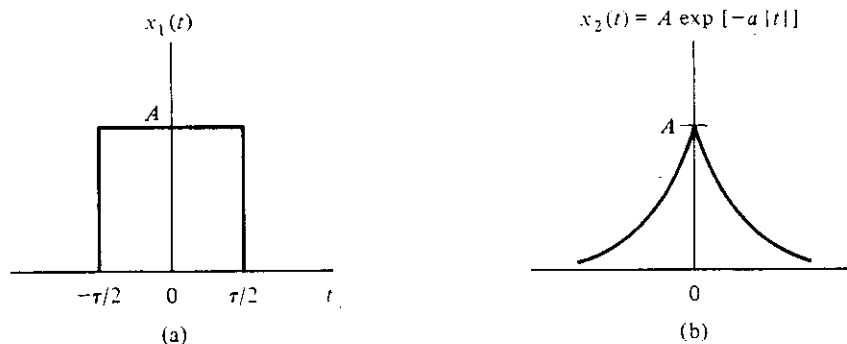


Figura 1.4.2. Las señales del Ejemplo 1.4.4.

Como E_1 y E_2 son finitos, $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales de energía finita. Casi todas las señales limitadas en el tiempo de interés práctico son señales de energía finita.

1.5. TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

Hay un tipo de operaciones importantes que se realizan a menudo sobre las señales. La mayoría de esas operaciones tienen que ver con transformaciones de la variable independiente. Es importante que el lector conozca cómo se realizan estas operaciones y que entienda el significado físico de cada una de ellas. Las tres operaciones que se presentan en esta sección son el desplazamiento, la reflexión y el escalado temporal.

1.5.1. La operación de desplazamiento

La señal $x(t - t_0)$ es una versión de la señal $x(t)$ desplazada en el tiempo, como se muestra en la Figura 1.5.1. El desplazamiento temporal es t_0 . Si $t_0 > 0$, la señal está retrasada t_0 segundos. Físicamente, t_0 no puede tomar valores negativos, pero desde el punto de vista analítico, $x(t - t_0)$ para $t_0 < 0$ representa una réplica adelantada de la señal $x(t)$. Las señales que se relacionan mediante esta transformación aparecen en aplicaciones como radar, sonar, sistemas de comunicaciones, y tratamiento de señales sísmicas.

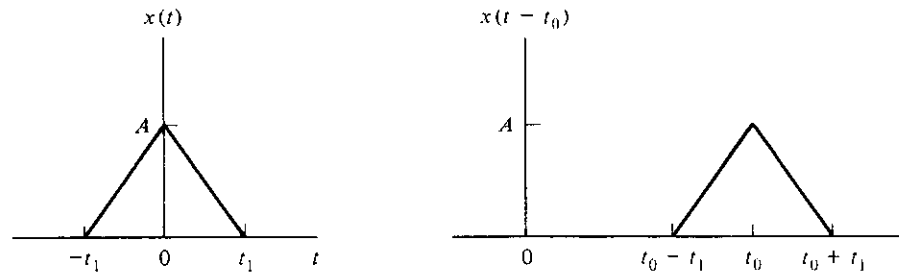


Figura 1.5.1. La operación de desplazamiento.

Ejemplo 1.5.1 Consideremos la señal $x(t)$ que se muestra en la Figura 1.5.2. Deseamos dibujar las señales $x(t - 2)$ y $x(t + 3)$. Se puede ver fácilmente que

$$x(t) = \begin{cases} t + 1, & -1 \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq 2 \\ -t + 3, & 2 < t \leq 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para realizar la operación de desplazamiento temporal se sustituye t por $t - 2$ en la expresión de $x(t)$:

$$x(t - 2) = \begin{cases} (t - 2) + 1, & -1 \leq t - 2 \leq 0 \\ 1, & 0 \leq t - 2 \leq 2 \\ -(t - 2) + 3, & 2 < t - 2 \leq 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

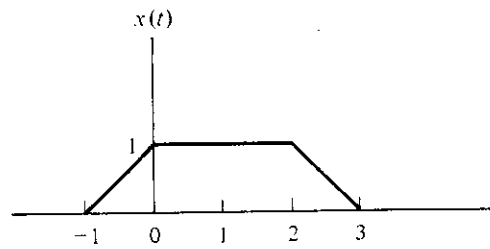


Figura 1.5.2. Representación de la señal $x(t)$ del Ejemplo 1.5.1.

o, lo que es lo mismo,

$$x(t-2) = \begin{cases} t-1, & 1 \leq t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 4 \\ -t+5, & 4 < t \leq 5 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

La señal $x(t-2)$ se muestra en la Figura 1.5.3(a), y se puede ver que corresponde a desplazar $x(t)$ dos unidades a la derecha en el eje temporal. De forma análoga se puede demostrar que

$$x(t+3) = \begin{cases} t+4, & -4 \leq t \leq -3 \\ 1, & -3 < t \leq -1 \\ -t, & -1 < t \leq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

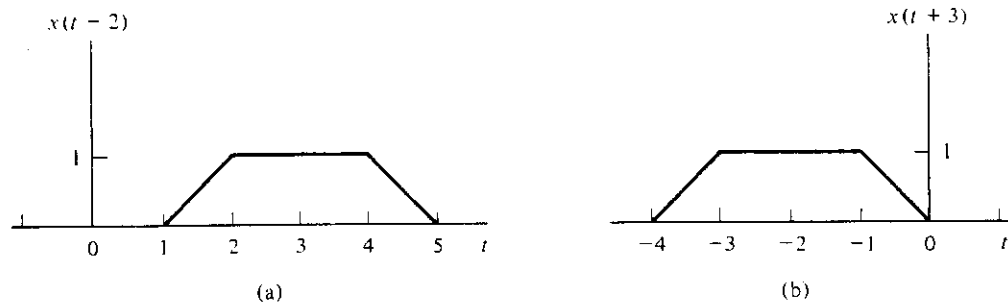


Figura 1.5.3. Desplazamientos de la señal $x(t)$ del Ejemplo 1.5.1.

La señal $x(t+3)$ se muestra en la Figura 1.5.3(b), y se puede ver como una versión de $x(t)$ desplazada tres unidades a la izquierda en el eje temporal.

Ejemplo 1.5.2

Los sensores de vibración se montan en los ejes delanteros y traseros de los vehículos, para recoger las vibraciones debidas a la rugosidad de la calzada. La señal del sensor delantero es $x(t)$ y se muestra en la Figura 1.5.4. La señal del sensor del eje trasero se modela como $x(t-120)$. Si los sensores están separados 1,5 metros, es posible determinar la velocidad del vehículo comparando la señal procedente del sensor del eje trasero con la señal procedente del sensor del eje delantero.

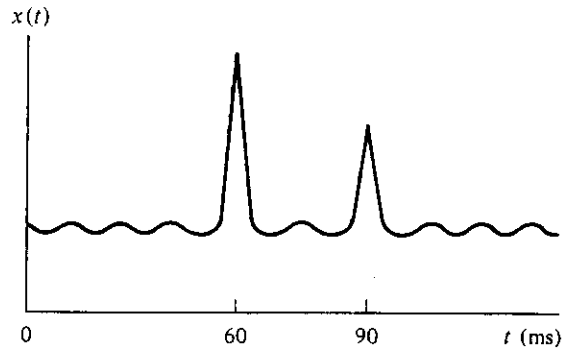


Figura 1.5.4. Señal del sensor del eje delantero del Ejemplo 1.5.2.

La Figura 1.5.5 ilustra la versión retrasada de $x(t)$ donde el retardo es de 120 ms., o de 0,12 s. El valor del retardo τ entre las señales de los sensores de los ejes delantero y trasero se relacionan con la distancia entre ejes d y la velocidad del vehículo v mediante la expresión

$$d = v\tau$$

de forma que

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{\tau} \\ &= \frac{1,5 \text{ m}}{0,12 \text{ s}} = 12,5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

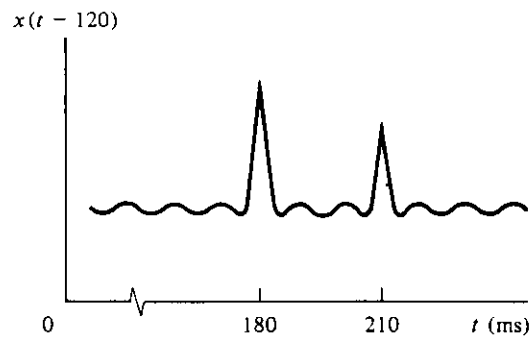


Figura 1.5.5. Señal del sensor del eje trasero del Ejemplo 1.5.2.

Ejemplo 1.5.3

Un radar situado para detectar aeronaves a una distancia R de 45 millas náuticas (1 milla náutica son aproximadamente 1.852 metros) transmite el tren de pulsos que se muestra en la Figura 1.5.6. Si existe un blanco, la señal transmitida se reflejará de vuelta al receptor del radar. El radar funciona midiendo el retardo temporal entre cada pulso transmitido y el correspondiente retorno o eco. La velocidad de propagación C de la señal radar es de 161.875 millas náuticas por segundo.

El retardo de tránsito de la señal es

$$\tau = \frac{2R}{C} = \frac{2 \times 45}{161.875} = 0,556 \text{ ms}$$

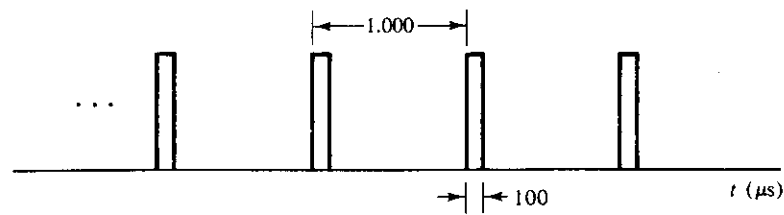


Figura 1.5.6. La señal de radar transmitida en el Ejemplo 1.5.3.

Por lo tanto, el tren de pulsos recibido es idéntico al transmitido, pero desplazado 0,556 ms. a la derecha, como se muestra en la Figura 1.5.7.

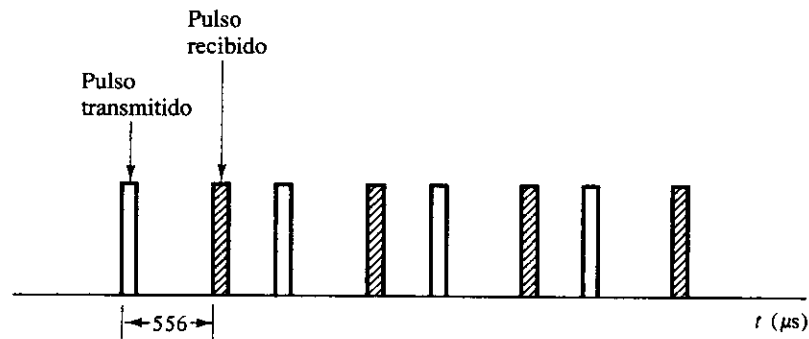


Figura 1.5.7. Tren de pulsos transmitidos y recibidos en el Ejemplo 1.5.3.

1.5.2. La operación de reflexión

La señal $x(-t)$ se obtiene a partir de la señal $x(t)$ mediante una reflexión sobre $t = 0$. Es decir, corresponde a invertir la señal $x(t)$, como se muestra en la Figura 1.5.8. Por tanto, si $x(t)$ fuera la señal de un grabador de vídeo, $x(-t)$ correspondería a la señal de salida del vídeo cuando la tecla de rebobinado está pulsada (suponiendo que la velocidad de rebobinado y de reproducción fuera la misma).

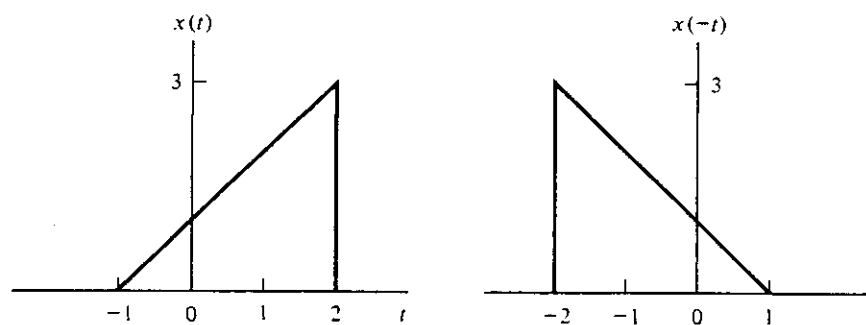


Figura 1.5.8. La operación de reflexión.

Ejemplo 1.5.4 Deseamos dibujar $x(-t)$ y $x(3-t)$ siendo $x(t)$ la señal que se muestra en la Figura 1.5.9(a). La señal $x(t)$ se puede escribir

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

La señal $x(-t)$ se puede obtener sustituyendo t por $-t$ en la última ecuación de forma que

$$x(-t) = \begin{cases} -t+1, & -1 \leq -t \leq 0 \\ 1, & 0 < -t \leq 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

o, de forma equivalente

$$x(-t) = \begin{cases} -t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & -2 < t \leq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

La señal $x(-t)$ se muestra en la Figura 1.5.9(b), y se puede describir como la señal $x(t)$ reflejada sobre el eje vertical. Análogamente, se puede demostrar que

$$x(3-t) = \begin{cases} 4-t, & 3 \leq t \leq 4 \\ 1, & 1 < t \leq 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

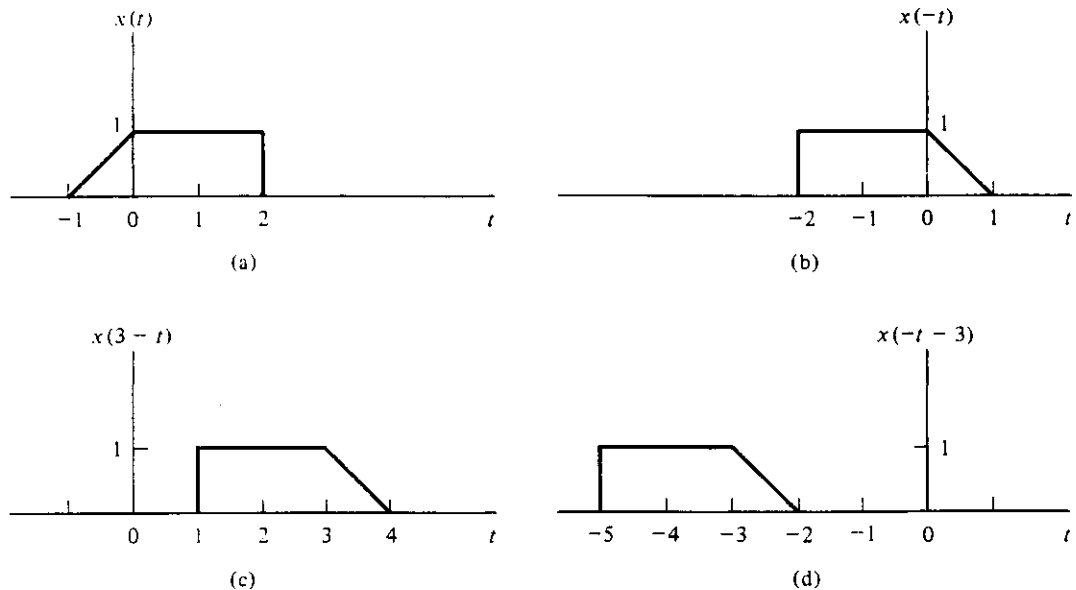


Figura 1.5.9. Gráficas de $x(-t)$ y $x(3-t)$ en el Ejemplo 1.5.4.

La señal $x(3 - t)$ se muestra en la Figura 1.5.9(c). Corresponde a la reflexión de $x(t)$ sobre el eje vertical, con un desplazamiento posterior de tres unidades a la derecha. Este resultado se puede obtener como sigue:

$$x(3 - t) = x(-(t - 3))$$

Nótese que si desplazáramos primero $x(t)$ tres unidades y después reflejáramos la señal desplazada, el resultado sería $x(-t - 3)$, como se muestra en la Figura 1.5.9(d). Por lo tanto, las operaciones de desplazamiento y reflexión no son conmutativas.

Además de su uso en la representación de fenómenos físicos, como en el ejemplo del vídeo, la reflexión es extremadamente útil al examinar las propiedades de simetría que pueden poseer las señales. Se dice que una señal $x(t)$ es par, o que posee simetría par si es idéntica a su reflexión sobre el origen, es decir si

$$x(-t) = x(t) \quad (1.5.1)$$

Se dice que una señal posee simetría impar si

$$x(-t) = -x(t) \quad (1.5.2)$$

Una señal arbitraria $x(t)$ se puede expresar siempre como la suma de una señal par y otra impar

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (1.5.3)$$

siendo $x_e(t)$ la parte par de $x(t)$, que se puede obtener así (véase Problema 1.14):

$$x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] \quad (1.5.4)$$

y $x_o(t)$ la parte impar de $x(t)$ que se puede expresar así:

$$x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)] \quad (1.5.5)$$

Ejemplo 1.5.5 Consideremos la señal $x(t)$ definida así:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Las partes par e impar de esta señal son, respectivamente,

$$x_e(t) = \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } t \text{ excepto } t = 0$$

$$x_o(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t > 0 \end{cases}$$

El único problema aquí es el valor de esas funciones en $t = 0$. Si definimos $x(0) = 1/2$ (esta definición es consistente con nuestra definición de la señal en el punto de discontinuidad), entonces

$$x_e(0) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x_o(0) = 0$$

Las señales $x_e(t)$ y $x_o(t)$ se muestran en la Figura 1.5.10.

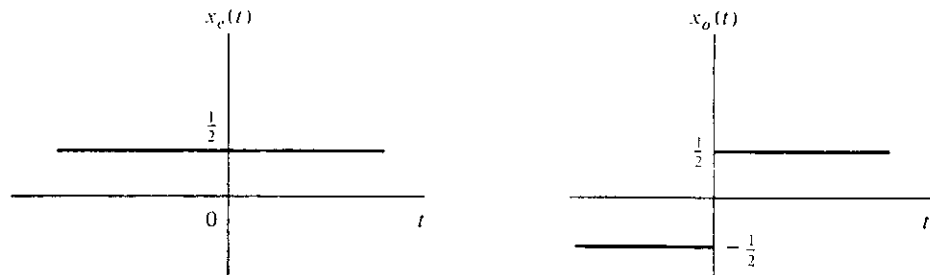


Figura 1.5.10. Gráficas de $x_e(t)$ y $x_o(t)$ para la señal $x(t)$ del Ejemplo 1.5.5.

Ejemplo 1.5.6 Consideremos la señal

$$x(t) = \begin{cases} A \exp[-\alpha t], & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

La parte par de la señal es

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} A \exp[-\alpha t], & t > 0 \\ \frac{1}{2} A \exp[\alpha t], & t < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} A \exp[-\alpha|t|] \end{aligned}$$

La parte impar de $x(t)$ es

$$x_o(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} A \exp[-\alpha t], & t > 0 \\ -\frac{1}{2} A \exp[\alpha t], & t < 0 \end{cases}$$

Las señales $x_e(t)$ y $x_o(t)$ se muestran en la Figura 1.5.11.

1.5.3. La operación de escalado temporal

Consideremos las señales $x(t)$, $x(3t)$ y $x(t/2)$, que se muestran en la Figura 1.5.12. Como puede verse en la figura, $x(3t)$ se puede describir como $x(t)$ contraída en un factor de 3. Análogamente, $x(t/2)$ se puede ver como $x(t)$ expandida por un factor de 2. Tanto $x(3t)$

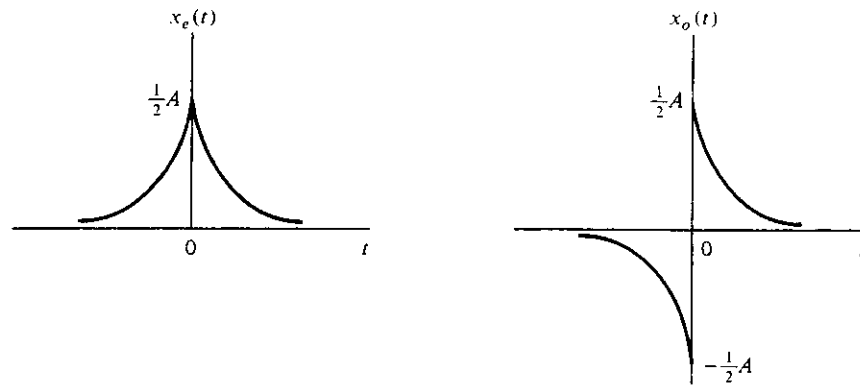


Figura 1.5.11. Gráficas de $x_e(t)$ y $x_o(t)$ para la señal $x(t)$ del Ejemplo 1.5.6.

como $x(t/2)$ son versiones de $x(t)$ escaladas en el tiempo. En general, si la variable independiente se escala por un parámetro η , $x(\eta t)$ será una versión comprimida de $x(t)$ si $|\eta| > 1$ (la señal ocupa un intervalo de tiempo menor). $x(\eta t)$ será una versión expandida de $x(t)$ si $|\eta| < 1$ (la señal ocupa un intervalo de tiempo mayor). Por ejemplo, si $x(t)$ fuera la salida de un grabador de vídeo, $x(3t)$ correspondería a la señal obtenida cuando la grabación se reproduce a velocidad tres veces superior a la que fue grabada. $x(t/2)$ es la señal que se obtiene cuando la grabación se reproduce a la mitad de velocidad.

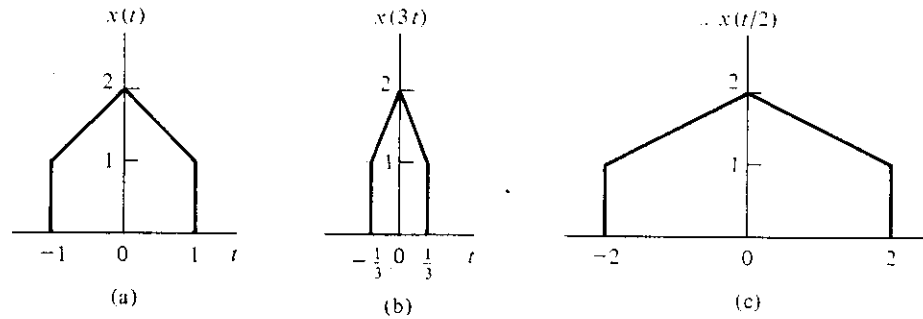


Figura 1.5.12. La operación de escalado temporal.

Ejemplo 1.5.7 Supongamos que deseamos representar la señal $x(3t - 6)$, donde $x(t)$ es la señal que se muestra en la Figura 1.5.2. Utilizando la definición de $x(t)$ del ejemplo 1.5.1 obtenemos

$$x(3t - 6) = \begin{cases} 3t - 5, & \frac{5}{3} \leq t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq \frac{8}{3} \\ -3t + 9, & \frac{8}{3} < t \leq 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

La Figura 1.5.13 muestra la señal $x(3t - 6)$ en función de t . Puede verse la señal $x(t)$ comprimida por un factor de 3 (o escalada en el tiempo por un factor de $1/3$), y desplazada posteriormente dos unidades de tiempo a la derecha. Nótese que si $x(t)$ se desplaza en primer lugar y se escala en el tiempo posteriormente por un factor de $1/3$, obtendríamos una señal diferente. Por lo tanto, las operaciones de desplazamiento y escalado temporal no son conmutativas. El resultado obtenido se puede justificar como sigue:

$$x(3t - 6) = x(3(t - 2))$$

La ecuación indica que realizamos primero la operación de escalado y después la operación de desplazamiento.

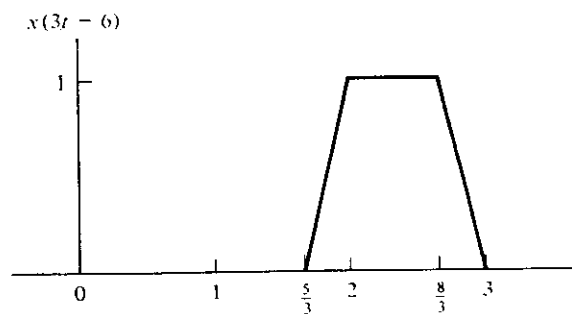


Figura 1.5.13. Representación de la señal $x(3t - 6)$ del Ejemplo 1.5.7.

Ejemplo 1.5.8 Encontramos a menudo señales del tipo

$$x(t) = 1 - A \exp[-\alpha t] \cos(\omega_0 t + \phi)$$

La Figura 1.5.14 muestra la señal $x(t)$ para valores típicos de A , α y ω_0 . Como puede verse, la señal se aproxima a un valor estacionario de 1 a medida que t tiende a infinito. En la práctica, se supone que la señal alcanza su valor final cuando permanece dentro de un porcentaje específico de su valor final teórico. Este porcentaje se escoge generalmente del 5 % y el tiempo t_s tras el cual la señal permanece dentro de ese rango se denomina tiempo de establecimiento t_s . Como puede verse en la Figura 1.5.14, t_s se puede determinar resolviendo la ecuación

$$1 + A \exp[-\alpha t_s] = 1,05$$

de forma que

$$t_s = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{0,05}{A} \right]$$

Sea

$$x(t) = 1 - 2,3 \exp[-10,356t] \cos[5t]$$

Deseamos encontrar t_s para las señales $x(t)$, $x(t/2)$ y $x(2t)$.

Para $x(t)$, como $A = 2,3$ y $\alpha = 10,356$ obtenemos $t_s = 0,3697$ s.

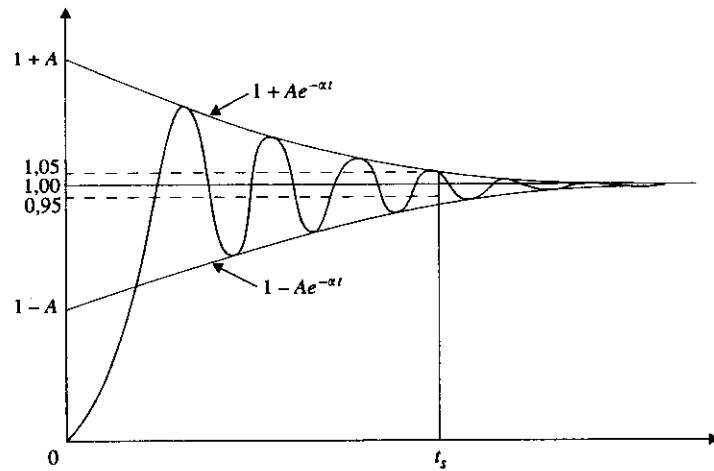


Figura 1.5.14. La señal $x(t)$ del Ejemplo 1.5.8.

Como

$$x(t/2) = 1 - 2,3 \exp[-5,178t] \cos[2,5t]$$

y

$$x(2t) = 1 - 2,3 \exp[-20,712t] \cos[10t]$$

obtenemos $t_s = 0,7394$ s. y $t_s = 0,1849$ s. para las señales $x(t/2)$ y $x(2t)$, respectivamente. Esos resultados son los esperados ya que $x(t)$ se comprime por un factor de 2 en el primer caso y se expande por el mismo factor en el segundo caso.

Como conclusión, para cualquier señal genérica $x(t)$, la transformación $\alpha t + \beta$ en la variable independiente se puede realizar como sigue:

$$x(\alpha t + \beta) = x(\alpha(t + \beta/\alpha)) \quad (1.5.6)$$

donde se supone que α y β son números reales. Las operaciones se deben realizar en el siguiente orden:

1. Escalado por un factor α . Si α es negativo, se efectuará una reflexión sobre el eje vertical.
2. Desplazamiento a la derecha de β/α si β y α tienen signos diferentes, y a la izquierda de β/α si β y α tienen el mismo signo.

Nótese que las operaciones de reflexión y escalado temporal son conmutativas, mientras que las operaciones de reflexión o escalado temporal y desplazamiento no lo son.

1.6. SEÑALES ELEMENTALES

Existen varias señales elementales importantes que aparecen frecuentemente en las aplicaciones y que sirven de base para representar otras señales. A lo largo de este libro encontraremos que la representación de señales en términos de esas señales elementales nos permitirá entender mejor las propiedades de las señales y los sistemas. Es más, muchas de esas señales

tienen características que las hacen particularmente útiles en la solución de problemas de ingeniería y, por tanto, son de importancia para nuestros estudios posteriores.

1.6.1. La función escalón unidad

El escalón unidad en tiempo continuo se define como

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.6.1)$$

que se muestra en la Figura 1.6.1.

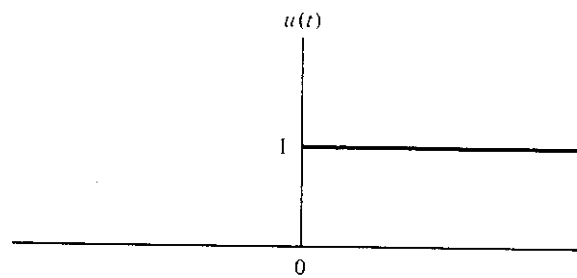


Figura 1.6.1. La función escalón unidad en tiempo continuo.

Esta señal es importante para estudios analíticos, y tiene también muchas aplicaciones prácticas. Nótese que la función escalón unidad es continua para todo t excepto $t = 0$, en donde hay una discontinuidad. De acuerdo con nuestra discusión anterior, definimos el valor $u(0) = 1/2$. Un ejemplo de función escalón unidad es la salida de una fuente de tensión de 1 V en serie con un interruptor que se cierra cuando $t = 0$.

Ejemplo 1.6.1

La señal pulso rectangular que se muestra en la Figura 1.6.2 es el resultado de la operación de cierre y apertura de una fuente de tensión constante en un circuito eléctrico.

En general, un pulso rectangular que se extiende desde $-a$ hasta $+a$ con amplitud A se puede expresar como la diferencia entre dos funciones escalón desplazadas apropiadamente. Es decir:

$$A \text{ rect}(t/2a) = A[u(t + a) - u(t - a)] \quad (1.6.2)$$

En nuestro ejemplo concreto,

$$2 \text{ rect}(t/2) = 2[u(t + 1) - u(t - 1)]$$

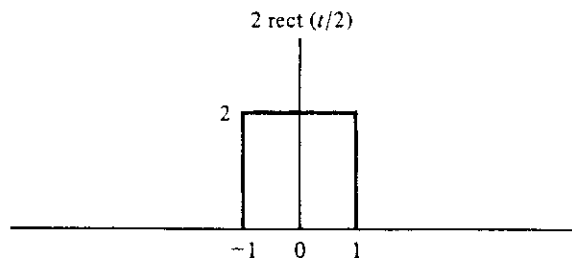


Figura 1.6.2. La señal pulso rectangular del Ejemplo 1.6.1.

Ejemplo 1.6.2

Consideremos la función signo (que denotaremos por sgn), que se muestra en la Figura 1.6.3. La función signo unidad se define así:

$$\text{sgn } t = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (1.6.3)$$

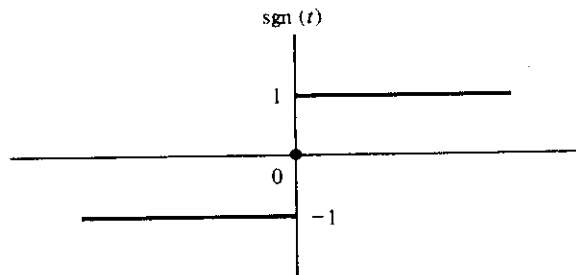


Figura 1.6.3. La función signo.

La función signo se puede expresar en términos de la función escalón unidad como

$$\text{sgn } t = -1 + 2u(t)$$

La función signo es una de las señales que se utilizan más frecuentemente en comunicaciones y en teoría de control.

1.6.2. La función rampa

La función rampa que se muestra en la Figura 1.6.4 se define así:

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.6.4)$$

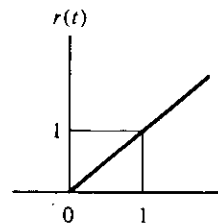


Figura 1.6.4. La función rampa.

Esta función se obtiene integrando la función escalón unidad:

$$\int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = r(t)$$

El dispositivo que realiza esta operación se denomina integrador. A diferencia de las funciones escalón unidad y signo, la función rampa es continua en $t = 0$. El escalado temporal de una rampa unidad por un factor α genera una función rampa con pendiente α (la función rampa unidad tiene una pendiente unidad). Un ejemplo de función rampa unidad es la forma de onda correspondiente al barrido lineal en un tubo de rayos catódicos.

Ejemplo 1.6.3 Sea $x(t) = u(t + 2) - 2u(t + 1) + 2u(t) - u(t - 2) - 2u(t - 3) + 2u(t - 4)$. Sea $y(t)$ la integral. Entonces

$$y(t) = r(t + 2) - 2r(t + 1) + 2r(t) - r(t - 2) - 2r(t - 3) + 2r(t - 4)$$

La señal $y(t)$ se muestra en la Figura 1.6.5.

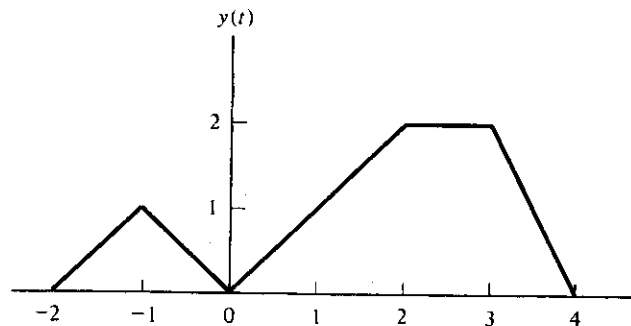


Figura 1.6.5. La señal utilizada en el Ejemplo 1.6.3.

1.6.3. La función de muestreo

Una función que se encuentra muy frecuentemente en análisis espectral es la función de muestreo $Sa(x)$, definida así:

$$Sa(x) = \frac{\text{sen } x}{x} \quad (1.6.5)$$

Como el denominador es una función creciente con x y el numerador está acotado ($|\text{sen } x| \leq 1$), $Sa(x)$ es simplemente una onda sinusoidal amortiguada. La Figura 1.6.6(a) muestra que $Sa(x)$ es una función par de x que tiene su valor de pico en $x = 0$ y con cruces por cero en $x = \pm n\pi$. El valor de la función en $x = 0$ se puede obtener utilizando la regla de l'Hopital. Una función estrechamente relacionada con ésta es $\text{sinc } x$, definida así:

$$\text{sinc } x = \frac{\text{sen } \pi x}{\pi x} = Sa(\pi x) \quad (1.6.6)$$

que se muestra en la Figura 1.6.6(b). Nótese que $\text{sinc } x$ es una versión comprimida de $Sa(x)$, con un factor de compresión de π .

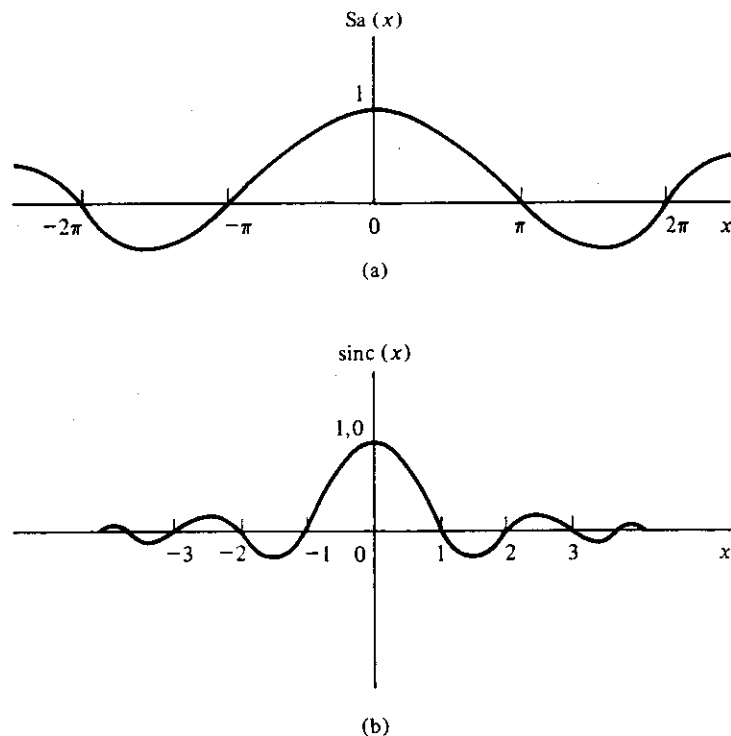


Figura 1.6.6. La función de muestreo.

1.6.4. La función impulso unidad

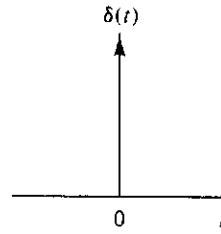
La señal impulso unidad $\delta(t)$ se denomina frecuentemente delta de Dirac o simplemente delta, y ocupa un lugar central en el análisis de señales. Hay muchos fenómenos físicos que se pueden modelar como funciones delta, como fuentes puntuales, cargas puntuales, cargas concentradas en estructuras, fuentes puntuales de tensión y de corriente que actúan durante intervalos muy cortos de tiempo. Matemáticamente, la función delta de Dirac se define así:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t) dt = x(0), \quad t_1 < 0 < t_2 \quad (1.6.7)$$

suponiendo que $x(t)$ sea continua en $t = 0$. La función $\delta(t)$ se representa gráficamente con una flecha en el origen, como muestra la Figura 1.6.7. Posee las siguientes propiedades:

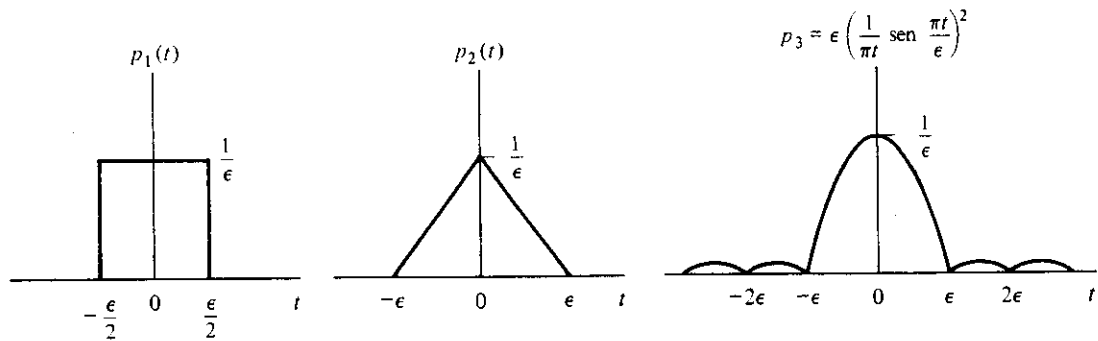
1. $\delta(0) \rightarrow \infty$
2. $\delta(t) = 0, t \neq 0$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$
4. $\delta(t)$ es una función par, es decir, $\delta(t) = \delta(-t)$

Tal como ha sido definida, la función δ no se ajusta a la definición habitual de función. Sin embargo, a veces es conveniente considerarla como el límite de alguna función conven-

Figura 1.6.7. Representación de la función impulso unidad $\delta(t)$.

cional cuando algún parámetro ϵ tiende a cero. La Figura 1.6.8 muestra varios ejemplos. Todas las funciones que se muestran en dicha figura presentan las mismas propiedades cuando ϵ tiende a cero:

1. El valor en $t = 0$ es muy grande y tiende a infinito cuando ϵ tiende a cero.
2. La duración es relativamente corta y tiende a cero cuando ϵ tiende a cero.
3. El área total encerrada bajo la función es constante e igual a 1.
4. Todas las funciones son pares.

Figura 1.6.8. Modelos de ingeniería de $\delta(t)$.

Ejemplo 1.6.4 Consideremos la función definida así:

$$p(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \left(\frac{1}{\pi t} \sin \frac{\pi t}{\epsilon} \right)^2$$

Esta función satisface todas las propiedades de la función delta, lo que se puede demostrar volviéndola a escribir así:

$$p(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\sin \pi t / \epsilon}{\pi t / \epsilon} \right)^2$$

de modo que:

1. $p(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1/\epsilon) = \infty$. Hemos usado el conocido límite $\lim_{\tau \rightarrow 0} (\sin \tau)/\tau = 1$.
2. Para valores de $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \left(\frac{1}{\pi t} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{\varepsilon} \right)^2 \\
 &= \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \right) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\pi t} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{\varepsilon} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

El segundo límite está acotado por 1, pero el primer límite tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Por lo tanto,

$$p(t) = 0, \quad t \neq 0$$

3. Para demostrar que el área encerrada bajo $p(t)$ es la unidad, basta ver que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi t/\varepsilon)}{\pi t/\varepsilon} \right)^2 dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(\tau)}{\tau^2} d\tau
 \end{aligned}$$

donde en el último paso se ha realizado la sustitución

$$\tau = \frac{\pi t}{\varepsilon}$$

Como (véase Apéndice B)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \tau}{\tau^2} d\tau = \pi$$

se desprende que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$$

4. Es claro que $p(t) = p(-t)$. Por lo tanto, $p(t)$ es una función par.

Hay tres importantes propiedades que se utilizan repetidamente al operar con funciones delta: la propiedad de desplazamiento, la propiedad de muestreo y la propiedad de escalado.

Propiedad de desplazamiento. La propiedad de desplazamiento se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} x(t_0), & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (1.6.8)$$

La expresión anterior se puede demostrar utilizando el cambio de variables $\tau = t - t_0$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta(t - t_0) dt &= \int_{t_1 - t_0}^{t_2 - t_0} x(\tau + t_0) \delta(\tau) d\tau \\
 &= x(t_0), \quad t_1 < t_0 < t_2
 \end{aligned}$$

aplicando la Ecuación (1.6.7). Nótese que el lado derecho de la Ecuación (1.6.8) se puede ver como una función de t_0 . Esta función es discontinua en $t_0 = t_1$ y en $t_0 = t_2$. De acuerdo con nuestra notación, el valor de la función en t_1 y en t_2 viene dado por

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t - t_0) dt = \frac{1}{2} x(t_0), \quad t_0 = t_1 \text{ o } t_0 = t_2 \quad (1.6.9)$$

La propiedad de desplazamiento se utiliza generalmente en lugar de la Ecuación (1.6.7) como definición de la función delta localizada en t_0 . En general, esta propiedad se puede expresar así:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau \quad (1.6.10)$$

lo que implica que la señal $x(t)$ se puede expresar como una suma continua de impulsos ponderados. Este resultado se puede expresar gráficamente si aproximamos $x(t)$ mediante una suma de impulsos rectangulares. Cada impulso tiene una anchura de Δ segundos y su altura es variable, como se muestra en la Figura 1.6.9. Es decir,

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \text{rect}((t - k\Delta)/\Delta)$$

que se puede escribir así:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \left[\frac{1}{\Delta} \text{rect}((t - k\Delta)/\Delta) \right] [k\Delta - (k-1)\Delta]$$

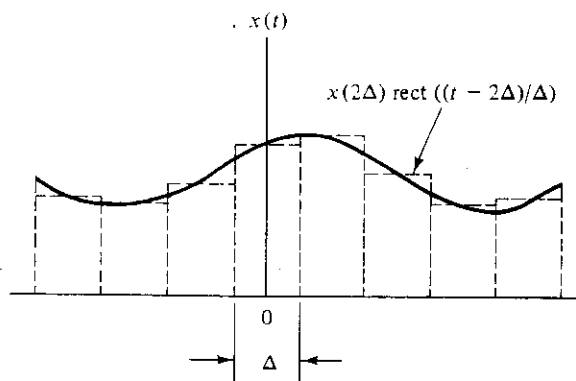


Figura 1.6.9. Aproximación a la señal $x(t)$.

Ahora cada término de la suma representa el área encerrada bajo el impulso k -ésimo de la aproximación $\hat{x}(t)$. Si ahora hacemos que $\Delta \rightarrow 0$ y sustituimos $k\Delta$ por τ , de forma que $k\Delta - (k-1)\Delta = d\tau$, la suma se transforma en una integral. Además, cuando $\Delta \rightarrow 0$, $1/\Delta \text{rect}((t - k\Delta)/\Delta)$ se aproxima a $\delta(t - \tau)$, con lo que se llega a la Ecuación (1.6.10). La representación de la Ecuación (1.6.10), junto con el principio de superposición se utilizará en el Capítulo 2 para estudiar el comportamiento de una clase especial e importante de sistemas: los sistemas lineales e invariantes.

Propiedad de muestreo. Si $x(t)$ es continua en t_0 , entonces

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \quad (1.6.11)$$

Gráficamente, esta propiedad se puede ilustrar aproximando la señal impulso mediante un pulso rectangular de anchura Δ y altura $1/\Delta$, como se muestra en la Figura 1.6.10, y haciendo que Δ tienda a cero con lo que se obtiene

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} x(t) \frac{1}{\Delta} \text{rect}((t - t_0)/\Delta) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

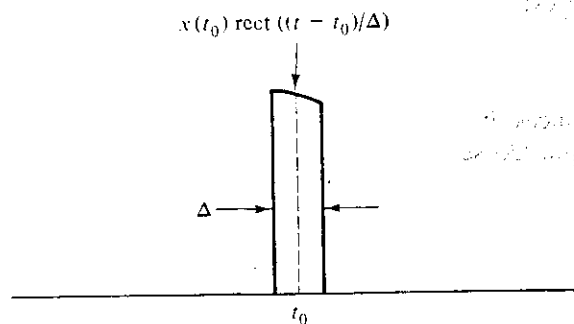


Figura 1.6.10. La propiedad de muestreo de la señal impulso.

Matemáticamente, dos funciones $f_1(\delta(t))$ y $f_2(\delta(t))$ son equivalentes en el intervalo (t_1, t_2) si para cualquier función continua $y(t)$,

$$\int_{t_1}^{t_2} y(t)f_1(\delta(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t)f_2(\delta(t)) dt$$

Por lo tanto, $x(t)\delta(t - t_0)$ y $x(t_0)\delta(t - t_0)$ son equivalentes, ya que

$$\int_{t_1}^{t_2} y(t)x(t)\delta(t - t_0) dt = y(t_0)x(t_0) = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x(t_0)\delta(t - t_0) dt$$

Nótese la diferencia entre la propiedad de desplazamiento y la propiedad de muestreo. El lado derecho de la Ecuación (1.6.8) es el valor de la función evaluado en un punto, mientras que el lado derecho de la Ecuación (1.6.11) es todavía una función delta con peso igual al valor de $x(t)$ evaluado en $t = t_0$.

Propiedad de escalado. La propiedad de escalado está dada por

$$\delta(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right) \quad (1.6.12)$$

Este resultado se puede interpretar considerando $\delta(t)$ como el límite de un pulso $p(t)$ de área unidad cuando algún parámetro ε tiende a cero. El pulso $p(at)$ es una versión comprimida (o expandida) de $p(t)$ si $a > 1$ (o $a < 1$), y su área es $1/|a|$ (nótese que el área es siempre positiva). Tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, el resultado es una función delta de

peso $1/|a|$. Efectuaremos la demostración considerando separadamente los casos $a > 0$ y $a < 0$. Para $a > 0$ tenemos que demostrar que

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta(at + b) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{a} x(t) \delta\left(t + \frac{b}{a}\right) dt, \quad t_1 < \frac{-b}{a} < t_2$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento al lado derecho obtenemos

$$\frac{1}{a} x\left(\frac{-b}{a}\right)$$

Para evaluar el lado izquierdo utilizamos la transformación de variables

$$\tau = at + b$$

Entonces $dt = (1/a) d\tau$ y el rango $t_1 < t < t_2$ se convierte en $at_1 + b < \tau < at_2 + b$. El lado izquierdo se convierte ahora en

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta(at + b) dt &= \int_{at_1 + b}^{at_2 + b} x\left(\frac{\tau - b}{a}\right) \delta(\tau) \frac{1}{a} d\tau \\ &= \frac{1}{a} x\left(\frac{-b}{a}\right) \end{aligned}$$

que coincide con el lado derecho.

Cuando $a < 0$ tenemos que demostrar que

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta(at + b) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{|a|} x(t) \delta\left(t + \frac{b}{a}\right) dt, \quad t_1 < \frac{-b}{a} < t_2$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento, evaluamos el lado derecho. El resultado es

$$\frac{1}{|a|} x\left(\frac{-b}{a}\right)$$

Para el lado izquierdo, utilizamos la transformación $\tau = at + b$ de forma que

$$dt = \frac{1}{a} d\tau = -\frac{1}{|a|} d\tau$$

y el rango de τ se transforma en $-|a|t_2 + b < \tau < -|a|t_1 + b$, resulta que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta(at + b) dt &= \int_{-|a|t_2 + b}^{-|a|t_1 + b} x\left(\frac{\tau - b}{a}\right) \delta(\tau) \frac{-1}{|a|} d\tau \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-|a|t_2 + b}^{-|a|t_1 + b} x\left(\frac{\tau - b}{a}\right) \delta(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{|a|} x\left(\frac{-b}{a}\right) \end{aligned}$$

Nótese que antes de utilizar la propiedad de desplazamiento en el último paso, hemos intercambiado los límites de integración y hemos cambiado el signo de la integral, ya que

$$-|a|t_2 + b < -|a|t_1 + b$$

Ejemplo 1.6.5 Consideremos el pulso gaussiano

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} \exp\left[\frac{-t^2}{2\epsilon^2}\right]$$

El área bajo este pulso es siempre 1, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} \exp\left[\frac{-t^2}{2\epsilon^2}\right] dt = 1$$

Se puede demostrar que $p(t)$ se aproxima a $\delta(t)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ (véase Problema 1.19). Sea a cualquier constante mayor que 1. $p(at)$ es entonces una versión comprimida de $p(t)$. Se puede demostrar que el área bajo $p(at)$ es $1/a$, y a medida que ϵ se aproxima a cero, $p(at)$ se aproxima a $\delta(at)$.

Ejemplo 1.6.6 Supongamos que deseamos evaluar las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^1 (t + t^2)\delta(t - 3) dt$

b) $\int_{-2}^4 (t + t^2)\delta(t - 3) dt$

c) $\int_0^3 \exp[t - 2]\delta(2t - 4) dt$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau$

a) Utilizando la propiedad de desplazamiento obtenemos

$$\int_{-2}^1 (t + t^2)\delta(t - 3) dt = 0$$

ya que $t = 3$ no está en el intervalo $-2 < t < 1$.

b) Utilizando la propiedad de desplazamiento obtenemos

$$\int_{-2}^4 (t + t^2)\delta(t - 3) dt = 3 + 3^2 = 12$$

ya que $t = 3$ está en el intervalo $-2 < t < 4$.

- c) Utilizando la propiedad de escalado y después la propiedad de desplazamiento obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^3 \exp[t-2]\delta(2t-4)dt &= \int_0^3 \exp[t-2] \frac{1}{2} \delta(t-2)dt \\ &= \frac{1}{2} \exp[0] = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- d) Consideremos los dos casos siguientes:

Caso 1: $t < 0$

En este caso el punto $\tau = 0$ no está en el intervalo $-\infty < \tau < t$, y el resultado de la integral es cero.

Caso 2: $t > 0$

En este caso, $\tau = 0$ está en el intervalo $-\infty < \tau < t$, y el valor de la integral es 1. En resumen, obtenemos

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Pero esto es por definición la función escalón unidad. Por lo tanto, las funciones $\delta(t)$ y $u(t)$ están relacionadas por las operaciones de derivación e integración. Concretamente:

$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t) \quad (1.6.13)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \quad (1.6.14)$$

El impulso unidad es un representante de una clase de funciones denominadas funciones de singularidad. Nótese que la definición de $\delta(t)$ en la Ecuación (1.6.7) no se corresponde con la definición de una función ordinaria. Adquiere significado sólo si $\delta(t)$ se considera un funcional, es decir, como el proceso de asignar el valor $x(0)$ a la señal $x(t)$. La notación con la integral es simplemente una forma adecuada de describir las propiedades de este funcional, como las de linealidad, desplazamiento y escalado. Consideraremos a continuación cómo representar las derivadas de la función impulso.

1.6.5. Derivadas de la función impulso

La primera derivada de la función impulso, o doblete unidad, que denotaremos por $\delta'(t)$, se define así:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta'(t-t_0)dt = -x'(t_0), \quad t_1 < t_0 < t_2 \quad (1.6.15)$$

suponiendo que existe la derivada de $x(t)$ en $t = t_0$, $x'(t_0)$. Este resultado se puede demostrar utilizando integración por partes,

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta'(t - t_0) dt &= \int_{t_1}^{t_2} x(t) d[\delta(t - t_0)] \\ &= x(t) \delta(t - t_0) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} x'(t) \delta(t - t_0) dt \\ &= 0 - 0 - x'(t_0)\end{aligned}$$

ya que $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$. Se puede demostrar que $\delta'(t)$ posee al menos las siguientes propiedades:

1. $x(t) \delta'(t - t_0) = x(t_0) \delta'(t - t_0) - x'(t_0) \delta(t - t_0)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\tau - t_0) d\tau = \delta(t - t_0)$
3. $\delta'(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta'\left(t + \frac{b}{a}\right)$

Se pueden definir derivadas de orden superior de $\delta(t)$ extendiendo la definición de $\delta'(t)$. Por ejemplo, la derivada de orden n de $\delta(t)$ se define así:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta^{(n)}(t - t_0) dt = (-1)^n x^{(n)}(t_0), \quad t_1 < t_0 < t_2 \quad (1.6.16)$$

suponiendo que la derivada n -ésima exista en $t = t_0$. La representación gráfica de $\delta'(t)$ se muestra en la Figura 1.6.11.

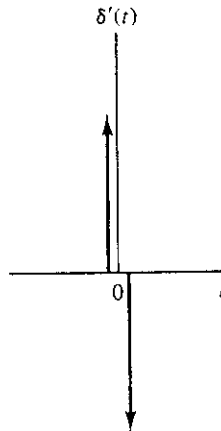


Figura 1.6.11. Representación de $\delta'(t)$.

Ejemplo 1.6.7 La intensidad que circula por una bobina de 1 mH es $i(t) = 10 \exp[-2t]u(t) - \delta(t)$ amperios. El voltaje que se produce entre los extremos de la bobina viene dado por

$$\begin{aligned} v(t) &= 10^{-3} \frac{d}{dt} [10 \exp[-2t]u(t) - \delta(t)] \\ &= -2 \times 10^{-2} \exp[-2t]u(t) + 10^{-2} \exp[-2t]\delta(t) - 10^{-2}\delta'(t) \text{ voltios} \\ &= -2 \times 10^{-2} \exp[-2t]u(t) + 10^{-2}\delta(t) - 10^{-2}\delta'(t) \text{ voltios} \end{aligned}$$

en donde el último paso se desprende de la Ecuación (1.6.11).

Las Figuras 1.6.12(a) y (b) muestran respectivamente el comportamiento de la corriente en la bobina $i(t)$ y la tensión en sus extremos $v(t)$.

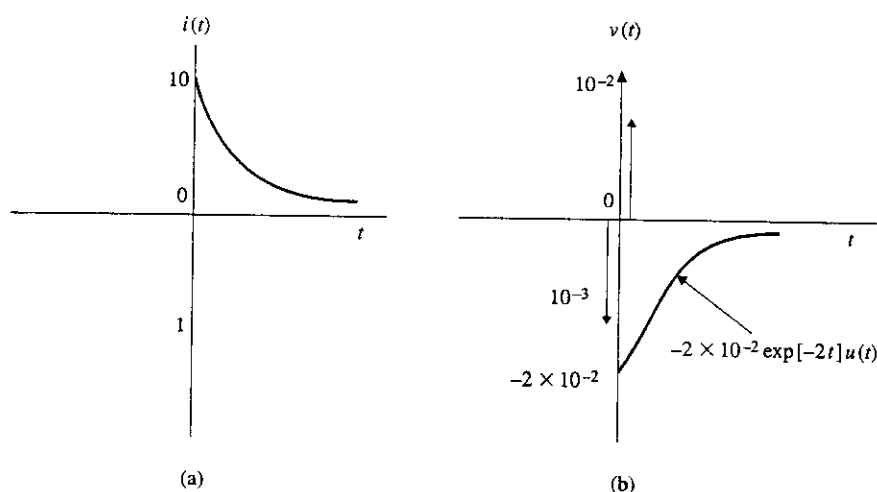


Figura 1.6.12. $v(t)$ y $dv(t)/dt$ en el Ejemplo 1.6.7.

Nótese que la derivada de $x(t)u(t)$ se obtiene mediante la regla del producto de la diferenciación. Es decir,

$$\frac{d}{dt} [x(t)u(t)] = x(t)\delta(t) + x'(t)u(t)$$

mientras que la derivada de $x(t)\delta(t)$ es

$$\frac{d}{dt} [x(t)\delta(t)] = \frac{d}{dt} [x(0)\delta(t)]$$

Este resultado no se puede obtener por diferenciación directa del producto, ya que $\delta(t)$ se interpreta como un funcional en vez de como una función ordinaria.

Ejemplo 1.6.8 Evaluaremos la siguiente integral:

$$(a) \int_{-4}^4 (t-2)^2 \delta\left(-\frac{1}{3}t + \frac{1}{2}\right) dt$$

$$(b) \int_{-4}^1 t \exp[-2t] \delta''(t-1) dt$$

Para el caso (a), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 (t-2)^2 \delta'\left(-\frac{1}{3}t + \frac{1}{2}\right) dt &= \int_{-4}^4 3(t-2)^2 \delta'\left(t - \frac{3}{2}\right) dt \\ &= \int_{-4}^4 3(t-2)^2 \delta'\left(t - \frac{3}{2}\right) dt \\ &= \int_{-4}^4 \left[\frac{3}{4} \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) + 9\delta\left(t - \frac{3}{2}\right) \right] dt = \frac{3}{4} \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) + 9 \end{aligned}$$

Y para el caso (b),

$$\int_{-4}^1 t \exp[-2t] \delta''(t-1) dt = (4t-4) \exp[-2t] \Big|_{t=1} = 0$$

1.7. OTROS TIPOS DE SEÑALES

Existen otros tipos de señales con las que los ingenieros eléctricos y electrónicos trabajan muy frecuentemente. Hablando en sentido general, las señales se pueden clasificar en señales aleatorias y no aleatorias, o deterministas. El estudio de las señales aleatorias queda fuera del alcance de este libro, pero algunas de las ideas y de las técnicas que presentaremos son básicas para abordar temas más avanzados. Las señales aleatorias no presentan un comportamiento totalmente predecible, a diferencia de las señales deterministas. La voz, la música, la salida de un computador, la televisión, o la señal radar no son sinusoides, ni formas de onda periódicas puras. Si lo fueran, conociendo un período de la señal podríamos predecir el aspecto que tendría la señal en el futuro. Cualquier señal capaz de transportar información debe ser aleatoria en algún sentido. En otras palabras, para poder llevar información, la señal debe cambiar de alguna manera, y en forma no determinista.

Las señales se pueden clasificar también en señales analógicas y digitales. En ciencia e ingeniería, la palabra «analógica» significa que se comporta de forma similar, pero en un dominio diferente. Por ejemplo, la tensión eléctrica en los terminales de salida de un amplificador estéreo varía exactamente de la misma manera que el sonido que activó el micrófono que alimenta al amplificador. En otras palabras, la tensión eléctrica $v(t)$ en cada instante de tiempo es proporcional (análoga) a la presión del aire que varía rápidamente con el tiempo. De forma sencilla, una señal analógica es una magnitud física que varía con el tiempo, generalmente de forma suave o continua.

Los valores que toma una señal en tiempo discreto pueden ser continuos o discretos. Si una señal en tiempo discreto puede tomar todos los valores posibles dentro de un rango finito o infinito, se dice que es una señal en tiempo discreto con amplitud continua. Por el contrario, si la señal en tiempo discreto sólo toma valores pertenecientes a un conjunto finito de valores posibles, se dice que es una señal en tiempo discreto con amplitud discreta o simplemente una señal digital. Como ejemplos de señales digitales tenemos las imágenes

digitalizadas, las entradas a un computador y las señales asociadas a fuentes digitales de información.

La mayor parte de las señales que encontramos en la naturaleza son señales analógicas. El motivo básico es que los sistemas físicos no pueden responder instantáneamente a cambios en sus entradas. Es más, en muchos casos la señal no está disponible en forma eléctrica, con lo que se requiere el uso de un transductor (mecánico, eléctrico, térmico, óptico, etc.), para proporcionar una señal eléctrica que represente a la señal que produce el sistema. Generalmente, los transductores no pueden responder instantáneamente a los cambios y tienden a suavizar las señales.

El tratamiento digital de la señal se ha desarrollado rápidamente en las dos pasadas décadas, debido principalmente a los significativos avances que se han producido en la tecnología de computadores digitales y en la fabricación de circuitos integrados. Para poder procesar las señales digitalmente, éstas deben estar en formato digital (es decir, ser discretas en tiempo y discretas en amplitud). Si la señal que se va a procesar está en formato analógico, se debe convertir previamente en una señal en tiempo discreto mediante muestreo en instantes concretos de tiempo. La señal en tiempo discreto se transforma posteriormente en una señal digital mediante un proceso denominado cuantificación.

La cuantificación es el proceso de convertir una señal de amplitud continua en una señal de amplitud discreta. Básicamente, es un procedimiento de aproximación. El proceso completo se denomina conversión analógico-digital (A/D), y el dispositivo correspondiente se denomina conversor A/D.

1.8. RESUMEN

- Las señales se pueden clasificar en señales en tiempo continuo y señales en tiempo discreto.
- Las señales en tiempo continuo que satisfacen la condición $x(t) = x(t + T)$ se denominan periódicas de período T .
- La frecuencia angular fundamental de una señal periódica se relaciona con el período fundamental T mediante la expresión

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- La exponencial periódica $x(t) = \exp[j\omega_0 t]$ es periódica de período $T = 2\pi/\omega_0$ para todo ω_0 .
- Las exponenciales en tiempo continuo armónicamente relacionadas

$$x_k(t) = \exp[jk\omega_0 t]$$

son periódicas, con período común $T = 2\pi/\omega_0$.

- La energía E de una señal $x(t)$ se define

$$E = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |x(t)|^2 dt$$

- La potencia media de una señal $x(t)$ se define

$$P = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |x(t)|^2 dt$$

- La señal $x(t)$ es de energía finita si $0 < E < \infty$.
- La señal $x(t)$ es de potencia media finita si $0 < P < \infty$.
- La señal $x(t - t_0)$ es una versión desplazada en el tiempo de $x(t)$. Si $t_0 > 0$, la señal está retrasada t_0 segundos. Si $t_0 < 0$, entonces $x(t - t_0)$ es una réplica de $x(t)$ adelantada en el tiempo.
- La señal $x(-t)$ se obtiene por reflexión de $x(t)$ sobre el eje $t = 0$.
- La señal $x(\alpha t)$ es una versión escalada de $x(t)$. Si $\alpha > 1$, $x(\alpha t)$ es una versión comprimida de $x(t)$, mientras que si $0 < \alpha < 1$, $x(\alpha t)$ es una versión expandida de $x(t)$.
- La señal $x(t)$ tiene simetría par si

$$x(t) = x(-t)$$

- La señal $x(t)$ tiene simetría impar si

$$x(t) = -x(-t)$$

- Las funciones impulso unidad, escalón unidad y rampa unidad están relacionadas por

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

- La propiedad de desplazamiento de la función δ es

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} x(t_0), & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

- La propiedad de muestreo de la función δ es

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

1.9. LISTA DE TÉRMINOS IMPORTANTES

Función impulso unidad	Pulso rectangular
Función de muestreo	Señales aperiódicas
Función rampa unidad	Señales elementales
Función escalón unidad	Señales de energía finita
Función signo	Señales periódicas
Función sinc	Señales de potencia media finita
Operación de desplazamiento	Señales en tiempo continuo
Operación de escalado	Señales en tiempo discreto
Operación de reflexión	

1.10. PROBLEMAS

1.1. Encontrar el período fundamental T de cada una de las siguientes señales:

$$\cos(\pi t), \sin(2\pi t), \cos(3\pi t), \sin(4\pi t), \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right),$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right), \sin\left(\frac{4\pi}{3}t\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right), \cos\left(\frac{3\pi}{5}t\right)$$

1.2. Representar aproximadamente las siguientes señales:

$$(a) \quad x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}t + 20^\circ\right)$$

$$(b) \quad x(t) = t + e^{3t}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$(c) \quad x(t) = \begin{cases} t + 2 & t \leq -2 \\ 0 & -2 \leq t \leq 2 \\ t - 2 & 2 \leq t \end{cases}$$

$$(d) \quad x(t) = 2\exp[-t], \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{y} \quad x(t+1) = x(t) \quad \text{para todo } t$$

1.3. Demostrar que si $x(t)$ es periódica de período T , es también periódica de período nT con $n = 2, 3, \dots$

1.4. Demostrar que si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son periódicas de período T , entonces $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ (con a y b constantes) es también periódica de período T .

1.5. Utilizar la relación de Euler, $\exp[j\omega t] = \cos \omega t + j \sin \omega t$ para demostrar que $\exp[j\omega t]$ es periódica de período $T = 2\pi/\omega$.

1.6. ¿Son periódicas las siguientes señales? En caso afirmativo, encontrar sus períodos

$$(a) \quad x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 2\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$$

$$(b) \quad x(t) = \exp\left[j\frac{7\pi}{6}t\right] + \exp\left[j\frac{5\pi}{6}t\right]$$

$$(c) \quad x(t) = \exp\left[j\frac{7\pi}{6}t\right] + \exp\left[\frac{5}{6}t\right]$$

$$(d) \quad x(t) = \exp\left[j\frac{5\pi}{6}t\right] + \exp\left[\frac{\pi}{6}t\right]$$

$$(e) \quad x(t) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{8}t\right) + \cos\left(\frac{3}{4}t\right)$$

- 1.7. Si $x(t)$ es una señal periódica de período T , demostrar que $x(at)$, $a > 0$, es una señal periódica de período T/a , y que $x(t/b)$, $b > 0$, es también una señal periódica de período bT . Verificar estos resultados para la señal $x(t) = \sin t$, $a = b = 2$.
- 1.8. Determinar si las siguientes señales son de energía finita, de potencia media finita o ninguna de las dos cosas. Justificar las respuestas.
- (a) $x(t) = A \sin t, \quad -\infty < t < \infty$
 - (b) $x(t) = A[u(t - a) - u(t + a)]$
 - (c) $x(t) = r(t) - r(t - 1)$
 - (d) $x(t) = \exp[-at]u(t), \quad a > 0$
 - (e) $x(t) = tu(t)$
 - (f) $x(t) = u(t)$
 - (g) $x(t) = A \exp[bt], \quad b > 0$

- 1.9. Repetir el Problema 1.8 para las señales siguientes:

- (a) $x(t) = t \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right)$
- (b) $x(t) = \exp[-2|t|] \sin(\pi t)$
- (c) $x(t) = \exp[4|t|]$
- (d) $x(t) = \exp\left[j \frac{5\pi}{6} t\right]$
- (e) $x(t) = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{8} t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3} t\right)$
- (f) $x(t) = 1, \quad t < 0$
 $\exp[3t], \quad 0 \leq t$

- 1.10. Demostrar que si $x(t)$ es periódica de período T , entonces

$$\left| \int_0^T x(t) dt \right| \leq \sqrt{PT}$$

siendo P la potencia media de la señal.

- 1.11. Sea

$$x(t) = \begin{cases} -t + 1, & -1 \leq t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

- (a) Dibujar $x(t)$.
- (b) Dibujar $x(t - 2)$, $x(t + 3)$, $x(-3t - 2)$, y $x\left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{2}\right)$. Encontrar la expresión matemática de esas funciones.

1.12. Repetir el Problema 1.11 con las funciones

$$x(t) = \begin{cases} 2t + 2, & -1 \leq t < 0 \\ 2t - 2, & 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

1.13. Dibujar las siguientes señales

(a) $x_1(t) = u(t) + 5u(t-1) - 2u(t-2)$

(b) $x_2(t) = r(t) - r(t-1) - u(t-2)$

(c) $x_3(t) = \exp[-t]u(t)$

(d) $x_4(t) = 2u(t) + \delta(t-1)$

(e) $x_5(t) = u(t)u(t-a), \quad a > 0$

(f) $x_6(t) = u(t)u(a-t), \quad a > 0$

(g) $x_7(t) = u(\cos t)$

(h) $x_1(t)x_2\left(t + \frac{1}{2}\right)$

(i) $x_1\left(-\frac{t}{3} + \frac{1}{2}\right)x_3(t-2)$

(j) $x_2(t)x_3(2-t)$

1.14. (a) Demostrar que

$$x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

es una señal par.

(b) Demostrar que

$$x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

es una señal impar.

1.15. Consideremos el sencillo transmisor de FM estéreo que se muestra en la Figura P1.15.

(a) Dibujar las señales $L + R$ y $L - R$.

(b) Si se suman las salidas de los dos sumadores, dibujar la forma de onda resultante.

(c) Si la señal $L - R$ se invierte y se suma a la señal $L + R$, dibujar la forma de onda resultante.

1.16. Para cada una de las señales que se muestran en la Figura P1.16, escribir su expresión utilizando las funciones básicas escalón unidad y rampa unidad.

1.17. Si la duración de $x(t)$ se define como el tiempo que tarda la señal en descender a $1/e$ de su valor en el origen, encontrar la duración de las señales siguientes:

(a) $x_1(t) = A \exp[-t/T]u(t)$

(b) $x_2(t) = x_1(3t)$

(c) $x_3(t) = x_1(t/2)$

(d) $x_4(t) = 2x_1(t)$

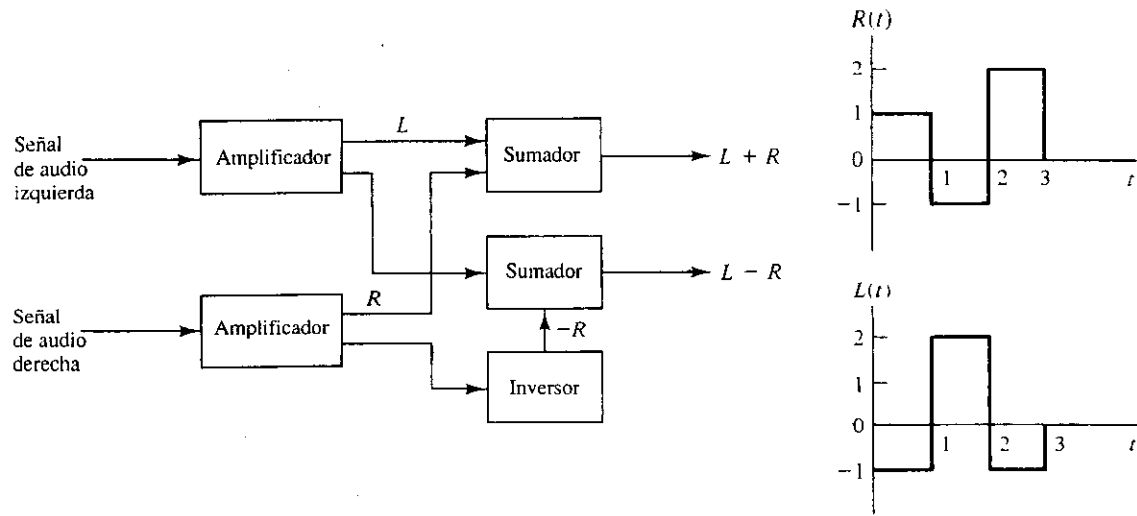


Figura P1.15.

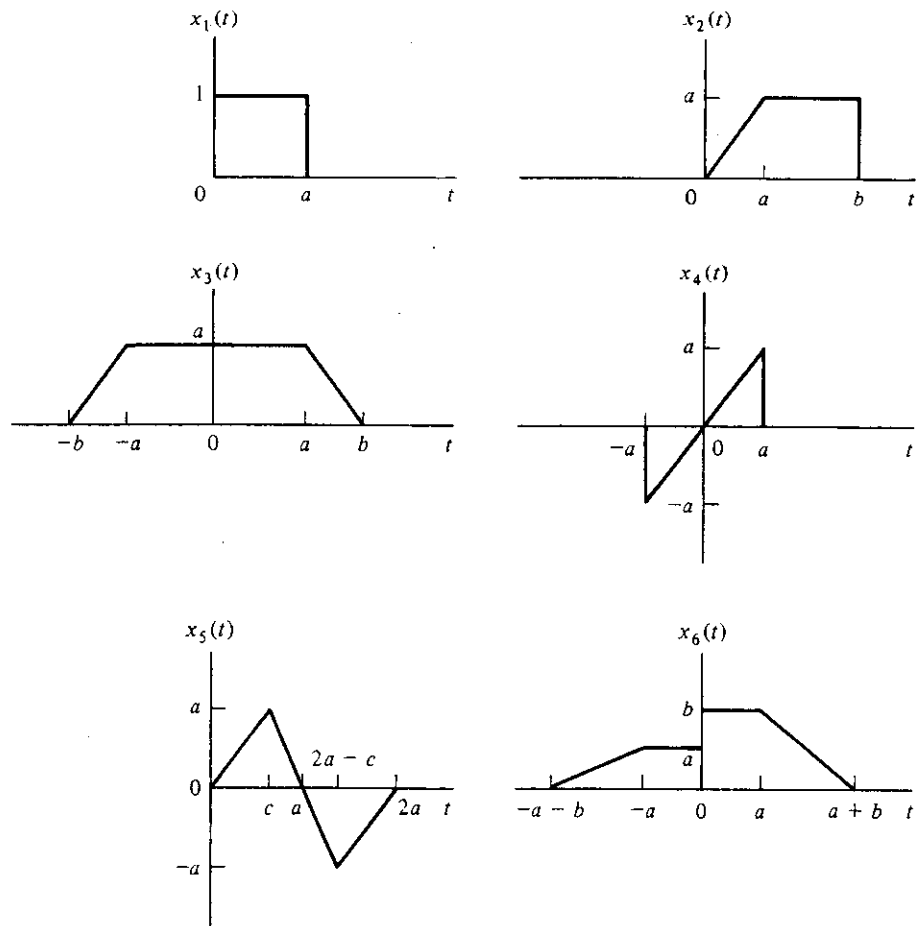


Figura P1.16.

- 1.18. La señal $x(t) = \text{rect}(t/2)$ se transmite por la atmósfera y se refleja en diferentes objetos colocados a diferentes distancias. La señal recibida es

$$y(t) = x(t) + 0,5x\left(t - \frac{T}{2}\right) + 0,25x(t - T), \quad T \gg 2$$

La señal $y(t)$ se procesa como muestra la Figura P1.18.

- (a) Dibujar $y(t)$ para $T = 10$.
 (b) Dibujar $z(t)$ para $T = 10$.

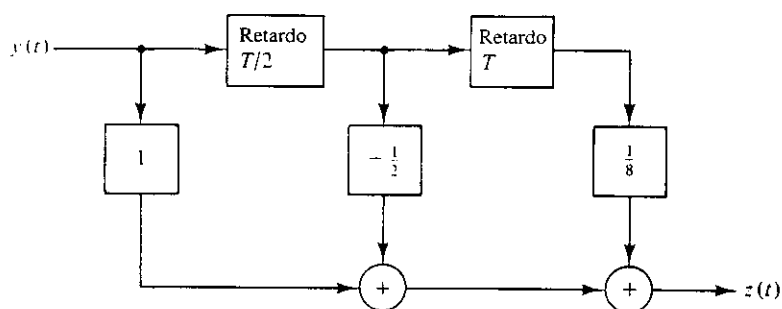


Figura P1.18.

- 1.19. Comprobar si cada una de las señales siguientes se puede emplear como modelo matemático de una función delta:

- (a) $p_1(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon\pi \cosh(t/\varepsilon)}$
 (b) $p_2(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon^2}} \exp\left[\frac{-t^2}{2\varepsilon^2}\right]$
 (c) $p_3(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon}{4\pi^2 t^2 + \varepsilon^2}$
 (d) $p_4(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2}$
 (e) $p_5(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \exp[-\varepsilon|t|]$
 (f) $p_6(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \varepsilon t}{t}$

- 1.20. Evaluar las siguientes integrales:

- (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{3}t - \frac{3}{2}\right) \delta(t-1) dt$

- (b) $\int_{-\infty}^{\infty} (t-1)\delta\left(\frac{2}{3}t - \frac{3}{2}\right)dt$
- (c) $\int_{-3}^{-2} \left[\exp(-t+1) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \right] \delta\left(t - \frac{3}{2}\right)dt$
- (d) $\int_{-3}^2 \left[\exp(-t+1) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \right] \delta\left(t - \frac{3}{2}\right)dt$
- (e) $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-5t+1]\delta'(t-5)dt$

- 1.21. La probabilidad de que una variable aleatoria x valga menos que α se obtiene integrando la función densidad de probabilidad $f(x)$ con lo que se obtiene

$$P(x \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha+} f(x) dx$$

Dada

$$f(x) = 0,2\delta(x+2) + 0,3\delta(x) + 0,2\delta(x-1) + 0,1[u(x-3) - u(x-6)]$$

calcular

- (a) $P(x \leq -3)$
- (b) $P(x \leq 1,5)$
- (c) $P(x \leq 4)$
- (d) $P(x \leq 6)$

- 1.22. La velocidad de 1 g de masa es

$$v(t) = \exp[-(t+1)]u(t+1) + \delta(t-1)$$

- (a) Dibujar $v(t)$
- (b) Evaluar la fuerza

$$f(t) = m \frac{d}{dt} [v(t)]$$

- (c) Si hay un muelle conectado a la masa con constante $k = 1 \text{ N/m}$, encontrar la fuerza

$$f_k(t) = k \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

- 1.23. Dibujar las derivadas segundas de las siguientes señales

- (a) $x(t) = u(t) + 5u(t-1) - 2u(t-2)$
- (b) $x(t) = r(t) - r(t-1) + 2u(t-2)$
- (c) $x(t) = \begin{cases} 2t+2 & -1 \leq t < 0 \\ 2t-2 & 0 \leq t < 1 \end{cases}$

1.11. PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

1.24. La integral

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt$$

se puede aproximar mediante la suma de bandas rectangulares de ancho Δt , como se indica a continuación:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \approx \sum_{n=1}^N x(n\Delta t)y(n\Delta t)\Delta t$$

En la expresión anterior, $\Delta t = (t_2 - t_1)/N$. Escribir un programa para verificar que

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon^2}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\epsilon^2}\right]$$

se puede utilizar como modelo matemático de la función delta, aproximando las siguientes integrales por la suma:

$$(a) \int_{-1}^1 (t+1) \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon^2}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\epsilon^2}\right] dt$$

$$(b) \int_{-2}^1 (t+1) \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon^2}} \exp\left[-\frac{(t+1)^2}{2\epsilon^2}\right] dt$$

$$(c) \int_{-1}^2 (t+1) \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon^2}} \exp\left[-\frac{(t-1)^2}{2\epsilon^2}\right] dt$$

1.25. Repetir el Problema 1.24 para las siguientes integrales:

$$(a) \int_{-1}^1 \exp[-t] \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + 4\pi^2 t^2} dt$$

$$(b) \int_{-2}^1 \exp[-t] \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + 4\pi^2 (t+1)^2} dt$$

$$(c) \int_{-1}^2 \exp[-t] \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + 4\pi^2 (t-1)^2} dt$$

Sistemas en tiempo continuo

2.1. INTRODUCCIÓN

Una característica de casi cualquier sistema físico es su capacidad de aceptar entradas como tensión, corrientes, fuerza, presión, desplazamiento, etc., y producir una salida en respuesta a esa entrada. Por ejemplo, un receptor radar es un sistema electrónico cuya entrada es la reflexión de una señal electromagnética en un blanco, y cuya salida es una señal de vídeo que se muestra en la pantalla del radar. Otro ejemplo puede ser un robot, que es un sistema cuya entrada es una señal eléctrica de control y cuya salida es un determinado movimiento o una determinada acción realizada por el robot. Un tercer ejemplo es un filtro, cuya entrada es una señal distorsionada por ruido e interferencias, y cuya salida es la señal deseada. En pocas palabras, un sistema se puede ver como un proceso que transforma señales de entrada en otras señales de salida.

Nuestro interés se centrará tanto en sistemas en tiempo continuo como en sistemas en tiempo discreto. Un sistema en tiempo continuo es un sistema en el que señales de entrada en tiempo continuo se transforman en señales de salida en tiempo continuo. Un sistema de este tipo se representa gráficamente como muestra la Figura 2.1.1(a), donde $x(t)$ es la entrada e $y(t)$ es la salida. Un sistema en tiempo discreto es un sistema que transforma entradas en tiempo discreto en salidas en tiempo discreto [véase Figura 2.1.1(b)]. Este capítulo considera los sistemas en tiempo continuo, y el Capítulo 6 considerará los sistemas en tiempo discreto.

Para estudiar el comportamiento de los sistemas se modela matemáticamente cada uno de sus elementos y después se considera la interconexión entre dichos elementos. El

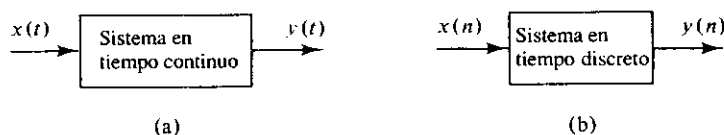


Figura 2.1.1. Ejemplos de sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto.

resultado se puede expresar matemáticamente en el dominio del tiempo, como en este capítulo, o en el dominio de la frecuencia, como veremos en los Capítulos 3 y 4.

En este capítulo demostraremos que el análisis de sistemas lineales se puede reducir al estudio de la respuesta del sistema a ciertas señales básicas de entrada.

2.2. CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO

En esta sección pretendemos profundizar en el concepto de sistema presentando una clasificación atendiendo a la interacción del sistema con la señal de entrada. Esta interacción, que define el modelo de sistema, puede ser lineal o no lineal, variante con el tiempo o invariante con el tiempo, con memoria o sin memoria, causal o no causal, estable o inestable, y determinista o no determinista. La mayor parte de las veces, nuestro interés estará centrado en sistemas lineales, invariantes y deterministas. En esta sección examinaremos brevemente las propiedades de cada una de esas clases.

2.2.1. Sistemas lineales y no lineales

Cuando un sistema es lineal se puede aplicar el principio de superposición. Este hecho tan importante ha sido la causa de que se hayan desarrollado tanto las técnicas de análisis de sistemas lineales. El principio de superposición establece simplemente que la respuesta de un sistema a una suma de señales de entrada es la suma de las respuestas del sistema a cada señal de entrada por separado. Matemáticamente, el principio de superposición se puede enunciar como sigue: sea $y_1(t)$ la respuesta de un sistema a la entrada $x_1(t)$, e $y_2(t)$ la respuesta correspondiente a la entrada $x_2(t)$. El sistema es lineal (es decir, sigue el principio de superposición) si

1. La respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$, y
2. La respuesta a $\alpha x_1(t)$ es $\alpha y_1(t)$, siendo α una constante arbitraria.

La primera propiedad se denomina propiedad de aditividad, y la segunda, propiedad de homogeneidad. Estas dos propiedades que definen un sistema lineal se pueden combinar en una sola

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad (2.2.1)$$

en donde la notación $x(t) \rightarrow y(t)$ representa la relación entrada/salida del sistema en tiempo continuo. Se dice que un sistema es no lineal si la relación (2.2.1) no es válida para al menos un conjunto de $x_1(t)$, $x_2(t)$, α y β .

Ejemplo 2.2.1

Consideremos el divisor de tensión que se muestra en la Figura 2.2.1 con $R_1 = R_2$. Para cualquier entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se trata de un sistema lineal. La relación entrada/salida se puede escribir explícitamente

$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} x(t) = \frac{1}{2} x(t)$$

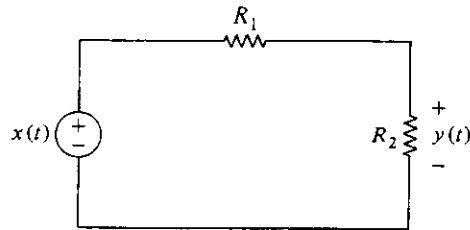


Figura 2.2.1. El sistema del Ejemplo 2.2.1.

es decir, la transformación consiste únicamente en multiplicar por una constante. Para demostrar que el sistema es realmente lineal, debemos demostrar que satisface la Ecuación (2.2.1). Consideremos la entrada $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$. La correspondiente salida es

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} x(t) \\ &= \frac{1}{2} [ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= a \frac{1}{2} x_1(t) + b \frac{1}{2} x_2(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

en donde

$$y_1(t) = \frac{1}{2} x_1(t) \quad y \quad y_2(t) = \frac{1}{2} x_2(t)$$

Por otra parte, si R_1 fuera una resistencia dependiente de la tensión como $R_1 = R_2 x(t)$ el sistema sería no lineal. En este caso, la relación entrada/salida se puede escribir así

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{R_2}{R_2 x(t) + R_2} x(t) \\ &= \frac{x(t)}{x(t) + 1} \end{aligned}$$

Para una entrada de la forma

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

la salida sería

$$y(t) = \frac{ax_1(t) + bx_2(t)}{ax_1(t) + bx_2(t) + 1}$$

El sistema en este caso es no lineal ya que

$$\frac{ax_1(t) + bx_2(t)}{ax_1(t) + bx_2(t) + 1} \neq a \frac{x_1(t)}{x_1(t) + 1} + b \frac{x_2(t)}{x_2(t) + 1}$$

para determinados valores de $x_1(t)$, $x_2(t)$, a , y b [por ejemplo, $x_1(t) = x_2(t)$, y $a = 1$, $b = 2$].

Ejemplo 2.2.2 Supongamos que deseamos determinar cuál de los siguientes sistemas es lineal:

$$(a) \quad y(t) = K \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.2.2)$$

$$(b) \quad y(t) = \exp [x(t)] \quad (2.2.3)$$

En el caso (a), consideremos la entrada

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (2.2.4)$$

La correspondiente salida es

$$y(t) = K \frac{d}{dt} [ax_1(t) + bx_2(t)]$$

que se puede escribir así

$$\begin{aligned} y(t) &= Ka \frac{d}{dt} x_1(t) + Kb \frac{d}{dt} x_2(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

en donde

$$y_1(t) = K \frac{d}{dt} x_1(t)$$

y

$$y_2(t) = K \frac{d}{dt} x_2(t)$$

por tanto, el sistema descrito por la Ecuación (2.2.2) es lineal.

Comparando la Ecuación (2.2.2) con

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

podemos concluir que una bobina ideal con entrada $i(t)$ (corriente que circula por la bobina) y salida $v(t)$ (tensión en los extremos de la bobina) es un sistema (elemento) lineal. De forma análoga, se puede demostrar que un sistema que realiza la operación de integración es lineal [véase Problema 2.1(f)]. Por tanto, un condensador ideal es también un sistema (elemento) lineal.

Para el Apartado (b), investigaremos la respuesta al sistema a la entrada descrita en la Ecuación (2.2.4):

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp [ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= \exp [ax_1(t)] \exp [bx_2(t)] \\ &\neq ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema caracterizado por la Ecuación (2.2.3) es no lineal.

Ejemplo 2.2.3

Consideremos el circuito RL que se muestra en la Figura 2.2.2. Este circuito se puede ver como un sistema en tiempo continuo cuya entrada $x(t)$ es igual a la fuente de tensión $e(t)$ y cuya salida $y(t)$ es igual a la corriente en la bobina. Supongamos que en el instante t_0 , $i_L(t_0) = y(t_0) = y_0$.

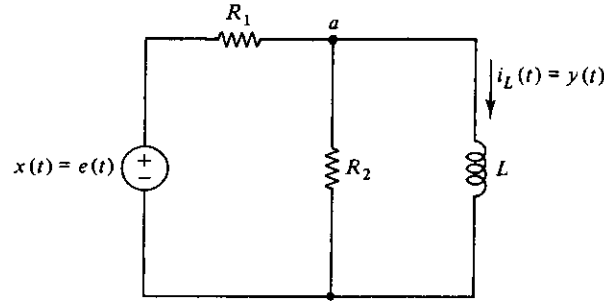


Figura 2.2.2. El circuito RL del Ejemplo 2.2.3.

Aplicando la ley de Kirchhoff de corrientes al nodo a , obtenemos

$$\frac{v_a(t) - e(t)}{R_1} + \frac{v_a(t)}{R_2} + i_L(t) = 0$$

Como

$$v_a(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

se desprende que

$$L \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \frac{e(t)}{R_1}$$

de modo que

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L(t) = \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} e(t)$$

o

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} y(t) = \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} x(t) \quad (2.2.5)$$

La ecuación diferencial (2.2.5) es la ecuación diferencial de entrada/salida que describe el comportamiento del sistema. Para calcular una expresión explícita de $y(t)$ en función de $x(t)$, debemos resolver dicha ecuación diferencial para una entrada arbitraria $x(t)$ aplicada para $t \geq t_0$. La solución completa es de la forma

$$y(t) = y(t_0) \exp \left[-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} (t - t_0) \right] + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \int_{t_0}^t \exp \left[-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} (t - \tau) \right] x(\tau) d\tau; \quad t \geq t_0 \quad (2.2.6)$$

De acuerdo con la Ecuación (2.2.1), este sistema es no lineal, a menos que $y(t_0) = 0$. Para demostrarlo, consideremos la entrada $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$. La salida correspondiente es

$$\begin{aligned} y(t) = & y(t_0) \exp \left[-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} (t - t_0) \right] \\ & + \frac{\alpha R_2}{L(R_1 + R_2)} \int_{t_0}^t \exp \left[-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} (t - \tau) \right] x_1(\tau) d\tau \\ & + \frac{\beta R_2}{L(R_1 + R_2)} \int_{t_0}^t \exp \left[-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} (t - \tau) \right] x_2(\tau) d\tau \\ & \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \end{aligned}$$

Esto puede parecer algo sorprendente, ya que las bobinas y los condensadores son elementos lineales. Sin embargo, el sistema de la Figura 2.2.2 viola una propiedad muy importante de los sistemas lineales, concretamente que una entrada cero debe producir salida cero. Por tanto, si $y_0 = 0$, el sistema sería lineal.

El concepto de linealidad es muy importante en teoría de sistemas. El principio de superposición se puede utilizar para determinar la respuesta de un sistema lineal a cualquier entrada arbitraria que se pueda descomponer en una suma (que puede tener infinitos términos) de señales básicas. La respuesta a cada señal básica se puede calcular por separado, y después sumar todas las respuestas para obtener la respuesta global del sistema. Esta técnica se utiliza repetidamente a lo largo del texto, y en muchos casos produce resultados en forma matemáticamente cerrada, lo que no es posible para sistemas no lineales.

Muchos sistemas físicos, cuando se analizan con detalle, muestran un comportamiento no lineal. En estas situaciones, se puede encontrar una solución para una excitación y condiciones iniciales dadas, bien analíticamente, o con la ayuda del ordenador. Frecuentemente se necesita determinar el comportamiento del sistema en las cercanías de esa solución. Una técnica común para resolver este problema es aproximar el sistema por un modelo lineal que sea válido en las cercanías del punto de trabajo. Esta técnica se conoce como linealización. Algunos ejemplos importantes son la técnica de análisis de pequeña señal que se aplica a circuitos de transistores, y el modelo de pequeña señal, que se aplica al análisis del péndulo simple.

2.2.2. Sistemas variantes e invariantes con el tiempo

Se dice que un sistema es invariante con el tiempo si un desplazamiento temporal de la señal de entrada causa un desplazamiento temporal idéntico en la señal de salida. Concretamente, si $y(t)$ es la salida correspondiente a la entrada $x(t)$, un sistema invariante con el tiempo producirá como salida $y(t - t_0)$ cuando la entrada sea $x(t - t_0)$. Es decir, la regla que se utiliza para obtener la salida del sistema no depende del instante en el que se aplica la entrada.

El procedimiento para comprobar si un sistema es invariante con el tiempo se resume en los siguientes pasos:

1. Sea $y_1(t)$ la salida correspondiente a $x_1(t)$.
2. Consideremos una segunda entrada, $x_2(t)$, obtenida desplazando $x_1(t)$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

y encontremos la salida $y_2(t)$ correspondiente a la entrada $x_2(t)$.

3. Obtengamos la señal $y_1(t - t_0)$ a partir de la señal $y_1(t)$ (del paso 1), y compáremosla con $y_2(t)$.
4. Si $y_2(t) = y_1(t - t_0)$, el sistema es invariante con el tiempo. Caso contrario es variante.

Ejemplo 2.2.4

Deseamos determinar si los sistemas descritos por las ecuaciones que siguen son invariantes con el tiempo:

- (a) $y(t) = \cos x(t)$
- (b) $\frac{dy(t)}{dt} = -ty(t) + x(t), \quad t \geq 0, y(0) = 0$

Consideremos el sistema del Apartado (a), $y(t) = \cos x(t)$. Seguimos los pasos indicados anteriormente:

1. Para la entrada $x_1(t)$, la salida es

$$y_1(t) = \cos x_1(t) \quad (2.2.7)$$

2. Consideremos la segunda entrada $x_2(t) = x_1(t - t_0)$. La salida correspondiente es

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \cos x_2(t) \\ &= \cos x_1(t - t_0) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

3. De la Ecuación (2.2.7)

$$y_1(t - t_0) = \cos x_1(t - t_0) \quad (2.2.9)$$

4. La comparación de las Ecuaciones (2.2.8) y (2.2.9) demuestra que el sistema $y(t) = \cos x(t)$ es invariante con el tiempo.

Consideremos ahora el sistema del Apartado (b).

1. Si la entrada es $x_1(t)$, se puede verificar muy fácilmente por sustitución directa en la ecuación diferencial que la salida $y_1(t)$ viene dada por

$$y_1(t) = \int_0^t \exp\left[-\frac{t^2}{2} + \frac{\tau^2}{2}\right] x_1(\tau) d\tau \quad (2.2.10)$$

2. Consideremos la entrada $x_2(t) = x_1(t - t_0)$. La salida correspondiente es

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \int_0^t \exp\left[-\frac{t^2}{2} + \frac{\tau^2}{2}\right] x_2(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \exp\left[-\frac{t^2}{2} + \frac{\tau^2}{2}\right] x_1(\tau - t_0) d\tau \\ &= \int_{-t_0}^{t-t_0} \exp\left[-\frac{t^2}{2} + \frac{(\tau + t_0)^2}{2}\right] x_1(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

3. De la Ecuación (2.2.10),

$$y_1(t - t_0) = \int_0^{t-t_0} \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2} + \frac{\tau^2}{2}\right] x_1(\tau) d\tau \neq y_2(t) \quad (2.2.12)$$

4. Comparando las Ecuaciones (2.2.11) y (2.2.12) llegamos a la conclusión de que el sistema no es invariante con el tiempo.

2.2.3. Sistemas con memoria y sin memoria

En la mayoría de los sistemas, las entradas y las salidas son funciones de la variable independiente. Se dice que un sistema es sin memoria o instantáneo, si el valor actual de la salida depende solamente del valor actual de la entrada. Por ejemplo, una resistencia es un sistema sin memoria, ya que si la entrada $x(t)$ es la corriente que circula por la resistencia y la salida $y(t)$ es la tensión entre los extremos de la resistencia, la relación entrada/salida es

$$y(t) = Rx(t)$$

siendo R el valor de la resistencia. Por tanto, el valor de $y(t)$ en cualquier instante depende sólo del valor de $x(t)$ en ese instante. Por el contrario, un condensador es un ejemplo de sistema con memoria. Si la entrada es la corriente que circula por el condensador y la salida es la tensión entre sus extremos, la relación entrada/salida es en este caso

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

siendo C el valor de la capacidad. Es obvio que la salida en cualquier instante t depende de la historia pasada completa de la entrada.

Si un sistema es sin memoria o instantáneo, la relación entrada/salida se puede poner de la forma

$$y(t) = F(x(t)) \quad (2.2.13)$$

Para sistemas lineales, la relación se reduce a

$$y(t) = k(t)x(t)$$

y si el sistema es invariante con el tiempo, tenemos

$$y(t) = kx(t)$$

siendo k una constante.

Un ejemplo de sistema lineal, invariante con el tiempo y sin memoria es un amortiguador mecánico. La dependencia lineal entre la fuerza $f(t)$ y la velocidad $v(t)$ es

$$v(t) = \frac{1}{D} f(t)$$

siendo D la constante de amortiguamiento.

Un sistema cuya respuesta en el instante t está determinada completamente por las señales de entrada durante los últimos T segundos (es decir, en el intervalo desde $t - T$ hasta t), se denomina sistema con memoria finita. La memoria de un sistema de este tipo es de longitud T unidades de tiempo.

Ejemplo 2.2.5 La salida de un canal de comunicaciones $y(t)$ se relaciona con su entrada $x(t)$ así:

$$y(t) = \sum_{i=0}^N a_i x(t - T_i)$$

Es claro que la salida $y(t)$ del canal en el instante t no depende sólo de la entrada en instante t , sino que depende también de la historia anterior de $x(t)$, es decir:

$$y(0) = a_0 x(0) + a_1 x(-T_1) + \dots + a_n x(-T_n)$$

Por lo tanto, este sistema posee una memoria finita de $T = \max_i(T_i)$.

2.2.4. Sistemas causales

Un sistema es causal, no anticipativo (conocido también como físicamente realizable), si la salida en cualquier instante t_0 depende sólo de los valores de la entrada para $t < t_0$. De forma equivalente, si dos entradas a un sistema causal son idénticas hasta algún instante t_0 , las correspondientes salidas deben ser iguales hasta ese mismo instante de tiempo ya que un sistema causal no puede predecir si las dos entradas serán diferentes después de t_0 (en el futuro). Matemáticamente, si

$$x_1(t) = x_2(t); \quad t < t_0$$

y el sistema es causal, entonces

$$y_1(t) = y_2(t); \quad t < t_0$$

Los sistemas que no cumplen esta propiedad se denominan no causales o anticipativos.

Ejemplo 2.2.6 En muchas aplicaciones nuestro interés no es el valor de una señal $x(t)$ en el instante actual t sino en algún instante del futuro, $t + \alpha$ o en algún momento del pasado, $t - \beta$. La señal $y(t) = x(t + \alpha)$ es una predicción de $x(t)$, mientras que la señal $y(t) = x(t - \beta)$ es una versión retrasada de $x(t)$. El primer sistema se denomina *predictor ideal*, y el segundo sistema es un *retardador ideal*.

Es claro que el predictor es un sistema no causal, ya que la salida depende de los valores futuros de la entrada. Podemos verificarlo matemáticamente como sigue. Consideremos las entradas

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 5 \\ \exp(-t) & t > 5 \end{cases}$$

y

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 5 \\ 0 & t > 5 \end{cases}$$

de modo que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son idénticas hasta $t_0 = 5$.

Supongamos que $\alpha = 3$. Las salidas correspondientes son

$$y_1(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 2 \\ \exp[-(t+3)] & t > 2 \end{cases}$$

y

$$y_2(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

Si el sistema es causal, $y_1(t) = y_2(t)$ para todo $t < 5$. Pero $y_1(3) = \exp(-6)$ e $y_2(3) = 0$. Por tanto, el sistema es no causal.

El retardo ideal es causal ya que su salida depende sólo de los valores pasados de la señal de entrada.

Ejemplo 2.2.7

A menudo se requiere determinar el valor medio de una señal en cada instante temporal t . Esto se puede hacer calculando el *promediado*, $x^{av}(t)$ de la señal $x(t)$. $x^{av}(t)$ se puede calcular de varias formas. Por ejemplo,

$$x^{av}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \quad (2.2.14)$$

o

$$x^{av}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau \quad (2.2.15)$$

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales que son idénticas para $t \leq t_0$, pero que son diferentes para $t > t_0$. Entonces, para la ecuación del sistema (2.2.14),

$$\begin{aligned} x_1^{av}(t_0) &= \frac{1}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} x_1(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} x_2(\tau) d\tau = x_2^{av}(t_0) \end{aligned} \quad (2.2.16a)$$

Por lo tanto el sistema es causal.

Para el sistema de la Ecuación (2.2.15),

$$x_1^{av}(t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} x_1(\tau) d\tau \quad (2.2.16b)$$

que no es igual a

$$x_2^{av}(t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} x_2(\tau) d\tau \quad (2.2.16c)$$

ya que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ no son las mismas para $t > t_0$. Este sistema es, por tanto, no causal.

2.2.5. Sistemas invertibles y sistema inverso

Se dice que un sistema es invertible si observando la salida se puede determinar la entrada. Es decir, se puede construir un sistema inverso que cuando se coloca en cascada con el sistema original, como se indica en la Figura 2.2.3, produce una salida igual a la entrada del sistema original. En otras palabras, el sistema inverso «deshace» lo que el sistema original hace con la entrada $x(t)$. Por tanto, el efecto del sistema dado se puede eliminar colocándolo en cascada con su sistema inverso. Nótese que si dos entradas diferentes producen la misma salida, el sistema no es invertible. El sistema inverso de un sistema causal no tiene que ser causal necesariamente. De hecho, puede no existir en absoluto en ningún sentido convencional. El uso del concepto de sistema inverso en los capítulos que siguen es fundamentalmente por conveniencia matemática, y no se requiere que el sistema sea físicamente realizable.

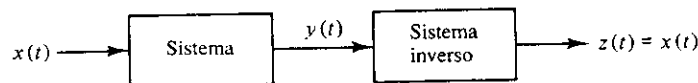


Figura 2.2.3. Concepto de sistema inverso.

Ejemplo 2.2.8

Se desea determinar si los sistemas que se indican a continuación son invertibles. Si lo son, construir el sistema inverso. Si no, deben encontrarse dos entradas diferentes que produzcan la misma salida.

- (a) $y(t) = 2x(t)$
- (b) $y(t) = \cos x(t)$
- (c) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau; \quad y(-\infty) = 0$
- (d) $y(t) = x(t + 1)$

El sistema del Apartado (a), $y(t) = 2x(t)$ es invertible, y el sistema inverso es

$$z(t) = \frac{1}{2} y(t)$$

La Figura 2.2.4 muestra esta idea.

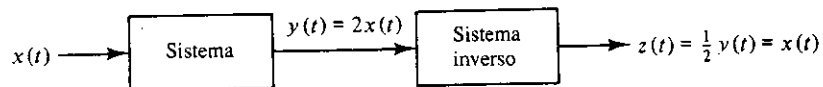


Figura 2.2.4. Sistema inverso para el Apartado (a) del Ejemplo 2.2.8.

Para el Apartado (b), el sistema $y(t) = \cos x(t)$ no es invertible ya que $x(t)$ y $x(t) + 2\pi$ producen la misma salida.

Para el Apartado (c), el sistema $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, $y(-\infty) = 0$ es invertible, y el sistema inverso correspondiente es el diferenciador

$$z(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

Por último, para el Apartado (d), el sistema $y(t) = x(t + 1)$ es invertible y el sistema inverso es el retardador unidad

$$z(t) = y(t - 1)$$

En algunas aplicaciones, es necesario realizar un tratamiento previo de las señales recibidas para transformarlas en señales con las que se pueda trabajar. Si el tratamiento previo se puede representar mediante un sistema invertible, su acción no tendrá efecto en las prestaciones del sistema global (véase Problema 2.13).

2.2.6. Sistemas estables

Uno de los conceptos más importantes en el estudio de sistemas es la noción de estabilidad. Aunque se pueden definir muchos tipos de estabilidad, en esta sección consideraremos sólo un tipo denominado estabilidad BIBO (*Bounded-input Bounded-output*, entrada acotada salida acotada). La estabilidad BIBO se refiere al comportamiento de la respuesta a la salida cuando se aplica una entrada acotada.

Se dice que una señal $x(t)$ está acotada si su módulo no crece sin límite, es decir,

$$|x(t)| < B < \infty, \text{ para todo } t$$

Un sistema es estable en sentido BIBO si para cualquier entrada acotada $x(t)$, la respuesta a la salida $y(t)$ está también acotada. Es decir,

$$|x(t)| < B_1 < \infty \text{ implica que } |y(t)| < B_2 < \infty$$

Ejemplo 2.2.9 Se desea determinar cuál de estos sistemas es estable

(a) $y(t) = \exp[x(t)]$

(b) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

Para el sistema del Apartado (a), una entrada acotada $x(t)$ que cumpla $|x(t)| < B$ produce una salida $y(t)$ cuyo módulo es

$$|y(t)| = |\exp[x(t)]| = \exp[x(t)] \leq \exp[B] < \infty$$

Por lo tanto, la salida también está acotada y el sistema es estable.

Para el Apartado (b), consideremos como entrada $x(t)$ el escalón unidad $u(t)$. La salida $y(t)$ es igual a

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = r(t)$$

Por tanto, una entrada acotada $u(t)$ produce una salida $r(t)$ no acotada, y el sistema no es estable.

Este ejemplo sirve para enfatizar el hecho de que cuando un sistema es estable, *todas* las entradas acotadas deben producir salidas acotadas. Basta con encontrar una sola entrada acotada, cuya salida no esté acotada, para asegurar que el sistema es inestable.

2.3. SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES CON EL TIEMPO

En la sección anterior hemos estudiado diversas propiedades de sistemas. Dos de ellas, la linealidad y la invarianza con el tiempo juegan un papel fundamental en el análisis de señales y sistemas, debido a que muchos fenómenos físicos se pueden modelar mediante sistemas lineales invariantes con el tiempo, y debido también a que el análisis matemático del comportamiento de esos sistemas se puede realizar por procedimientos muy directos. En esta sección vamos a desarrollar una importante y útil representación para los sistemas lineales e invariantes con el tiempo (LTI, del inglés «linear time invariant»). Esto constituye los fundamentos de la teoría de sistemas lineales y de las diferentes transformadas presentadas a lo largo del texto.

Un problema fundamental en el análisis de sistemas es la obtención de la respuesta a alguna entrada determinada. Analíticamente, esto se puede resolver de formas muy diferentes. Una forma obvia sería resolver la ecuación diferencial que describe el sistema, teniendo en cuenta la entrada especificada y las condiciones iniciales. En la sección siguiente, presentaremos un segundo método que explota la linealidad y la invarianza temporal del sistema. El desarrollo de este método conduce a una importante integral conocida como convolución. En los Capítulos 3 y 4 consideraremos técnicas en el dominio de la frecuencia para analizar sistemas LTI.

2.3.1. La convolución

Los sistemas lineales se gobiernan por el principio de superposición. Sean $y_1(t)$ e $y_2(t)$ las respuestas de un sistema a las entradas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente. El sistema es lineal si la respuesta a la entrada $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ es igual a $y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$.

De forma más general, si la entrada $x(t)$ es una suma ponderada de cualquier conjunto de señales $x_i(t)$, y la respuesta a $x_i(t)$ es $y_i(t)$, entonces si el sistema es lineal, la salida $y(t)$ será la suma ponderada de las respuestas $y_i(t)$. Es decir, si

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \dots + a_Nx_N(t) = \sum_{i=1}^N a_ix_i(t)$$

tenemos entonces que

$$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t) + \dots + a_Ny_N(t) = \sum_{i=1}^N a_iy_i(t)$$

En la Sección 1.6 demostramos que las funciones escalón unidad e impulso unidad se pueden usar como bloques básicos para representar señales arbitrarias. De hecho, la propiedad de desplazamiento de la función δ ,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau \quad (2.3.1)$$

expresa que cualquier señal $x(t)$ se puede expresar como un continuo de impulsos ponderados.

Consideremos ahora un sistema en tiempo continuo con entrada $x(t)$. Utilizando la propiedad de superposición de los sistemas lineales (Ecuación 2.2.1), podemos expresar la

salida $y(t)$ como una combinación lineal de las respuestas del sistema a las señales impulso desplazadas, es decir,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t, \tau) d\tau \quad (2.3.2)$$

siendo $h(t, \tau)$ la respuesta del sistema lineal al impulso desplazado $\delta(t - \tau)$. En otras palabras, $h(t, \tau)$ es la salida del sistema en el instante t a la entrada $\delta(t - \tau)$ aplicada en el instante τ . Si, además, el sistema es también invariante en el tiempo, $h(t, \tau)$ no debe depender de τ , sino de $t - \tau$. Es decir, $h(t, \tau) = h(t - \tau)$. Esto es debido a que la propiedad de invarianza con el tiempo implica que si $h(t)$ es la respuesta a $\delta(t)$, entonces la respuesta a $\delta(t - \tau)$ es simplemente $h(t - \tau)$. Por tanto la Ecuación (2.3.2) se transforma en

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (2.3.3)$$

La función $h(t)$ se denomina respuesta al impulso del sistema LTI y representa la salida del sistema en el instante t debida a un impulso unidad aplicado a la entrada del sistema en el instante $t = 0$, cuando el sistema está en reposo (condiciones iniciales nulas).

La relación integral que expresa la Ecuación (2.3.3) se denomina integral de convolución entre las señales $x(t)$ y $h(t)$ y relaciona la entrada y la salida del sistema por medio de la respuesta al impulso del mismo. Esta operación se representa simbólicamente así:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (2.3.4)$$

Una consecuencia de esta representación es que un sistema LTI queda completamente caracterizado mediante su respuesta al impulso. Es importante indicar que la convolución

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

no existe para cualquier señal. Las condiciones suficientes para que exista la convolución de las señales $x(t)$ e $h(t)$ son:

1. Tanto $x(t)$ como $h(t)$ deben ser absolutamente integrables en el intervalo $(-\infty, 0]$.
2. Tanto $x(t)$ como $h(t)$ deben ser absolutamente integrables en el intervalo $[0, \infty)$.
3. $x(t)$ o $h(t)$, o bien ambas deben ser absolutamente integrables en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Se dice que una señal $x(t)$ es absolutamente integrable en el intervalo $[a, b]$ si

$$\int_a^b |x(t)| dt < \infty \quad (2.3.5)$$

Por ejemplo, las convoluciones $\sin \omega t * \cos \omega t$, $\exp[t] * \exp[t]$, y $\exp[t] * \exp[-t]$ no existen.

La operación de convolución en tiempo continuo satisface estas importantes propiedades:

Propiedad conmutativa

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Esta propiedad se demuestra por sustitución de variables. Implica que los papeles de la señal de entrada y de la respuesta al impulso son intercambiables.

Propiedad asociativa

$$\begin{aligned} x(t) * h_1(t) * h_2(t) &= [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \\ &= x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \end{aligned}$$

Esta propiedad se demuestra intercambiando el orden de integración. Implica que una combinación en cascada de sistemas LTI se puede sustituir por un único sistema, cuya respuesta al impulso es la convolución de las respuestas al impulso de cada sistema.

Propiedad distributiva

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] + [x(t) * h_2(t)]$$

Esta propiedad es consecuencia directa de la propiedad lineal de la integración. Implica que una combinación en paralelo de sistemas LTI es equivalente a un único sistema, cuya respuesta al impulso es la suma de las respuestas al impulso de los sistemas en paralelo. La Figura 2.3.1 ilustra estas tres propiedades.

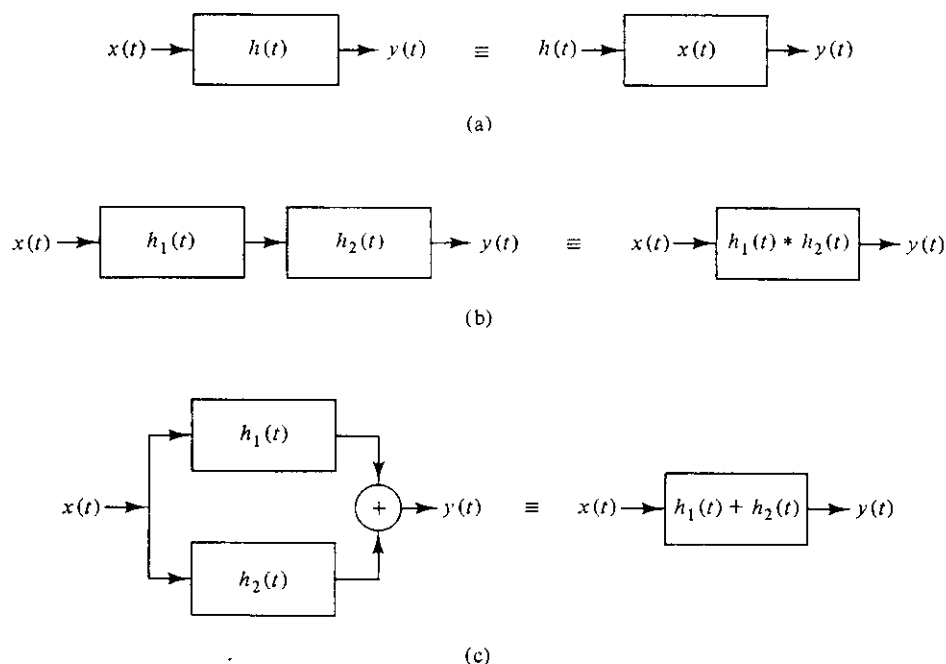


Figura 2.3.1. Propiedades de la convolución de sistemas continuos.

Se pueden obtener algunas propiedades adicionales interesantes de la convolución si consideramos la convolución con funciones de singularidad, concretamente con el escalón unidad, el impulso unidad y el doblete unidad. Utilizando las definiciones dadas en el Capítulo 1 se puede demostrar que

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \quad (2.3.6)$$

Por lo tanto, un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = \delta(t)$ es el sistema identidad. Consideremos ahora

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (2.3.7)$$

En consecuencia, un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = u(t)$ es un integrador perfecto. Por último,

$$x(t) * \delta'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta'(t - \tau) d\tau = x'(t) \quad (2.3.8)$$

con lo que podemos ver que un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = \delta'(t)$ es un diferenciador perfecto. Estas propiedades, junto con las otras ya presentadas, ponen de manifiesto las diferencias entre las tres operaciones siguientes:

$$x(t)\delta(t - a) = x(a)\delta(t - a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - a) dt = x(a)$$

$$x(t) * \delta(t - a) = x(t - a)$$

El resultado de la primera operación (propiedad de muestreo de la función delta) es una nueva función delta con peso $x(a)$. El resultado de la segunda operación (propiedad de desplazamiento de la función delta) es el valor de la señal $x(t)$ en $t = a$. Por último, el resultado de la tercera operación (propiedad de convolución de la función delta) es una versión desplazada de $x(t)$.

Ejemplo 2.3.1

Sea la señal $x(t) = a\delta(t) + b\delta(t - t_0)$. Esta señal es la entrada de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = K \exp[-ct]u(t)$. Podemos ver que la entrada es la suma ponderada de dos funciones desplazadas. Como el sistema es lineal e invariante con el tiempo, la salida $y(t)$ se puede expresar como la suma ponderada de las respuestas a las dos funciones δ . Por definición, la respuesta del sistema a un impulso unidad en su entrada es igual a $h(t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= ah(t) + bh(t - t_0) \\ &= aK \exp[-ct]u(t) + bK \exp[-c(t - t_0)]u(t - t_0) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.2

La salida $y(t)$ de un receptor óptimo en un sistema de comunicaciones se relaciona con la entrada $x(t)$ así:

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau)s(T - t + \tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.3.9)$$

en donde $s(t)$ es una señal conocida de duración T . La comparación de la Ecuación (2.3.9) con la Ecuación (2.3.3) produce el siguiente resultado

$$\begin{aligned} h(t - \tau) &= s(T - t + \tau), & 0 < t - \tau < T \\ &= 0 & \text{en el resto} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} h(t) &= s(T - t), & 0 < t < T \\ &= 0, & \text{en el resto} \end{aligned}$$

Un sistema de este tipo se denomina filtro adaptado. Su respuesta al impulso es la señal reflejada y desplazada un intervalo T [el sistema está adaptado a la señal $s(t)$].

Ejemplo 2.3.3 Consideremos el sistema descrito por la relación

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau$$

Como se ha dicho anteriormente, este sistema calcula el promediado de la señal $x(t)$ en el intervalo $[t - T/2, t + T/2]$.

Hagamos ahora $x(t) = \delta(t)$ para encontrar la respuesta al impulso del sistema:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \delta(\tau) d\tau \\ &= \begin{cases} \frac{1}{T} & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \end{aligned}$$

donde el último paso se desprende de la propiedad de desplazamiento, expresada en la Ecuación (1.6.8), de la función impulso.

Ejemplo 2.3.4 Consideremos un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = \exp[-at]u(t), \quad a > 0$$

Si la entrada al sistema es

$$x(t) = \exp[-bt]u(t), \quad b \neq a$$

entonces la salida $y(t)$ es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-b\tau]u(\tau) \exp[-a(t-\tau)]u(t-\tau) d\tau$$

Nótese que

$$\begin{aligned} u(\tau)u(t-\tau) &= 1, & 0 < t < \tau \\ &= 0, & \text{en el resto} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \exp[-a\tau] \exp[(a-b)\tau] d\tau \\ &= \frac{1}{a-b} [\exp(-bt) - \exp(-at)]u(t) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.5 Encontremos la respuesta al impulso del sistema que muestra la Figura 2.3.2 si

$$h_1(t) = \exp[-2t]u(t)$$

$$h_2(t) = 2 \exp[-t]u(t)$$

$$h_3(t) = \exp[-3t]u(t)$$

$$h_4(t) = 4\delta(t)$$

Utilizando las propiedades asociativa y distributiva de la convolución se desprende que $h(t)$ para el sistema de la Figura 2.3.2 es

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1(t) * h_2(t) + h_3(t) * h_4(t) \\ &= [\exp(-t) - \exp(-2t)]u(t) + 12 \exp(-3t)u(t) \end{aligned}$$

donde el último paso es consecuencia del Ejemplo 2.3.4 y del hecho de que $x(t) * \delta(t) = x(t)$.

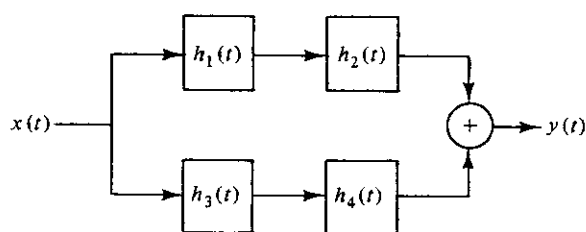


Figura 2.3.2. El sistema del Ejemplo 2.3.5.

Ejemplo 2.3.6 La convolución tiene la propiedad de que el área de la integral de convolución es igual al producto de las áreas de las dos señales que se convolucionan. El área de la integral de convolución se puede calcular integrando la Ecuación (2.3.3) en el intervalo $-\infty < t < \infty$, resultando

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau dt$$

Si intercambiamos los órdenes de integración obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) [\text{área bajo } h(t)] d\tau \\ &= \text{área bajo } x(t) \times \text{área bajo } h(t) \end{aligned}$$

Este resultado se generalizará posteriormente cuando hablemos de las transformadas de Fourier y de Laplace. Por el momento, podemos utilizarlo como una forma de comprobar rápidamente el resultado de una convolución.

2.3.2. Interpretación gráfica de la convolución

El cálculo de $x(t) * h(t)$ cuando las dos señales son continuas para todo t , no es conceptualmente más complicado que la integración ordinaria. Sin embargo, en muchas ocasiones al menos una de las dos señales involucradas se define por tramos. En este caso, la interpretación gráfica de la convolución resulta especialmente útil. A continuación indicaremos los pasos de esta ayuda gráfica para la obtención de la convolución. Dichos pasos indican cómo se calcula gráficamente convolución en el intervalo $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, donde el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ se escoge de forma que el producto $x(\tau)h(t - \tau)$ se pueda describir mediante una única expresión matemática en dicho intervalo.

Paso 1. Para t un valor arbitrario fijo en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ se dibujan $x(\tau)$, $h(t - \tau)$ y el producto $g(t, \tau) = x(\tau)h(t - \tau)$ como funciones de τ . Nótese que $h(t - \tau)$ es una versión invertida y desplazada de $h(\tau)$, y que se obtiene desplazando $h(-\tau)$ a la derecha t segundos.

Paso 2. Integrar el producto $g(t, \tau)$ como función de τ . Nótese que el integrando $g(t, \tau)$ depende de t y de τ . τ es la variable de integración que desaparecerá al calcular la integral e imponer los límites sobre el resultado. La integración puede verse como el área bajo la curva representada por el integrando.

Los ejemplos que siguen ilustran este procedimiento.

Ejemplo 2.3.7 Consideremos las señales que se muestran en la Figura 2.3.3(a), siendo

$$\begin{aligned} x(t) &= A \exp[-t], & 0 \leq t < \infty \\ h(t) &= \frac{t}{T}, & 0 \leq t < T \end{aligned}$$

La Figura 2.3.3(b) muestra $x(\tau)$, $h(t - \tau)$ y $x(\tau)h(t - \tau)$ con $t < 0$. El valor de t es siempre igual a la distancia desde el origen de $x(\tau)$ al origen desplazado de $h(-\tau)$ indicado por la línea de puntos. Vemos que las señales no se solapan. Por lo tanto, la integral es igual a cero y

$$x(t) * h(t) = 0, \quad t \leq 0$$

Cuando $0 \leq t \leq T$, como muestra la Figura 2.3.3(c), las señales se solapan en el intervalo $0 \leq \tau \leq t$, con lo que el límite superior de la integración es t , y

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \int_0^t A \exp[-\tau] \frac{t - \tau}{T} d\tau \\ &= \frac{A}{T} [t - 1 + \exp[-t]] \quad 0 < t \leq T \end{aligned}$$

Finalmente, cuando $t > T$, como se muestra en la Figura 2.3.3(d), las señales se solapan en el intervalo $t - T \leq \tau \leq t$, y

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \int_{t-T}^t A \exp[-\tau] \frac{t - \tau}{T} d\tau \\ &= \frac{A}{T} [T - 1 + \exp[-T]] \exp[-(t - T)], \quad t > T \end{aligned}$$

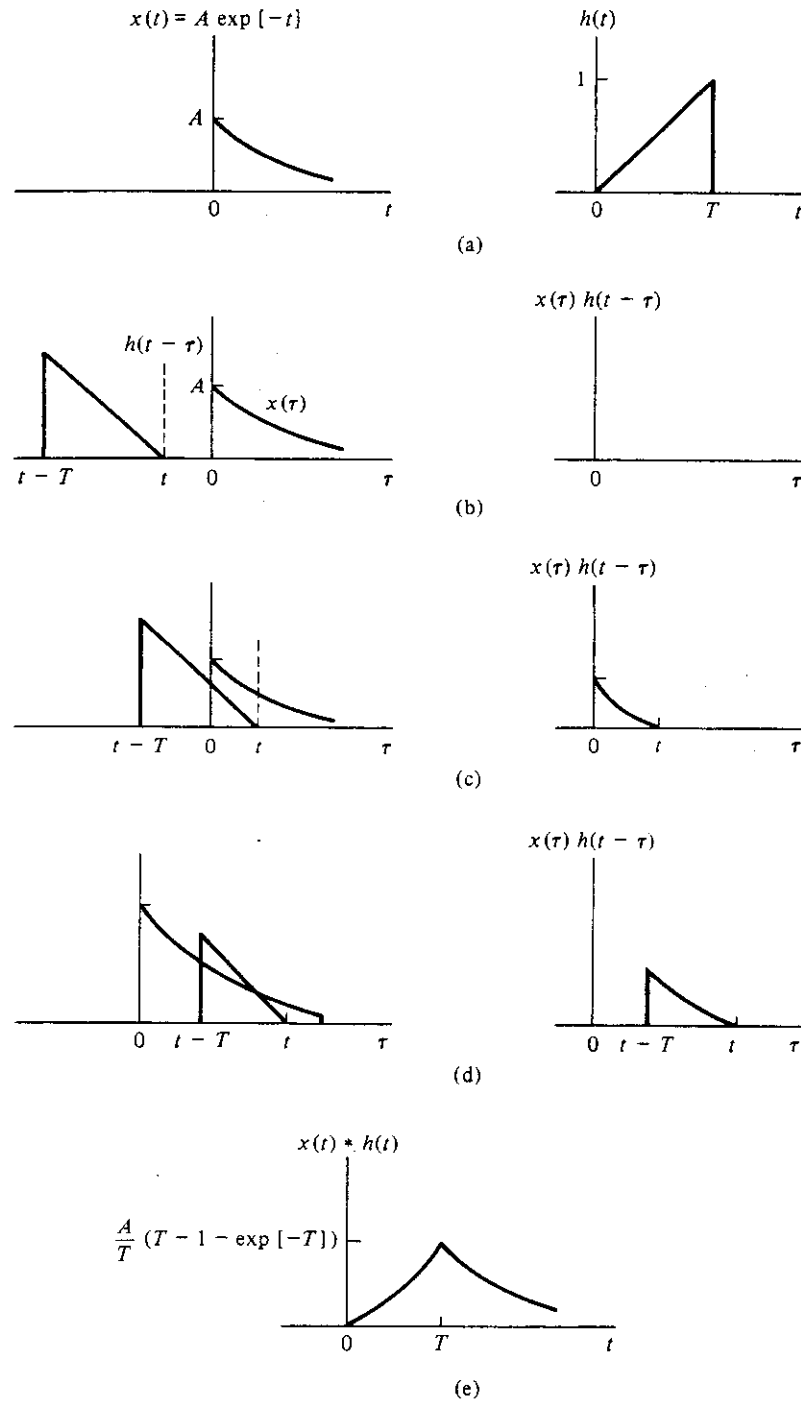


Figura 2.3.3. Interpretación gráfica de la convolución del Ejemplo 2.3.7.

El resultado completo se muestra en la Figura 2.3.3(e). En este ejemplo, la gráfica del resultado muestra que la operación de convolución produce un suavizado en el sentido de que $x(t) * h(t)$ es más suave que cualquiera de las señales originales.

Ejemplo 2.3.8 Determinemos la siguiente convolución

$$y(t) = \text{rect}(t/2a) * \text{rect}(t/2a)$$

La Figura 2.3.4 ilustra el solapamiento de los dos pulsos rectangulares para diferentes valores de t y la señal resultante $y(t)$. El resultado se expresa analíticamente así:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < -2a \\ t + 2a, & -2a \leq t < 0 \\ 2a - t, & 0 \leq t < 2a \\ 0, & t \geq 2a \end{cases}$$

o, de forma más compacta

$$y(t) = \begin{cases} 2a - |t| & |t| \leq 2a \\ 0, & |t| \geq 2a \end{cases} = 2a \Delta(t/2a)$$

Esta señal aparecerá frecuentemente en nuestros razonamientos y se denomina señal triangular. Utilizaremos la notación $\Delta(t/2a)$ para indicar una señal triangular de altura unidad, centrada en $t = 0$ y de longitud $4a$.

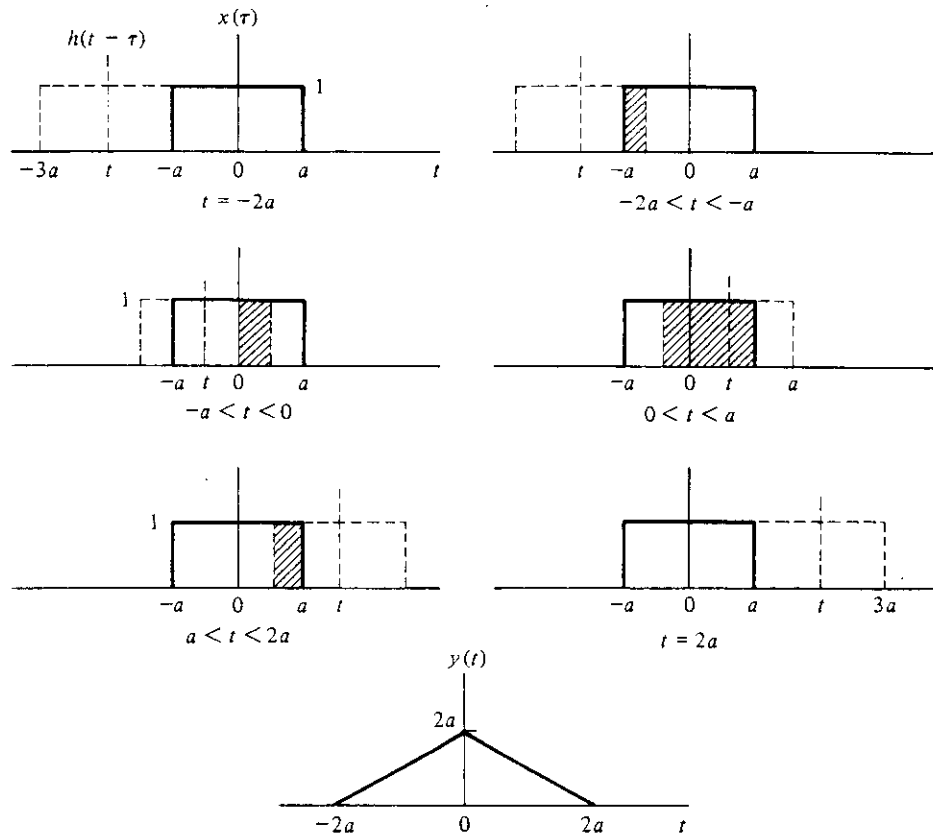
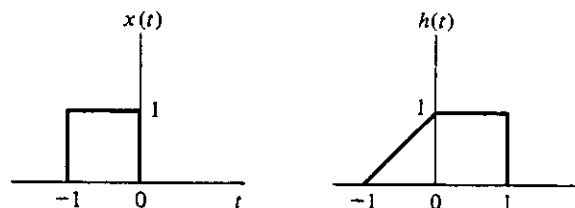


Figura 2.3.4. Solución gráfica del Ejemplo 2.3.8.

Ejemplo 2.3.9 Calculemos la convolución $x(t) * h(t)$, siendo $x(t)$ y $h(t)$ las señales



La Figura 2.3.5 muestra el solapamiento de las dos señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$. Podemos ver que para $t < -2$ el producto $x(\tau)h(t - \tau)$ siempre vale cero. Para $-2 \leq t < -1$ el producto es un triángulo de base $t + 2$ y altura $t + 2$. Por tanto, el área es

$$y(t) = \frac{1}{2}(t + 2)^2 \quad -2 \leq t < -1$$

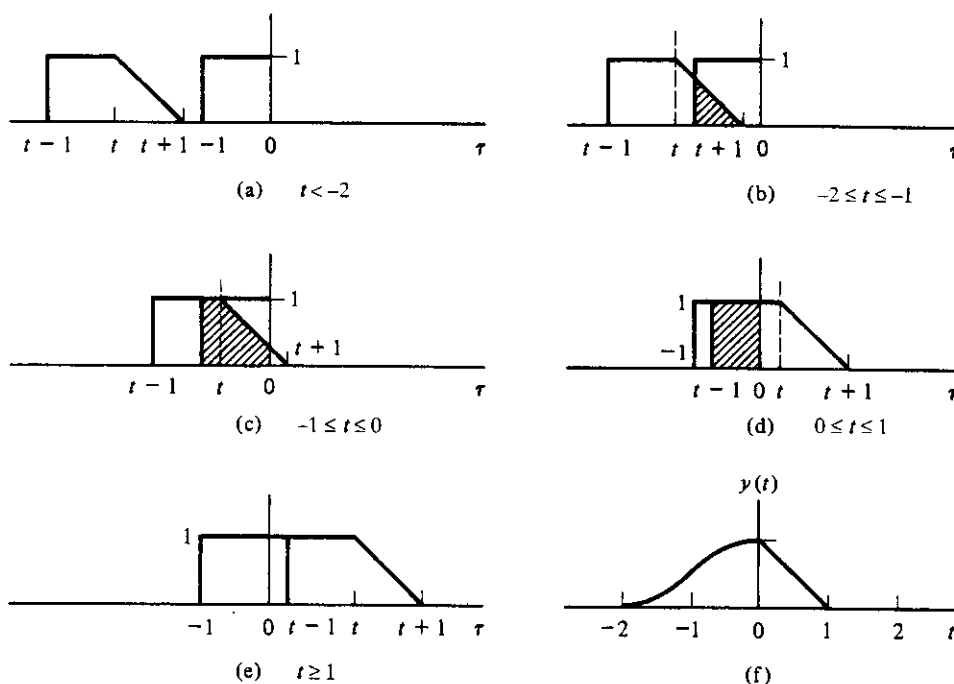


Figura 2.3.5. Interpretación gráfica de $x(t) * h(t)$ en el Ejemplo 2.3.9.

Para $-1 \leq t < 0$ el producto se muestra en la Figura 2.3.5(c) y el área es

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2, \quad -1 \leq t < 0$$

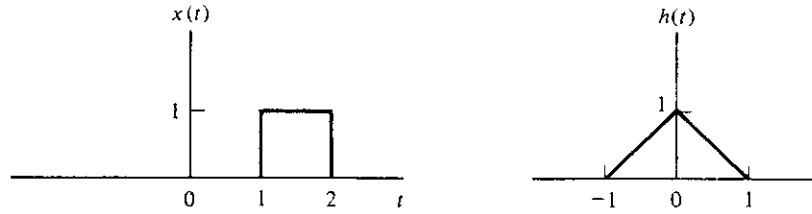
Para $0 \leq t < 1$ el producto es un rectángulo de base $1 - t$ y altura 1. Por lo tanto, el área es

$$y(t) = 1 - t, \quad 0 \leq t < 1$$

Para $t > 1$ el producto es siempre cero. En resumen, tenemos

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ \frac{(t+2)^2}{2}, & -2 \leq t < -1 \\ 1 - \frac{t^2}{2}, & -1 \leq t < 0 \\ 1 - t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.10 Calcularemos gráficamente la convolución de las dos señales que se muestran en la siguiente figura

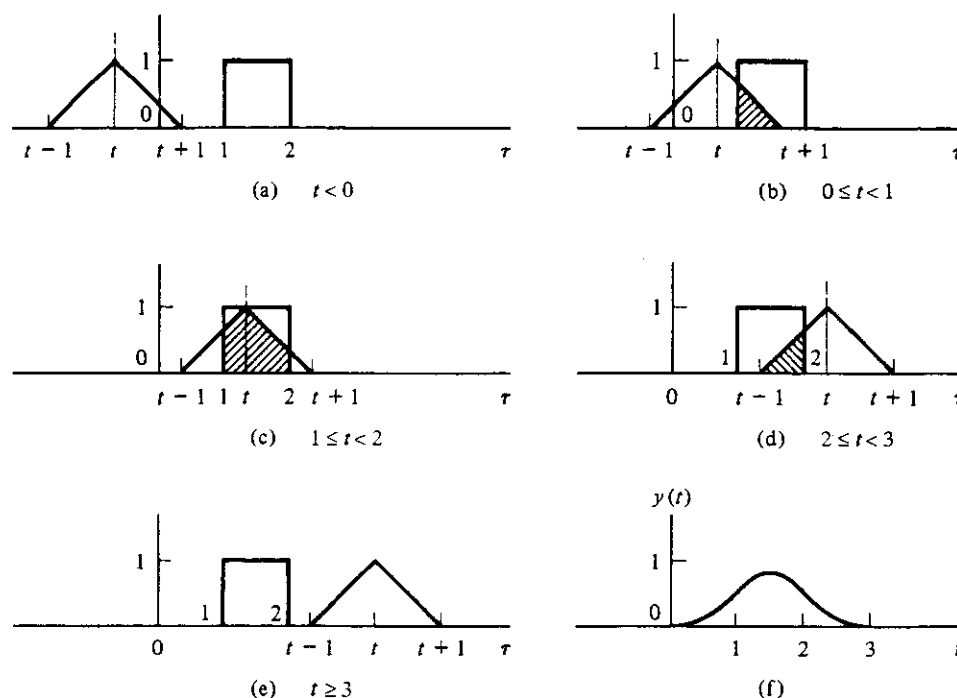


En la Figura 2.3.6 podemos ver que para $t < 0$ el producto $x(\tau)h(t - \tau)$ vale siempre cero para todo t . Por lo tanto, $y(t) = 0$. Para $0 \leq t < 1$ el producto es un triángulo de base t y altura t . Entonces, $y(t) = t^2/2$. Para $1 \leq t < 2$ el área bajo el producto es igual a

$$y(t) = 1 - \left[\frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{2}(2-t)^2 \right], \quad 1 \leq t < 2$$

Para $2 \leq t < 3$ el producto es un triángulo de base $3-t$ y altura $3-t$; por tanto, $y(t) = (3-t)^2/2$. Para $t \geq 3$, el producto $x(\tau)h(t - \tau)$ vale siempre cero. En resumen, tenemos

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ 3t - t^2 - \frac{3}{2}, & 1 \leq t < 2 \\ \frac{(3-t)^2}{2}, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$$

Figura 2.3.6. Convolución de $x(t)$ y $h(t)$ en el ejemplo 2.3.10.

2.4. PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES CON EL TIEMPO

La respuesta al impulso de un sistema LTI representa una descripción completa de las características del sistema. En esta sección examinaremos las propiedades de los sistemas presentadas en la Sección 2.2 en términos de la respuesta al impulso.

2.4.1. Propiedad de memoria de los sistemas LTI

En la Sección 2.2.3 definíamos los sistemas sin memoria como aquellos en los que la salida en cualquier instante depende sólo del valor de la entrada en ese mismo instante. Vimos, además, que los sistemas invariantes con el tiempo y sin memoria obedecen a una relación entrada/salida de la forma

$$y(t) = Kx(t) \quad (2.4.1)$$

para alguna constante K . Haciendo $x(t) = \delta(t)$ en la Ecuación 2.4.1 vemos que estos sistemas tienen la respuesta al impulso de la forma

$$h(t) = K\delta(t) \quad (2.4.2)$$

2.4.2. Sistemas LTI causales

Como se dijo en la Sección 2.2.4, la salida de un sistema causal depende solamente de los valores presentes y pasados de la entrada. Utilizando la integral de convolución, podemos

relacionar esta propiedad con una propiedad equivalente de la respuesta al impulso de un sistema LTI. Concretamente, para que un sistema en tiempo continuo sea causal, $y(t)$ no debe depender de $x(\tau)$ para $\tau > t$. De la Ecuación 2.3.3, podemos ver que esto se cumplirá si

$$h(t) = 0 \quad \text{para} \quad t < 0 \quad (2.4.3)$$

En este caso, la convolución se transforma en

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Por ejemplo, el sistema $h(t) = u(t)$ es causal, pero el sistema $h(t) = \delta(t + t_0)$, $t_0 > 0$ es no causal.

En general, se dice que una señal $x(t)$ es causal si

$$x(t) = 0, \quad t < 0$$

Se dice que la señal es anticausal si $x(t) = 0$ para $t \geq 0$. Cualquier señal que no contenga singularidades (funciones delta o sus derivadas) en $t = 0$ se puede escribir como la suma de una parte causal $x^+(t)$ y de una parte anticausal $x^-(t)$. Es decir,

$$x(t) = x^+(t) + x^-(t)$$

Por ejemplo, la exponencial $x(t) = \exp[-t]$ se puede expresar como

$$x(t) = \exp[-t]u(t) + \exp[-t]u(-t)$$

en donde el primer término representa la parte causal de $x(t)$ y el segundo término, la parte anticausal de $x(t)$. La multiplicación de la señal por el escalón unidad asegura que la señal resultante es causal.

2.4.3. Sistemas LTI invertibles

Consideremos un sistema LTI continuo cuya respuesta al impulso es $h(t)$. En la Sección 2.2.5 mencionamos que un sistema es invertible sólo si se puede diseñar un sistema inverso que cuando se conecta en cascada con el sistema original produce una salida igual a la entrada del sistema inicial. Si $h_1(t)$ representa la respuesta al impulso del sistema inverso, entonces, en términos de la convolución debe cumplirse:

$$y(t) = h_1(t) * h(t) * x(t) = x(t)$$

De la Ecuación (2.3.6) concluimos que $h_1(t)$ debe satisfacer

$$h_1(t) * h(t) = h(t) * h_1(t) = \delta(t) \quad (2.4.5)$$

Por ejemplo, el sistema LTI $h_1(t) = \delta(t + t_0)$ es el inverso del sistema $h(t) = \delta(t - t_0)$.

2.4.4. Sistemas LTI estables

Un sistema en tiempo continuo es estable si y sólo si cualquier entrada acotada produce una salida acotada. Para relacionar esta propiedad con la respuesta al impulso de los sistemas LTI, consideremos una entrada acotada $x(t)$ que cumple $|x(t)| < B$ para todo t . Supongamos que esta entrada se aplica a un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$. Utilizando la Ecuación 2.3.3, encontramos que el módulo de la salida es

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau \\ &\leq B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Por lo tanto, el sistema es estable si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (2.4.7)$$

es decir, que la condición suficiente para la estabilidad en el sentido entrada limitada-salida limitada de un sistema LTI es que su respuesta al impulso sea absolutamente integrable.

Esta condición es también necesaria para la estabilidad. Es decir, si no se cumple, podemos encontrar entradas acotadas para las que las correspondientes salidas no están acotadas. Por ejemplo, fijemos t y escojamos como entrada la señal acotada $x(\tau) = \text{sgn}[h(t-\tau)]$ o lo que es lo mismo, $x(t-\tau) = \text{sgn}[h(\tau)]$. En este caso,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \text{sgn}[h(\tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Es claro que si $h(t)$ no es absolutamente integrable, $y(t)$ no estará acotada.

Por ejemplo, el sistema con $h(t) = \exp[-t]u(t)$ es estable, mientras que el sistema con $h(t) = u(t)$ es inestable.

Ejemplo 2.4.1

Vamos a determinar si los sistemas con la respuesta al impulso que se presenta a continuación son causales o no causales, con o sin memoria y estables o inestables

- (i) $h_1(t) = t \exp[-2t]u(t) + \exp[3t]u(-t) + \delta(t-1)$
- (ii) $h_2(t) = -3 \exp[2t]u(t)$
- (iii) $h_3(t) = 5\delta(t+5)$
- (iv) $h_4(t) = 10 \frac{\sin 5\pi t}{\pi t}$

Los sistemas (i), (iii) y (iv) son no causales ya que para $t < 0$, $h_i(t) \neq 0$, $i = 1, 3, 4$. Por lo tanto, sólo el sistema (ii) es causal.

Como $h(t)$ no es de la forma $K\delta(t)$ para ninguno de los sistemas, todos ellos tienen memoria.

Para determinar cuál de los sistemas es estable, vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_1(t)| dt = \int_0^{\infty} t \exp[-2t] dt + \int_{-\infty}^0 \exp[3t] dt + 1 = \frac{19}{12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_2(t)| dt = \int_0^{\infty} 3 \exp[2t] dt \text{ no está acotada}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_3(t)| dt = 5$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_4(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} 10 \frac{\sin 5\pi t}{\pi t} dt = 20$$

Por lo tanto, los sistemas (i), (iii) y (iv) son estables, y el sistema (ii) es inestable.

2.5. SISTEMAS DESCRITOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES

La respuesta del circuito RC del Ejemplo 2.2.7 se expresó en términos de ecuaciones diferenciales. De hecho, la respuesta de muchos sistemas físicos se puede describir mediante ecuaciones diferenciales. Como ejemplos de estos sistemas tenemos las redes eléctricas con resistencias, condensadores y bobinas ideales, y los sistemas mecánicos con pequeños muelles y amortiguadores. En la Sección 2.5.1 consideraremos los sistemas con ecuaciones diferenciales de entrada/salida con coeficientes constantes, y demostraremos que estos sistemas se pueden realizar (o simular) mediante sumadores, multiplicadores e integradores. Daremos también algunos ejemplos para mostrar cómo determinar la respuesta al impulso de sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En los Capítulos 4 y 5 presentaremos un método más sencillo y directo para determinar la respuesta al impulso de los sistemas LTI: el uso de transformadas.

2.5.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Consideremos un sistema en tiempo continuo descrito por la siguiente ecuación diferencial de entrada/salida

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^M b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} \quad (2.5.1)$$

donde los coeficientes a_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$, b_j , $j = 1, \dots, M$ son constantes reales y $N > M$. Utilizando notación de operadores, la ecuación anterior se puede escribir así:

$$\left(D^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i D^i \right) y(t) = \left(\sum_{i=0}^M b_i D^i \right) x(t) \quad (2.5.2)$$

en donde D representa el operador de diferenciación que transforma la señal $y(t)$ en su derivada $y'(t)$. Para resolver la Ecuación (2.5.2), son necesarias las N condiciones iniciales

$$y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(N-1)}(t_0)$$

donde t_0 es algún instante de tiempo en el que la entrada $x(t)$ se aplica al sistema e $y'(t)$ es la derivada de $y(t)$.

El entero N es el orden o dimensión del sistema. Nótese que si la i -ésima derivada de la entrada $x(t)$ contiene un impulso o la derivada de un impulso, entonces, para resolver la Ecuación (2.5.2) para $t > t_0$ es necesario conocer las condiciones iniciales en $t = t_0^-$. El motivo es que la salida $y(t)$ y sus derivadas hasta de orden $N - 1$ pueden cambiar de forma instantánea en el instante $t = t_0$. Por tanto, las condiciones iniciales deben establecerse en el instante inmediatamente anterior al instante t_0 .

Aunque se supone que el lector posee un cierto conocimiento de las técnicas de solución de ecuaciones diferenciales lineales, trabajaremos con un caso de primer orden ($N = 1$) para revisar el método habitual de solucionar las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

Ejemplo 2.5.1

Consideremos el sistema LTI de primer orden descrito por la siguiente ecuación diferencial, también de primer orden,

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \quad (2.5.3)$$

donde a y b son constantes arbitrarias. La solución completa de la Ecuación (2.5.3) consiste en la suma de la solución particular $y_p(t)$ y de la solución homogénea $y_h(t)$:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \quad (2.5.4)$$

La ecuación diferencial homogénea

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = 0$$

tiene una solución de la forma

$$y_h(t) = C \exp[-at]$$

Utilizando el método del factor de integración, podemos encontrar que la solución particular es

$$y_p(t) = \int_{t_0}^t \exp[-a(t - \tau)]bx(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0$$

y, por lo tanto, la solución general es

$$y(t) = C \exp[-at] + \int_{t_0}^t \exp[-a(t - \tau)]bx(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (2.5.5)$$

Nótese que en la Ecuación (2.5.5) la constante C todavía no ha sido determinada. Para que la salida quede completamente determinada, debemos conocer la condición inicial $y(t_0)$. Sea

$$y(t_0) = y_0$$

Entonces, de la Ecuación (2.5.5)

$$y_0 = C \exp[-at_0]$$

y, por lo tanto, para $t \geq t_0$

$$y(t) = y_0 \exp[-a(t - t_0)] + \int_{t_0}^t \exp[-a(t - \tau)]bx(\tau) d\tau$$

Si para $t < t_0$, $x(t) = 0$, la solución consta sólo de la parte homogénea:

$$y(t) = y_0 \exp[-a(t - t_0)], \quad t < t_0$$

Combinando las soluciones para $t \geq t_0$ y $t < t_0$ tenemos

$$y(t) = y_0 \exp[-a(t - t_0)] + \left\{ \int_{t_0}^t \exp[-a(t - \tau)]bx(\tau) d\tau \right\} u(t - t_0) \quad (2.5.6)$$

Como los sistemas lineales poseen la propiedad de que si la entrada es cero la salida es cero, este sistema es no lineal si $y_0 \neq 0$. Esto se puede ver fácilmente haciendo que en la Ecuación (2.5.6) $x(t) = 0$ con lo que resulta

$$y(t) = y_0 \exp[-a(t - t_0)]$$

Si $y_0 = 0$ el sistema no sólo es lineal, sino que también es invariante con el tiempo (Verifíquelo).

2.5.2. Componentes básicos de los sistemas

Todos los sistemas lineales, invariantes con el tiempo, continuos y de dimensión finita descritos por la Ecuación (2.5.1) con $M \leq N$, se pueden realizar o simular utilizando sumadores, restadores, multiplicadores escalares e integradores. Estos componentes se pueden implementar a su vez utilizando resistencias, condensadores y amplificadores operacionales.

El integrador. Es un elemento básico en la teoría de sistemas y en sus aplicaciones. Matemáticamente, la relación entrada/salida que describe a un integrador como el que se muestra en la Figura 2.5.1 es

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (2.5.7)$$

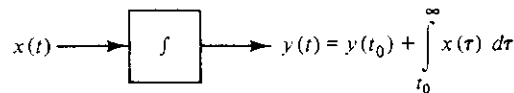


Figura 2.5.1. El integrador.

La ecuación diferencial de entrada/salida para el integrador es

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad (2.5.8)$$

Si $y(t_0) = 0$ se dice que el integrador está en reposo.

Sumadores, restadores y multiplicadores escalares. La Figura 2.5.2 ilustra estas operaciones.

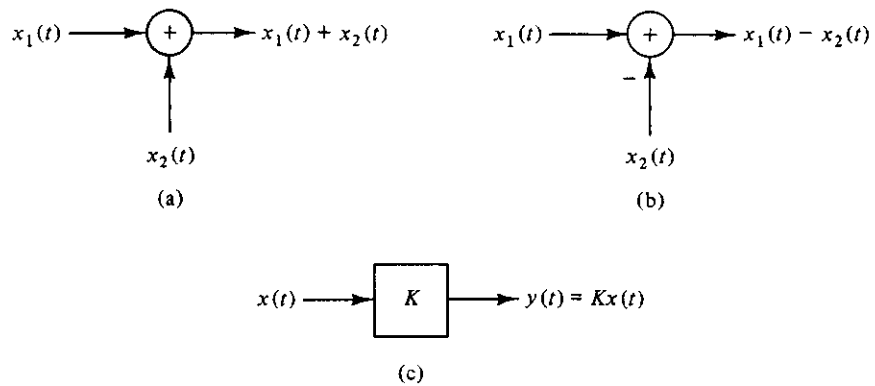


Figura 2.5.2. Componentes básicos: (a) sumador, (b) restador y (c) multiplicador escalar.

Ejemplo 2.5.2

Encontraremos la ecuación diferencial que describe el sistema de la Figura 2.5.3. Llamaremos $v_1(t)$ a la salida del primer sumador, $v_2(t)$ a la salida del segundo sumador e $y_1(t)$ a la salida del primer integrador. Entonces

$$v_2(t) = y'(t) = y_1(t) + 4y(t) + 4x(t) \quad (2.5.9)$$

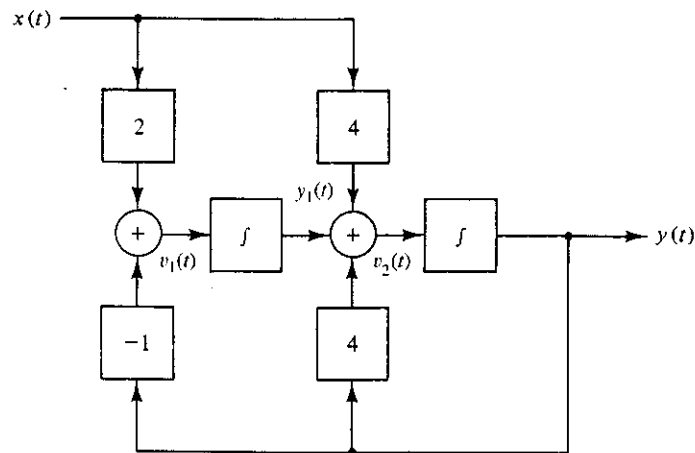


Figura 2.5.3. Realización del sistema del Ejemplo 2.5.2.

Diferenciando esta ecuación y teniendo en cuenta que $y'_1(t) = v_1(t)$ obtenemos

$$y''(t) = v'_2(t) = v_1(t) + 4y'(t) + 4x'(t) \quad (2.5.10)$$

Sustituyendo $v_1(t) = -y(t) + 2x(t)$ queda

$$y''(t) = 4y'(t) - y(t) + 4x'(t) + 2x(t) \quad (2.5.11)$$

2.5.3. Diagramas de simulación para sistemas en tiempo continuo

Consideremos el sistema lineal e invariante descrito por la Ecuación (2.5.2). Este sistema se puede realizar de varias maneras diferentes. En función de cada aplicación puede ser preferible una u otra. En esta sección vamos a obtener dos realizaciones canónicas diferentes. Cada forma canónica conducirá a una realización distinta, pero ambas son equivalentes. Para obtener la primera forma canónica supondremos que $M = N$ y escribiremos de nuevo la Ecuación (2.5.2):

$$\begin{aligned} D^N(y - b_N x) + D^{N-1}(a_{N-1}y - b_{N-1}x) + \dots \\ + D(a_1y - b_1x) + a_0y - b_0x = 0 \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Multiplicando D^{-N} por y ordenando términos obtenemos:

$$\begin{aligned} y = b_N x + D^{-1}(b_{N-1}x - a_{N-1}y) + \dots \\ + D^{-(N-1)}(b_1x - a_1y) + D^{-N}(b_0x - a_0y) \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

de donde se puede obtener el diagrama de flujo que se muestra en la Figura 2.5.4, comenzando por la derecha con la salida $y(t)$ y desplazándonos hacia la izquierda. El operador D^{-k} indica que debemos integrar k veces.

Se puede obtener otro diagrama de simulación útil transformando la ecuación diferencial de orden N en dos ecuaciones equivalentes. Sea

$$\left(D^N + \sum_{j=0}^{N-1} a_j D^j \right) v(t) = x(t) \quad (2.5.14)$$

Entonces

$$y(t) = \left(\sum_{i=0}^N b_i D^i \right) v(t) \quad (2.5.15)$$

Para verificar que estas dos ecuaciones son equivalentes a la Ecuación (2.5.2), sustituimos la Ecuación (2.5.15) en el lado izquierdo de la Ecuación (2.5.2), con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \left(D^N + \sum_{j=0}^{N-1} a_j D^j \right) y(t) &= \left(\sum_{i=0}^N b_i D^{(i+N)} + \sum_{j=0}^{N-1} a_j \sum_{i=0}^N b_i D^{(i+j)} \right) v(t) \\ &= \left(\sum_{i=0}^N b_i \left(D^{(i+N)} + \sum_{j=0}^{N-1} a_j D^{(i+j)} \right) \right) v(t) \\ &= \left(\sum_{i=0}^N b_i D^i \right) x(t) \end{aligned}$$

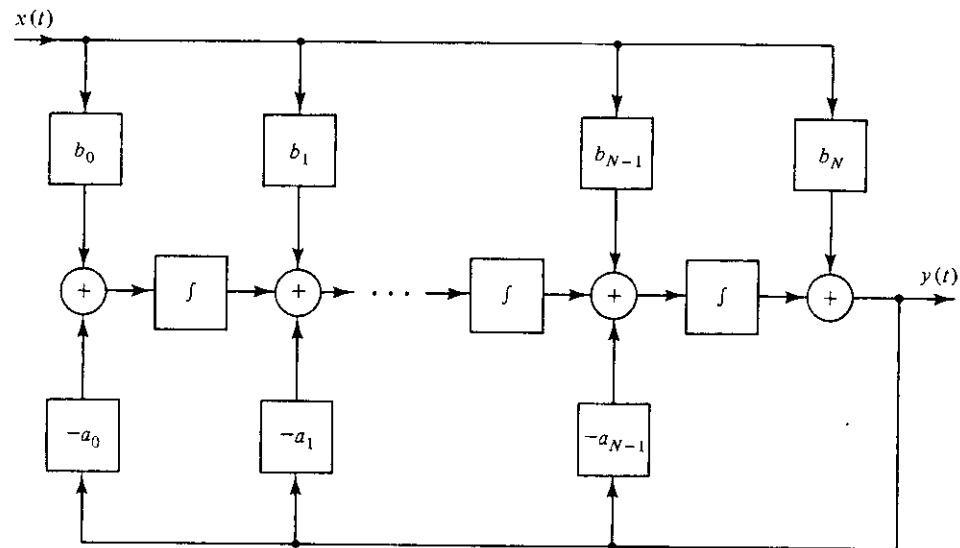


Figura 2.5.4. Diagrama de simulación mediante la primera forma canónica.

Las variables $v^{(N-1)}(t)$, ..., $v(t)$ que se utilizan para construir $y(t)$ y $x(t)$ en las Ecuaciones (2.5.14) y (2.5.15), respectivamente, se obtienen mediante integraciones sucesivas de $v^{(N)}(t)$. El diagrama de simulación correspondiente a las Ecuaciones (2.5.14) y (2.5.15) se muestra en la Figura 2.5.5. Denominaremos a esta forma de representación segunda forma canónica.

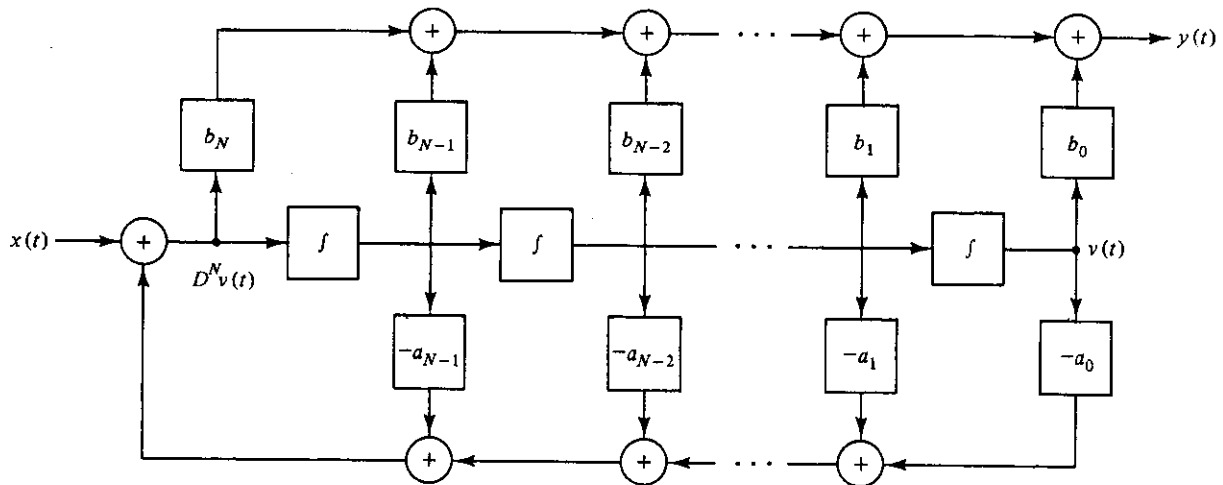


Figura 2.5.5. Diagrama de simulación mediante la segunda forma canónica.

Nótese que en la segunda forma canónica la entrada del integrador es exactamente la misma que la salida del integrador anterior. Por ejemplo, si las salidas de dos integradores sucesivos (contando a partir del lado derecho) se indican respectivamente por v_m y v_{m+1} , entonces

$$v'_m(t) = v_{m+1}(t)$$

Este hecho se utilizará en la Sección 2.6.4 para desarrollar representaciones mediante variables de estado que poseen útiles propiedades.

Ejemplo 2.5.3

Vamos a obtener el diagrama de simulación para el sistema LTI descrito por la siguiente ecuación diferencial con coeficientes constantes:

$$y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = 2x''(t) - 3x'(t) + x(t)$$

en donde $y(t)$ es la salida, y $x(t)$ es la entrada al sistema. Para obtener la primera forma canónica, reescribiremos la ecuación así:

$$D^2y(t) = 2x(t) + D^{-1}[-3x(t) - 3y(t)] + D^{-2}[x(t) - 4y(t)]$$

Integrando ambos lados dos veces con respecto a t obtenemos

$$y(t) = 2x(t) + D^{-1}[-3x(t) - 3y(t)] + D^{-2}[x(t) - 4y(t)]$$

El diagrama de simulación para esta representación se muestra en la Figura 2.5.6(a). Para la segunda forma canónica tenemos

$$v''(t) + 3v'(t) + 4v(t) = x(t)$$

y

$$y(t) = 2v''(t) - 3v'(t) + v(t)$$

que produce el diagrama de simulación de la Figura 2.5.6(b).

En la Sección 2.6 indicaremos cómo utilizar las dos formas canónicas que acabamos de describir para obtener dos representaciones diferentes utilizando variables de estado.

2.5.4. Obtención de la respuesta al impulso

La respuesta al impulso del sistema se puede determinar a partir de la ecuación diferencial que lo describe. En capítulos posteriores veremos cómo se puede encontrar la respuesta al impulso utilizando técnicas basadas en transformadas. Ya definimos la respuesta al impulso $h(t)$ como la respuesta $y(t)$ cuando la entrada es $x(t) = \delta(t)$ e $y(t) = 0$, $-\infty < t < 0$. Los ejemplos que siguen ilustran el procedimiento para determinar la respuesta al impulso a partir de la ecuación diferencial del sistema.

Ejemplo 2.5.4

Consideremos el sistema gobernado por la siguiente ecuación diferencial:

$$2y'(t) + 4y(t) = 3x(t)$$

Haciendo $x(t) = \delta(t)$ se obtiene la respuesta $y(t) = h(t)$. Por lo tanto, $h(t)$ debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$2h'(t) + 4h(t) = 3\delta(t) \quad (2.5.16)$$

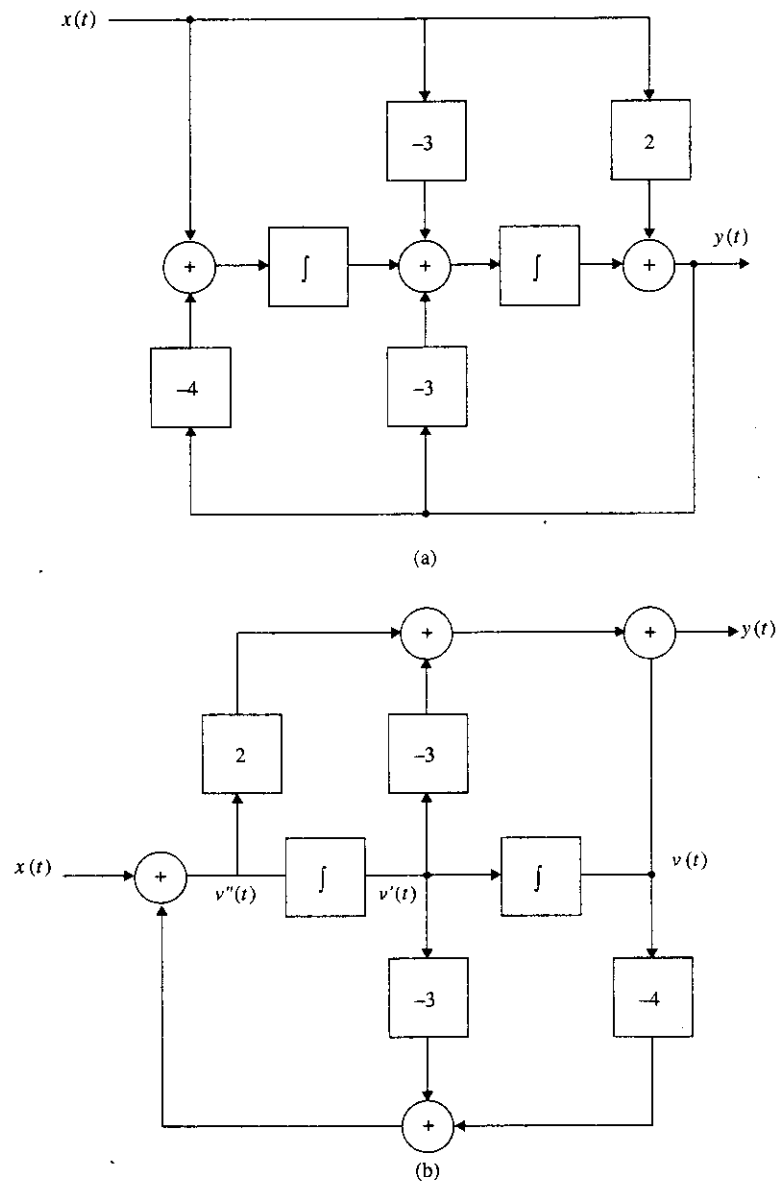


Figura 2.5.6. Diagrama de simulación del sistema de segundo orden del Ejemplo 2.5.3.

La parte homogénea de la solución de la ecuación diferencial de primer orden es

$$h(t) = C \exp[-2t]u(t) \quad (2.5.17)$$

Podemos predecir que la solución particular es cero. El motivo es que $h(t)$ no puede contener una función delta. Si así fuera, $h'(t)$ tendría una derivada de una función delta, que no es parte del lado derecho de la Ecuación (2.5.16). Para encontrar la constante C sustituimos la Ecuación (2.5.17) en la Ecuación (2.5.16) obteniendo

$$2 \frac{d}{dt} (C \exp[-2t]u(t)) + 4C \exp[-2t]u(t) = 3\delta(t)$$

Simplificando esta expresión resulta

$$2C \exp[-2t]\delta(t) = 3\delta(t)$$

que, tras aplicar la propiedad de muestreo de la función δ es equivalente a

$$2C\delta(t) = 3\delta(t)$$

por lo que $C = 1,5$. Por lo tanto, tenemos

$$h(t) = 1,5 \exp[-2t]u(t)$$

En general, se puede demostrar que para $x(t) = \delta(t)$ la solución particular de la Ecuación (2.5.2) es de la forma

$$h_p(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{M-N} C_i \delta^{(i)}(t), & M \geq N \\ 0, & M < N \end{cases}$$

donde $\delta^{(i)}(t)$ es la i -ésima derivada de la función δ . Como en la mayoría de los casos de interés práctico $N \geq M$, se deduce que en la mayoría de los casos la solución particular es como mucho una función δ .

Ejemplo 2.5.5 Consideremos el sistema de primer orden

$$y'(t) + 3y(t) = 2x(t)$$

La respuesta al impulso del sistema debería satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$h'(t) + 3h(t) = 2\delta(t)$$

La solución homogénea de esta ecuación es de la forma $C_1 \exp[-3t]u(t)$. Supongamos una solución particular de la forma $h_p(t) = C_2 \delta(t)$. La solución general es por tanto

$$h(t) = C_1 \exp[-3t]u(t) + C_2 \delta(t)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos

$$\begin{aligned} C_1[-3 \exp(-3t)u(t) + \exp(-3t)\delta(t)] \\ + C_2\delta'(t) + 3[C_1 \exp(-3t)u(t) + C_2 \delta(t)] = 2\delta(t) \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de $\delta(t)$ y de $\delta'(t)$ a ambos lados y utilizando la propiedad de desplazamiento de la función δ resulta

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 0$$

Esto está en conformidad con nuestra discusión anterior ya que en este ejemplo $M < N$ y por lo tanto, debemos esperar que $C_2 = 0$. Por lo tanto tenemos

$$h(t) = 2 \exp[-3t]u(t) \quad (2.5.18)$$

Ejemplo 2.5.6 Consideremos el sistema de segundo orden

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = x''(t) + 3x'(t) + 3x(t)$$

Las raíces características de esta ecuación diferencial son iguales a $-1 \pm j1$, por lo que la ecuación homogénea es de la forma $[C_1 \exp(-t) \cos t + C_2 \exp(-t) \sin t]u(t)$. Como en este caso $M = N$ debemos esperar que $h_p(t) = C_3 \delta(t)$. Por tanto, la respuesta al impulso es de la forma

$$h(t) = [C_1 \exp(-t) \cos t + C_2 \exp(-t) \sin t]u(t) + C_3 \delta(t)$$

de modo que

$$h'(t) = [C_2 - C_1] \exp(-t) \cos t u(t) - [C_2 + C_1] \exp(-t) \sin t u(t) + C_1 \delta(t) + C_3 \delta'(t)$$

y

$$h''(t) = -2C_2 \exp(-t) \cos t u(t) + 2C_1 \exp(-t) \sin t u(t) + (C_2 - C_1) \delta(t) + C_1 \delta'(t) + C_3 \delta''(t)$$

Sustituimos ahora las expresiones anteriores en la ecuación diferencial del sistema. Agrupando términos en $\delta(t)$, $\delta'(t)$ y $\delta''(t)$ y despejando los coeficientes C_i obtenemos

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0 \quad \text{y} \quad C_3 = 1$$

con lo que la respuesta al impulso es

$$h(t) = \exp[-t] \cos t u(t) + \delta(t) \quad (2.5.19)$$

En los Capítulos 4 y 5 utilizaremos métodos basados en transformadas para encontrar la respuesta al impulso de una forma más simple.

2.6. REPRESENTACIÓN MEDIANTE VARIABLES DE ESTADO

En la presentación que hemos hecho hasta el momento hemos caracterizado a los sistemas lineales invariantes con el tiempo, mediante sus funciones respuesta al impulso o mediante ecuaciones diferenciales que relacionan sus entradas y sus salidas. En muchas ocasiones, la respuesta al impulso es el método más conveniente para describir un sistema. Si conocemos la entrada al sistema en el intervalo $-\infty < t < \infty$, podemos obtener la salida del mismo utilizando la convolución. En el caso de utilizar la representación mediante ecuaciones diferenciales, la salida se determina en términos de un conjunto de condiciones iniciales. Si deseamos encontrar la salida en un intervalo $t_0 \leq t < t_1$, no sólo debemos conocer el valor de la entrada en este intervalo, sino también un cierto número de condiciones iniciales que debe ser suficiente para determinar la forma en la que cualquier entrada pasada (es decir, para $t \leq t_0$) afecta a la salida del sistema durante ese intervalo.

En esta sección presentaremos el método de representación de sistemas que utiliza variables de estado. La representación de los sistemas de esta forma tiene muchas ventajas:

1. Proporciona interpretaciones sobre el comportamiento del sistema que no pueden proporcionar ni el método de la respuesta al impulso ni el de la ecuación diferencial.
2. Se puede adaptar muy fácilmente para su solución utilizando computadores analógicos o digitales.
3. Se puede extender a sistemas no lineales o variantes con el tiempo.
4. Permite manejar sistemas con múltiples entradas y salidas.

La posibilidad de adaptación para solución por ordenador es, en sí misma, una razón suficiente para que los métodos de variables de estado sean ampliamente utilizados en el análisis de sistemas altamente complejos.

Definimos estado de un sistema como la mínima cantidad de información que es suficiente para determinar salida en todos los instantes $t \geq t_0$, suponiendo que se conoce la entrada en $t \leq t_0$. Las variables que contienen esta información se denominan variables de estado. Dado el estado de un sistema en t_0 y su entrada entre t_0 y t_1 , podemos encontrar la salida y el estado del sistema en t_1 . Nótese que esta definición de estado del sistema se aplica solamente a sistemas causales (sistemas en los que entradas futuras no pueden afectar a la salida).

2.6.1. Ecuaciones de estado

Consideremos el sistema en tiempo continuo de segundo orden con una sola entrada y una sola salida, descrito por la Ecuación (2.5.11). La Figura 2.5.3 muestra una realización del sistema. Como los integradores son elementos con memoria (es decir, contienen información sobre la historia pasada del sistema) resulta natural escoger las salidas de los integradores como estado del sistema en cualquier instante t . Nótese que un sistema en tiempo continuo de dimensión N se realiza con N integradores y, por tanto, queda completamente representado por N variables de estado. A menudo resulta ventajoso pensar en las variables de estado como las componentes de un vector N -dimensional que se denomina vector de estado $\mathbf{v}(t)$. A lo largo del libro utilizaremos letras minúsculas en **negrilla** para indicar vectores, y letras mayúsculas en **negrilla** para indicar matrices. En el ejemplo que estamos considerando definimos así los componentes del vector de estado $\mathbf{v}(t)$:

$$v_1(t) = y(t)$$

$$v_2(t) = v_1'(t)$$

$$v_2'(t) = -a_0 v_1(t) - a_1 v_2(t) + b_0 x(t)$$

Expresando $\mathbf{v}'(t)$ en función de $\mathbf{v}(t)$ obtenemos

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} x(t) \quad (2.6.1)$$

La salida $y(t)$ se puede expresar en términos del vector de estado $\mathbf{v}(t)$:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.6.2)$$

En esta representación, la Ecuación (2.6.1) se denomina ecuación de estado y la Ecuación (2.6.2) ecuación de salida.

De forma general, la descripción con variables de estado de un sistema invariante con el tiempo, lineal, N -dimensional, con una sola entrada y una sola salida se puede escribir de la forma

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}x(t) \quad (2.6.3)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{v}(t) + d x(t) \quad (2.6.2)$$

siendo $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada $N \times N$ con elementos constantes, $\mathbf{b}$ un vector columna $N \times 1$ y $\mathbf{c}$ un vector fila $1 \times N$. En el caso más general, $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y d son funciones del tiempo, con lo que tendremos un sistema variante con el tiempo. La solución de las ecuaciones de estado para estos sistemas requiere el uso de un computador. En este texto, limitaremos nuestra atención a sistemas invariantes con el tiempo en los que los coeficientes son constantes.

Ejemplo 2.6.1

Consideremos el circuito RLC en serie que muestra la Figura 2.6.1. Si tomamos como variables de estado la tensión en los extremos del condensador y la corriente que circula por la bobina, obtenemos las siguientes ecuaciones de estado:

$$C \frac{dv_1(t)}{dt} = v_2(t)$$

$$L \frac{dv_2(t)}{dt} = x(t) - Rv_2(t) - v_1(t)$$

$$y(t) = v_1(t)$$

En forma matricial se expresan

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{v}(t)$$

Si tomamos $C = 1/2$ y $L = R = 1$, tenemos

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{v}(t)$$

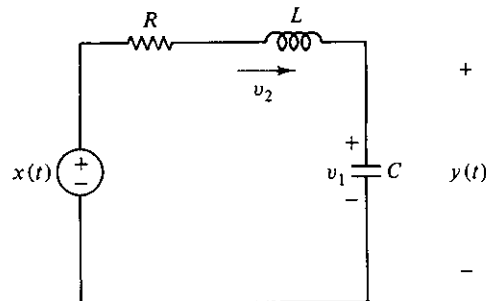


Figura 2.6.1. El circuito RLC del Ejemplo 2.6.1.

2.6.2. Solución en el dominio del tiempo de las ecuaciones de estado

Consideremos un sistema en tiempo continuo lineal, invariante con el tiempo, con una sola entrada y una sola salida, descrito por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}x(t) \quad (2.6.5)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{v}(t) + dx(t) \quad (2.6.6)$$

El vector de estado $\mathbf{v}(t)$ es una función explícita del tiempo, pero también depende implícitamente del estado inicial $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$, del instante inicial t_0 y de la entrada $x(t)$. Resolver las ecuaciones de estado significa encontrar la dependencia funcional. Por lo tanto, podemos calcular la salida $y(t)$ utilizando la Ecuación (2.6.6).

Como una generalización natural de la solución de la ecuación diferencial escalar de primer orden, esperamos que la solución de la ecuación diferencial matricial homogénea sea de la forma

$$\mathbf{v}(t) = \exp[\mathbf{A}t]\mathbf{v}_0$$

en donde $\exp[\mathbf{A}t]$ es una matriz exponencial $N \times N$ de funciones del tiempo que se define mediante la siguiente desarrollo en serie:

$$\exp[\mathbf{A}t] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} + \dots \quad (2.6.7)$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad $N \times N$. Utilizando esta definición se pueden establecer las siguientes propiedades

$$\exp[\mathbf{A}(t_1 + t_2)] = \exp[\mathbf{A}t_1] \exp[\mathbf{A}t_2] \quad (2.6.8)$$

$$[\exp[\mathbf{A}t]]^{-1} = \exp[-\mathbf{A}t] \quad (2.6.9)$$

Para demostrar la Ecuación (2.6.8) desarrollamos en serie de potencias $\exp[\mathbf{A}t_1]$ y $\exp[\mathbf{A}t_2]$, y multiplicamos términos, obteniendo

$$\begin{aligned} \exp[\mathbf{A}t_1] \exp[\mathbf{A}t_2] &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t_1 + \mathbf{A}^2 \frac{t_1^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^k \frac{t_1^k}{k!} + \dots \right] \times \\ &\quad \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t_2 + \mathbf{A}^2 \frac{t_2^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t_2^3}{3!} + \dots + \mathbf{A}^k \frac{t_2^k}{k!} + \dots \right] \\ &= \exp[\mathbf{A}(t_1 + t_2)] \end{aligned}$$

Haciendo $t_2 = -t_1 = t$ se desprende que

$$\exp[-\mathbf{A}t] \exp[\mathbf{A}t] = \mathbf{I}$$

de modo que

$$\exp[-\mathbf{A}t] = [\exp[\mathbf{A}t]]^{-1}$$

Es bien sabido que la función exponencial escalar $\exp[at]$ es la única función que posee la propiedad de que su derivada y su integral son también funciones exponenciales con cambios de escala en las amplitudes. Esta observación también es cierta para la matriz exponencial. Es necesario que la matriz $\mathbf{A}$ sea invertible para que la integral exista. Para demostrar que la derivada de $\exp[\mathbf{A}t]$ es también una matriz exponencial, diferenciamos la Ecuación (2.6.7) con respecto a t obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \exp[\mathbf{A}t] &= \mathbf{0} + \mathbf{A} + \frac{2t}{2!} \mathbf{A}^2 + \frac{3t^2}{3!} \mathbf{A}^3 + \dots + \frac{kt^{k-1}}{k!} \mathbf{A}^k + \dots \\ &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} + \dots \right] \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A} \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} + \dots \right]\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} \exp[\mathbf{A}t] = \exp[\mathbf{A}t] \mathbf{A} = \mathbf{A} \exp[\mathbf{A}t] \quad (2.6.10)$$

Multiplicando ahora la Ecuación (2.6.5) por la izquierda por $\exp[-\mathbf{A}t]$ y reordenando términos obtenemos

$$\exp[-\mathbf{A}t][\mathbf{v}'(t) - \mathbf{A} \mathbf{v}(t)] = \exp[-\mathbf{A}t] \mathbf{b}x(t)$$

Utilizando la Ecuación (2.6.10), podemos escribir la última ecuación así:

$$\frac{d}{dt} (\exp[-\mathbf{A}t] \mathbf{v}(t)) = \exp[-\mathbf{A}t] \mathbf{b}x(t) \quad (2.6.11)$$

Integrando ambos lados de la Ecuación (2.6.11) entre t_0 y t se obtiene

$$\exp[-\mathbf{A}t] \mathbf{v}(t) + \exp[-\mathbf{A}t_0] \mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^t \exp[-\mathbf{A}\tau] \mathbf{b}x(\tau) d\tau \quad (2.6.12)$$

Multiplicando la Ecuación (2.6.12) por $\exp[\mathbf{A}t]$ y reorganizando términos obtenemos la solución completa de la Ecuación (2.6.5) en la forma

$$\mathbf{v}(t) = \exp[\mathbf{A}(t - t_0)] \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \exp[\mathbf{A}(t - \tau)] \mathbf{b}x(\tau) d\tau \quad (2.6.13)$$

La matriz exponencial $\exp[\mathbf{A}t]$ se denomina matriz de transición entre estados y se representa como $\Phi(t)$. La respuesta completa de salida $y(t)$ se obtiene sustituyendo la Ecuación (2.6.13) en la Ecuación (2.6.6). El resultado es

$$y(t) = \mathbf{c} \Phi(t - t_0) \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{c} \Phi(t - \tau) \mathbf{b}x(\tau) d\tau + dx(t), \quad t \geq t_0 \quad (2.6.14)$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento del impulso unidad $\delta(t)$ podemos volver a escribir la Ecuación (2.6.14):

$$y(t) = \mathbf{c}\Phi(t - t_0)\mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \{\mathbf{c}\Phi(t - \tau)\mathbf{b} + d\delta(t - \tau)\}x(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (2.6.15)$$

Observamos que la solución completa es la suma de dos términos. El primer término es la respuesta cuando la entrada $x(t)$ es cero y se denomina respuesta a la entrada cero. El segundo término es la respuesta cuando el estado inicial $\mathbf{v}_0$ es cero y se denomina respuesta con estado cero. Una inspección más detallada de la respuesta con estado cero indica que este término es la convolución de la entrada $x(t)$ con $\mathbf{c}\Phi(t) + d\delta(t)$. Comparando este resultado con la Ecuación (2.3.3) concluimos que la respuesta al impulso de este sistema es

$$h(t) = \begin{cases} \mathbf{c}\Phi(t)\mathbf{b} + d\delta(t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.6.16)$$

Es decir, la respuesta al impulso se compone de dos términos. El primer término se debe a la contribución de la matriz de transición entre estados y el segundo término corresponde a un camino directo entre entrada y salida. La Ecuación (2.6.16) se puede utilizar para calcular directamente la respuesta al impulso a partir de las matrices de coeficientes del modelo de estados del sistema.

Ejemplo 2.6.2

Consideremos el sistema continuo lineal e invariante con el tiempo descrito por la ecuación diferencial

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t)$$

El modelo de este sistema en el espacio de estados es

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \mathbf{v}(t) \end{aligned}$$

de forma que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{c} = [1 \quad 0]$$

Para determinar la respuesta del sistema a la entrada cero con el vector específico de condiciones iniciales

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tenemos que calcular $\Phi(t)$. Las potencias de la matriz $\mathbf{A}$ son

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{bmatrix} \quad \dots$$

de forma que

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 2t & -t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 & \frac{-t^2}{2} \\ -t^2 & \frac{3t^2}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-t^3}{3} & \frac{t^3}{2} \\ t^3 & \frac{-5}{6} t^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^4}{4} & \frac{-5}{24} t^4 \\ \frac{-5}{12} t^4 & \frac{11}{24} t^4 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \dots & t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} - \frac{5}{24} t^4 + \dots \\ 2t - t^2 + t^3 - \frac{5}{12} t^4 + \dots & 1 - t + \frac{3}{2} t^2 - \frac{5}{6} t^3 + \frac{11}{24} t^4 + \dots \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La respuesta del sistema a la entrada cero es

$$\begin{aligned}y(t) &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 + t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \dots & t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} - \frac{5}{24} t^4 + \dots \\ 2t - t^2 + t^3 - \frac{5}{12} t^4 + \dots & 1 - t + \frac{3}{2} t^2 - \frac{5}{6} t^3 + \frac{11}{24} t^4 + \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 1 + t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \dots\end{aligned}$$

Y la respuesta al impulso del sistema es

$$\begin{aligned}h(t) &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 + t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \dots & t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} - \frac{5}{24} t^4 + \dots \\ 2t - t^2 + t^3 - \frac{5}{12} t^4 + \dots & 1 - t + \frac{3}{2} t^2 - \frac{5}{6} t^3 + \frac{11}{24} t^4 + \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} - \frac{5}{24} t^4 + \dots\end{aligned}$$

Nótese que para $x(t) = 0$ el estado en el instante t es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \Phi(t)\mathbf{v}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 + t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \dots \\ 2t - t^2 + t^3 - \frac{5}{12} t^4 + \dots \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ejemplo 2.6.3 Dado el sistema en tiempo continuo

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= [-1 \ 2 \ 0] \mathbf{v}(t)\end{aligned}$$

calculamos la matriz de transición y la respuesta al impulso del sistema. Utilizando la Ecuación (2.6.7) tenemos

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & -4t & 4t \\ 0 & -t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 6t^2 & -8t^2 \\ 0 & 2t^2 & -2t^2 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 - t + \frac{t^2}{2} + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 4t + 6t^2 + \dots & 4t - 8t^2 + \dots \\ 0 & -t + 2t^2 + \dots & 1 - 2t^2 + \dots \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Utilizando la Ecuación (2.6.16) encontramos que la respuesta al impulso del sistema es

$$h(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 - 11t + \frac{33}{2}t^2 + \dots$$

Observando las Ecuaciones (2.6.13), (2.6.15) y (2.6.16) resulta claro que para determinar $v(t)$, $y(t)$ o $h(t)$ debemos obtener primero $\exp[At]$. Los dos ejemplos anteriores muestran cómo se utiliza el método del desarrollo en serie para encontrar $\Phi(t) = \exp[At]$. Aunque el método es directo y el resultado es aceptable, el principal problema es que generalmente no es posible obtener una forma cerrada a partir de esta solución. Se puede utilizar otro método que se basa en el teorema de Cayley-Hamilton, que indica que para cualquier matriz arbitraria A de tamaño $N \times N$ se satisface su ecuación característica. Es decir

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

El teorema de Cayley-Hamilton nos proporciona una forma de expresar una potencia de una matriz A como combinación lineal de A^m para $m = 0, 1, \dots, N - 1$.

Ejemplo 2.6.4 Dada

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

se obtiene que

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

y la matriz dada satisface

$$A^2 - 7A + 6I = 0$$

Por lo tanto, A^2 se puede expresar en términos de A e I :

$$A^2 = 7A - 6I \quad (2.6.17)$$

También se puede obtener $\mathbf{A}^3$ multiplicando la Ecuación (2.6.17) por $\mathbf{A}$ y reordenando términos, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^3 &= 7\mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} = 7(7\mathbf{A} - 6\mathbf{I}) - 6\mathbf{A} \\ &= 43\mathbf{A} - 42\mathbf{I}\end{aligned}$$

Análogamente, se puede encontrar por este método cualquier potencia de $\mathbf{A}$ como combinación lineal de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{I}$. Es más, se puede determinar $\mathbf{A}^{-1}$, si existe, multiplicando la Ecuación (2.6.17) por $\mathbf{A}^{-1}$ y reordenando términos

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} [7\mathbf{I} - \mathbf{A}]$$

De nuestra anterior exposición se desprende que podemos utilizar el teorema de Cayley-Hamilton para escribir $\exp[\mathbf{A}t]$ como una combinación lineal de términos $(\mathbf{A}t)^i$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, es decir:

$$\exp[\mathbf{A}t] = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i(t) \mathbf{A}^i \quad (2.6.18)$$

Si $\mathbf{A}$ tiene autovalores λ_i diferentes, se puede obtener $\gamma_j(t)$ resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\exp[\lambda_j t] = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i(t) \lambda_j^i \quad j = 1, \dots, N \quad (2.6.19)$$

Si hay autovalores repetidos el procedimiento es algo más complicado, como veremos posteriormente (véase detalles en el Apéndice C).

Ejemplo 2.6.5 Supongamos que deseamos encontrar la matriz de transición de un sistema con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

utilizando el método de Cayley-Hamilton. En primer lugar calculamos los autovalores de $\mathbf{A}$ que son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = -4$. Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton podemos escribir $\exp[\mathbf{A}t]$ de la siguiente forma

$$\exp[\mathbf{A}t] = \gamma_0(t)\mathbf{I} + \gamma_1(t)\mathbf{A} + \gamma_2(t)\mathbf{A}^2$$

donde los coeficientes $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ son la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\exp[-2t] &= \gamma_0(t) - 2\gamma_1(t) + 4\gamma_2(t) \\ \exp[-3t] &= \gamma_0(t) - 3\gamma_1(t) + 9\gamma_2(t) \\ \exp[-4t] &= \gamma_0(t) - 4\gamma_1(t) + 16\gamma_2(t)\end{aligned}$$

de donde

$$\gamma_0(t) = 3 \exp[-4t] - 8 \exp[-3t] + 6 \exp[-2t]$$

$$\gamma_1(t) = \frac{5}{2} \exp[-4t] - 6 \exp[-3t] + \frac{7}{2} \exp[-2t]$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{2} (\exp[-4t] - 2 \exp[-3t] + \exp[-2t])$$

Por lo tanto, $\exp[At]$ es

$$\begin{aligned} \exp[At] &= \gamma_0(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma_1(t) \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \gamma_2(t) \begin{bmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \exp[-4t] + \frac{1}{2} \exp[-2t] & -\frac{1}{2} \exp[-4t] + \frac{1}{2} \exp[-2t] & 0 \\ -\frac{1}{2} \exp[-4t] + \frac{1}{2} \exp[-2t] & \frac{1}{2} \exp[-4t] + \frac{1}{2} \exp[-2t] & 0 \\ 0 & 0 & \exp[-3t] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6.6 Repitamos el Ejemplo 2.6.5 para un sistema con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz tiene $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Por lo tanto,

$$\Phi(t) = \exp[At] = \gamma_0(t)\mathbf{I} + \gamma_1(t)\mathbf{A} + \gamma_2(t)\mathbf{A}^2$$

Los coeficientes $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ se obtienen utilizando

$$\exp[\lambda t] = \gamma_0(t) + \gamma_1(t)\lambda + \gamma_2(t)\lambda^2 \quad (2.6.20)$$

Sin embargo, cuando en esta ecuación se utilizan los valores $\lambda = -1, -2$ y -2 , obtenemos

$$\exp[-t] = \gamma_0(t) - \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$$

$$\exp[-2t] = \gamma_0(t) - 2\gamma_1(t) + 4\gamma_2(t)$$

$$\exp[-2t] = \gamma_0(t) - 2\gamma_1(t) + 4\gamma_2(t)$$

Como hay un autovalor repetido, sólo tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas. Para determinar completamente $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ hace falta otra ecuación, que se puede generar diferenciando la Ecuación (2.6.20) con respecto a λ , con lo que se obtiene

$$t \exp[\lambda t] = \gamma_1(t) + 2\gamma_2(t)\lambda$$

Por lo tanto, los coeficientes $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ se obtienen como solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\exp[-t] &= \gamma_0(t) - \gamma_1(t) + \gamma_2(t) \\ \exp[-2t] &= \gamma_0(t) - 2\gamma_1(t) + 4\gamma_2(t) \\ t \exp[-2t] &= \gamma_1(t) - 4\gamma_2(t)\end{aligned}$$

Despejando $\gamma_i(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\gamma_0(t) &= 4 \exp[-t] - 3 \exp[-2t] - 2t \exp[-2t] \\ \gamma_1(t) &= 4 \exp[-t] - 4 \exp[-2t] - 3t \exp[-2t] \\ \gamma_2(t) &= \exp[-t] - \exp[-2t] - t \exp[-2t]\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \gamma_0(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma_1(t) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_2(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -16 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \exp[-t] & 0 & 0 \\ 0 & \exp[-2t] - 2t \exp[-2t] & 4t \exp[-2t] \\ 0 & -t \exp[-2t] & -4 \exp[-t] + 4 \exp[-2t] + 4t \exp[-2t] \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Existen otros métodos para calcular $\Phi(t)$. El lector debe tener en cuenta que no existe un método que sea más ventajoso que otros en todas las aplicaciones.

La matriz de transición entre estados posee varias propiedades. Comentamos aquí algunas de ellas:

1. Propiedad de transición

$$\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1) \Phi(t_1 - t_0) \quad (2.6.21)$$

2. Propiedad de inversión

$$\Phi(t_0 - t) = \Phi^{-1}(t - t_0) \quad (2.6.22)$$

3. Propiedad de separación

$$\Phi(t - t_0) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) \quad (2.6.23)$$

Estas propiedades se pueden obtener de forma muy sencilla utilizando las propiedades de la matriz exponencial $\exp[At]$, concretamente, las Ecuaciones (2.6.8) y (2.6.9). Por ejemplo, la propiedad de transición se puede demostrar así:

$$\begin{aligned}\Phi(t_2 - t_0) &= \exp[A(t_2 - t_0)] \\ &= \exp[A(t_2 - t_1 + t_1 - t_0)] \\ &= \exp[A(t_2 - t_1)] \exp[A(t_1 - t_0)] \\ &= \Phi(t_2 - t_1) \Phi(t_1 - t_0)\end{aligned}$$

La propiedad de inversión se desprende directamente de la Ecuación (2.6.9). Finalmente, la propiedad de separación se obtiene sustituyendo $t_2 = t$ y $t_1 = 0$ en la Ecuación (2.6.21) y utilizando seguidamente la propiedad de inversión.

2.6.3. Ecuaciones de estado en la primera forma canónica

En la Sección 2.5 presentamos algunas técnicas para encontrar dos diagramas de simulación diferentes para sistemas LTI. Estos diagramas se pueden utilizar para desarrollar dos representaciones utilizando variables de estado. La ecuación de estados en la primera forma canónica se obtiene tomando, como variable de estado, la salida de cada integrador en la Figura 2.5.4. En este caso las ecuaciones de estado tienen la forma

$$\begin{aligned} y(t) &= v_1(t) + b_N x(t) \\ v'_1(t) &= -a_{N-1} y(t) + v_2(t) + b_{N-1} x(t) \\ v'_2(t) &= -a_{N-2} y(t) + v_3(t) + b_{N-2} x(t) \\ &\vdots \\ v'_{N-1}(t) &= -a_1 y(t) + v_N(t) + b_1 x(t) \\ v'_N(t) &= -a_0 y(t) + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

Utilizando la primera de las ecuaciones en la Ecuación (2.6.64) para eliminar $y(t)$, las ecuaciones diferenciales para las variables de estado se pueden escribir en forma matricial

$$\begin{bmatrix} v'_1(t) \\ v'_2(t) \\ \vdots \\ v'_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{N-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{N-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_{N-1}(t) \\ v_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{N-1} - a_{N-1} b_N \\ b_{N-2} - a_{N-2} b_N \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_N \\ b_0 - a_0 b_N \end{bmatrix} x(t) \quad (2.6.25)$$

Llamaremos a esta forma la primera forma canónica de las ecuaciones de estado. Nótese que esta forma tiene unos por encima de la diagonal, y que la primera columna de la matriz A está formada por los coeficientes a_i con signo negativo. La salida $y(t)$ se puede escribir también en función del vector de estado $\mathbf{v}(t)$ de la siguiente forma

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{bmatrix} + b_N x(t) \quad (2.6.26)$$

Obsérvese que esta forma de representación utilizando variables de estado se puede escribir directamente a partir de la ecuación original (2.5.1).

Ejemplo 2.6.7 La primera forma canónica de la representación utilizando variables de estado del sistema LTI descrito por la ecuación

$$2y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 4x'(t) + 2x(t)$$

es

$$\begin{bmatrix} v'_1(t) \\ v'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.6.8 El sistema LTI descrito por la ecuación

$$y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) + 4y(t) = x'''(t) + 5x(t)$$

tiene como representación en primera forma canónica

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + x(t)$$

2.6.4. Ecuaciones de estado en la segunda forma canónica

A partir del diagrama de simulación de la Figura 2.5.5 se puede obtener otra forma para la representación utilizando variables de estado. Aquí también se escogen como variables de estado las salidas de cada integrador. Las ecuaciones de las variables de estado son ahora

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= v_2(t) \\ v_2'(t) &= v_3(t) \\ &\vdots \\ v_{N-1}'(t) &= v_N(t) \\ v_N'(t) &= -a_{N-1}v_N(t) - a_{N-2}v_{N-1}(t) - \dots - a_0v_1(t) + x(t) \\ y(t) &= b_0v_1(t) + b_1v_2(t) + \dots + b_{N-1}v_N(t) + \\ &\quad b_N(x(t) - a_0v_1(t) - a_1v_2(t) - \dots - a_{N-1}v_N(t)) \end{aligned} \quad (2.6.27)$$

La Ecuación (2.6.27) se puede escribir en forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (2.6.28)$$

$$y(t) = [(b_0 - a_0b_N)(b_1 - a_1b_N) \dots (b_{N-1} - a_{N-1}b_N)] \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{bmatrix} + b_N x(t) \quad (2.6.29)$$

Esta representación se denomina segunda forma canónica. Nótese que los unos están por encima de la diagonal, pero los a_i se han desplazado a la última fila de la matriz de transición $N \times N$. La segunda forma canónica se puede escribir directamente por inspección de la ecuación diferencial que describe el sistema.

Ejemplo 2.6.9 La segunda forma canónica de la ecuación de estados del sistema descrito por la ecuación

$$y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) + 4y(t) = x'''(t) + 5x(t)$$

es

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [-3 \quad -1 \quad 2] \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + x(t)$$

La primera y segunda formas canónicas sólo son dos de las múltiples representaciones posibles utilizando variables de estado para un sistema en tiempo continuo. En otras palabras, la representación utilizando variables de estado de un sistema en tiempo continuo no es única. Dado un sistema N -dimensional, existe un número infinito de modelos de estados que representan al sistema. Sin embargo, todos los modelos son equivalentes en el sentido de que tienen exactamente la misma relación entrada/salida. Matemáticamente, un sistema de ecuaciones de estado con un vector de estado $\mathbf{v}(t)$ se puede transformar en un nuevo sistema con un vector de estado $\mathbf{q}(t)$ utilizando la transformación

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{P} \mathbf{v}(t) \quad (2.6.30)$$

en donde $\mathbf{P}$ es una matriz invertible de dimensión $N \times N$, de forma que se pueda obtener $\mathbf{v}(t)$ a partir de $\mathbf{q}(t)$. Se puede demostrar (véase Problema 2.34) que las nuevas ecuaciones de estado y de salida son

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{q}(t) + \mathbf{b}_1 x(t) \quad (2.6.31)$$

$$y(t) = \mathbf{c}_1 \mathbf{q}(t) + d_1 x(t) \quad (2.6.32)$$

donde

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{P} \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{c} \mathbf{P}^{-1}, \quad d_1 = d \quad (2.6.33)$$

La única restricción sobre $\mathbf{P}$ es que tenga inversa. Como hay infinitas matrices que poseen inversa, se concluye que es posible generar un número infinito de modelos de estados N -dimensionales equivalentes.

Si consideramos $\mathbf{v}(t)$ como un vector de N coordenadas, la transformación de la Ecuación (2.6.30) representa una transformación de coordenadas que toma las coordenadas de estados anteriores y las transforma en otras nuevas. El nuevo modelo de estados puede presentar coeficientes $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{c}_1$ con formas especiales. Estas formas producen importantes simplificaciones en la solución de ciertas clases de problemas. Como ejemplos de esas formas tenemos la forma diagonal y las dos formas canónicas presentadas en este capítulo.

Ejemplo 2.6.10 Las ecuaciones de estado de cierto sistema son

$$\begin{bmatrix} v'_1(t) \\ v'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x(t)$$

Necesitamos encontrar las ecuaciones de estado de este sistema en función de las nuevas variables de estado q_1 y q_2 siendo

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

La ecuación de la variable de estados $\mathbf{q}$ viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{Pb} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.6.11 Encontramos la matriz $\mathbf{P}$ que convierte las ecuaciones de estado en segunda forma canónica

$$\begin{bmatrix} v'_1(t) \\ v'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

en las ecuaciones de estado en primera forma canónica

$$\begin{bmatrix} q'_1(t) \\ q'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} x(t)$$

Deseamos encontrar una transformación tal que $\mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{A}_1$, o

$$\mathbf{PA} = \mathbf{A}_1\mathbf{P}$$

Sustituyendo $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}_1$ obtenemos

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Igualando los cuatro elementos de ambos lados tenemos

$$\begin{aligned} -2p_{12} &= -3p_{11} + p_{21} \\ p_{11} - 3p_{12} &= -3p_{12} + p_{22} \\ -2p_{22} &= -2p_{11} \\ p_{21} - 3p_{22} &= -2p_{12} \end{aligned}$$

El lector reconocerá inmediatamente que las ecuaciones segunda y tercera son idénticas. De forma similar, las ecuaciones primera y cuarta son también idénticas. Por lo tanto, hay que descartar dos ecuaciones. Esto nos deja con sólo dos ecuaciones y cuatro incógnitas. Nótese, sin embargo, que la restricción $\mathbf{Pb} = \mathbf{b}_1$ nos proporciona dos ecuaciones adicionales:

$$\begin{aligned} p_{12} &= 7 \\ p_{22} &= 2 \end{aligned}$$

Resolviendo las cuatro ecuaciones simultáneamente obtenemos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.6.12 Si $\mathbf{A}_1$ es una matriz diagonal y los elementos de su diagonal principal son λ_i , se puede verificar fácilmente que $\exp[\mathbf{A}_1 t]$ es también una matriz diagonal, y los elementos de su diagonal principal valen $\exp[\lambda_i t]$, con lo que se pueden obtener fácilmente. Podemos utilizar este resultado para encontrar la matriz de transición para cualquier otra representación con $\mathbf{A} = \mathbf{PA}_1\mathbf{P}^{-1}$, ya que

$$\begin{aligned} \exp[\mathbf{A}t] &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{PA}_1\mathbf{P}^{-1}t + \frac{1}{2!} \mathbf{PA}_1^2\mathbf{P}^{-1}t^2 + \dots \\ &= \mathbf{P} \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}_1 t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}_1^2 t^2 + \dots \right] \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \exp[\mathbf{A}_1 t] \mathbf{P}^{-1} \end{aligned}$$

Para las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}_1$ del Ejemplo 2.6.10 se desprende que

$$\exp[\mathbf{A}_1 t] = \begin{bmatrix} \exp(6t) & 0 \\ 0 & \exp(2t) \end{bmatrix}$$

de forma que

$$\begin{aligned} \exp[\mathbf{A}t] &= \begin{bmatrix} \exp(6t) & 0 \\ 0 & \exp(2t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{6t} + e^{2t} & e^{6t} - e^{2t} \\ e^{6t} - e^{2t} & e^{6t} + e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.6.5. Consideraciones sobre estabilidad

Anteriormente en esta sección hemos encontrado una expresión general para el vector de estados $\mathbf{v}(t)$ de un sistema con una matriz de estados $\mathbf{A}$ y un estado inicial $\mathbf{v}_0$. La solución constaba de dos componentes, el primero (entrada cero) debido al estado inicial $\mathbf{v}_0$ y el segundo (estado cero) debido a la entrada $x(t)$. Para que un sistema en tiempo continuo sea estable, se requiere que no solamente la entrada, sino todas las señales internas del sistema permanezcan acotadas cuando la entrada es una señal acotada. Si al menos una de las variables de estado crece sin límite, el sistema es inestable.

Como el conjunto de los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ determina el comportamiento de $\exp[\mathbf{A}t]$, y ya que $\exp[\mathbf{A}t]$ se utiliza al evaluar los dos componentes de la expresión del vector de estados $\mathbf{v}(t)$, es de esperar que los autovalores de $\mathbf{A}$ desempeñen un papel importante en la determinación de la estabilidad del sistema. De hecho, existe una técnica para comprobar la estabilidad de sistemas en tiempo continuo sin obtener el vector de estado. Esta técnica es una consecuencia del teorema de Cayley-Hamilton. Vimos anteriormente que, utilizando este teorema, podemos escribir los elementos de $\exp[\mathbf{A}t]$, y por tanto las componentes del vector de estado en función de las exponenciales $\exp[\lambda_1 t]$, $\exp[\lambda_2 t]$, ..., $\exp[\lambda_N t]$, siendo λ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$. Para que esos términos estén acotados, la parte real de λ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ debe ser negativa. Por tanto, la condición de estabilidad de un sistema en tiempo continuo es que todos los autovalores de la matriz de transición de estados tengan su parte real negativa.

Esta conclusión también se desprende del hecho de que los autovalores de $\mathbf{A}$ coinciden con las raíces de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial que describe el modelo.

Ejemplo 2.6.13 Consideremos el sistema en tiempo continuo cuya matriz de estado es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 1$. Por lo tanto, el sistema es inestable.

Ejemplo 2.6.14 Consideremos el sistema descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= [1 \quad 1] \mathbf{v}(t) \end{aligned}$$

La Figura 2.6.2 muestra un diagrama de simulación de este sistema. Este sistema se puede considerar como una combinación en cascada de los dos sistemas rodeados por las líneas discontinuas.

Los autovalores de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$. Por lo tanto, el sistema es inestable. La matriz de transición del sistema es

$$\exp[\mathbf{A}t] = \gamma_0(t)\mathbf{I} + \gamma_1(t)\mathbf{A} \quad (2.6.34)$$

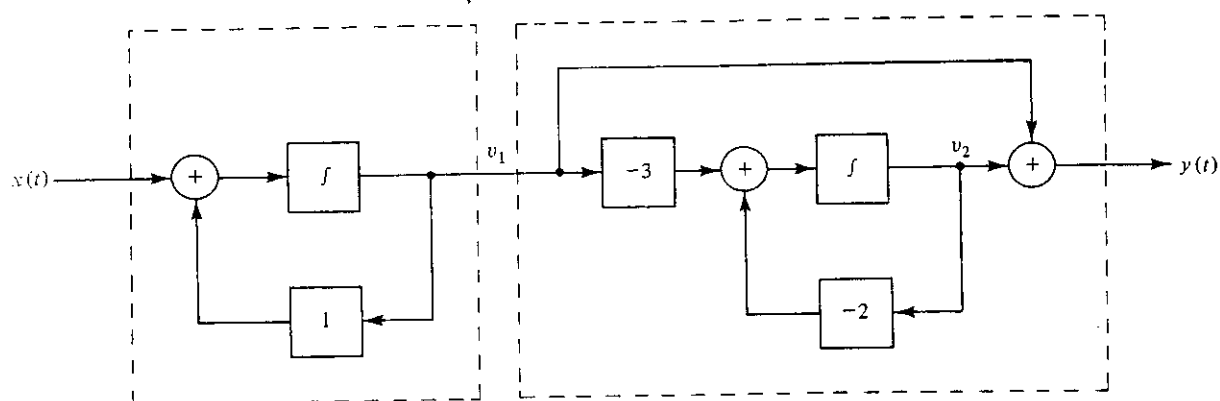


Figura 2.6.2. Diagrama de simulación del sistema del Ejemplo 2.6.13.

donde $\gamma_0(t)$ y $\gamma_1(t)$ son las soluciones de

$$\begin{aligned}\exp[t] &= \gamma_0(t) + \gamma_1(t) \\ \exp[-2t] &= \gamma_0(t) - 2\gamma_1(t)\end{aligned}$$

La resolución del sistema de ecuaciones anterior produce

$$\begin{aligned}\gamma_0(t) &= \frac{2}{3} \exp[t] + \frac{1}{3} \exp[-2t] \\ \gamma_1(t) &= \frac{1}{3} \exp[t] - \frac{1}{3} \exp[-2t]\end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ecuación (2.6.34) obtenemos

$$\exp[At] = \begin{bmatrix} \exp[t] & 0 \\ -\exp[t] + \exp[-2t] & \exp[-2t] \end{bmatrix}$$

Veamos ahora cuál es la respuesta cuando la entrada es un escalón unidad y el sistema se encuentra en reposo inicial (en el instante $t_0 = 0$). Es decir, el vector v_0 es el vector cero. La salida del sistema es entonces

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t \mathbf{c} \exp[\mathbf{A}(t - \tau)] \mathbf{b} x(\tau) d\tau \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp[-2t] \right) u(t)\end{aligned}$$

El vector de estado en cualquier instante $t > 0$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t - \tau)] \mathbf{b} x(\tau) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} (\exp[t] - 1)u(t) \\ (3/2 - \exp[t] - 1/2 \exp[-2t])u(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Resulta claro observando $y(t)$ que la salida del sistema está acotada. La inspección de las variables de estado revela que las señales internas del sistema no están acotadas. Podemos explicar lo que ha sucedido si observamos la ecuación diferencial de entrada/salida. De las ecuaciones de estado y de salida del modelo podemos obtener

$$\begin{aligned} y'(t) &= v_1'(t) + v_2'(t) \\ &= v_1(t) + x(t) - 3v_1(t) - 2v_2(t) \\ &= -2v_1(t) + x(t) - 2[y(t) - v_1(t)] \\ &= -2y(t) + x(t) \end{aligned}$$

La solución de la última ecuación diferencial de primer orden no contiene términos que crezcan sin límite. Resulta claro que el término inestable $\exp[t]$ que aparece en las variables de estado $v_1(t)$ y $v_2(t)$ no aparece en la salida $y(t)$. Este término, en cierto sentido «se cancela» en la salida del segundo sistema.

El anterior ejemplo demuestra de nuevo la importancia de la representación mediante variables de estado. Los modelos basados en variables de estado nos permiten examinar la naturaleza interna del sistema. A menudo, muchos aspectos importantes de un sistema pueden pasar inadvertidos si sólo calculamos u observamos la variable de salida. En otras palabras, las técnicas de variables de estado tienen la ventaja de que ponen de manifiesto todas las componentes internas del sistema.

2.7. RESUMEN

- Un sistema en tiempo continuo es una transformación que se aplica a una señal de entrada en tiempo continuo y produce una señal de salida en tiempo continuo.
- Un sistema es lineal si cumple el principio de superposición.
- Un sistema es invariante con el tiempo si un desplazamiento temporal de la señal de entrada produce el mismo desplazamiento temporal en la salida.
- Un sistema es sin memoria si el valor actual de la salida $y(t)$ depende únicamente del valor actual de la entrada $x(t)$.
- Un sistema es causal si la salida $y(t_0)$ depende sólo de los valores de la entrada $x(t)$ para $t \leq t_0$.
- Un sistema es invertible si observando su salida es posible determinar su entrada.
- Un sistema es estable en sentido BIBO si a entradas acotadas responde con salidas acotadas.
- Un sistema lineal e invariante (LTI) queda completamente caracterizado por su respuesta al impulso $h(t)$.
- La salida $y(t)$ de un sistema LTI es la convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso del sistema

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

- La operación de convolución sólo proporciona la respuesta del sistema en estado cero.
- El operador convolución es conmutativo, asociativo y distributivo.

- La respuesta al escalón de un sistema lineal con respuesta al impulso $h(t)$ es

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

- Un sistema LTI es causal si $h(t) = 0$ para $t < 0$. Un sistema es estable si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

- Un sistema LTI se puede describir mediante una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de la forma

$$\left(D^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i D^i\right) y(t) = \left(\sum_{i=0}^M b_i D^i\right) x(t)$$

- Un diagrama de simulación es la representación en forma de diagrama de bloques de un sistema compuesto por multiplicadores escalares (amplificadores), sumadores e integradores.
- Los sistemas se pueden simular o realizar de diferentes formas. Todas sus realizaciones son equivalentes. Dependiendo de la aplicación, puede ser preferible una u otra realización.
- La ecuación de estado de un sistema LTI, utilizando variables de estado es

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{v}(t) + \mathbf{b} x(t)$$

- La ecuación de salida de un sistema LTI en forma de variables de estado es

$$y(t) = \mathbf{c} \mathbf{v}(t) + d x(t)$$

- La matriz $\Phi(t) = \exp[\mathbf{A}t]$ se denomina matriz de transición entre estados.
- La matriz de transición entre estados posee las siguientes propiedades:

$$\text{Propiedad de transición: } \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$$

$$\text{Propiedad de inversión: } \Phi(t_0 - t) = \Phi^{-1}(t - t_0)$$

$$\text{Propiedad de separación: } \Phi(t - t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$$

- La solución en el dominio del tiempo de la ecuación de estados es

$$y(t) = \mathbf{c}\Phi(t - t_0)\mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{c}\Phi(t - \tau)\mathbf{b}x(\tau) d\tau + dx(t), \quad t \geq t_0$$

- $\Phi(t)$ se puede calcular mediante el teorema de Cayley-Hamilton, que dice que cualquier matriz $\mathbf{A}$ satisface su propia ecuación característica.
- La matriz $\mathbf{A}$ en primera forma canónica contiene unos por encima de su diagonal principal, y su primera columna consiste en los coeficientes a_i de la Ecuación (2.5.2) cambiados de signo.
- La matriz $\mathbf{A}$ en segunda forma canónica contiene unos sobre su diagonal principal, y los coeficientes a_i se sitúan en la fila inferior.
- Un sistema en tiempo continuo es estable si y sólo si todos los autovalores de la matriz de transición $\mathbf{A}$ tienen parte real negativa.

2.8. LISTA DE TÉRMINOS IMPORTANTES

Convolución	Segunda forma canónica
Diagrama de simulación	Sistema causal
Ecuación de salida	Sistema estable
Integrador	Sistema invariante con el tiempo
Matriz de transición entre estados	Sistema inverso
Multiplicador	Sistema lineal
Multiplicador escalar	Sistema lineal e invariante con el tiempo
Primera forma canónica	Sistema sin memoria
Respuesta al impulso de un sistema lineal	Sumador
Respuesta al impulso de un sistema LTI	Teorema de Cayley-Hamilton
Restador	Variable de estado

2.9. PROBLEMAS

2.1. Determinar si los sistemas descritos por las relaciones entrada/salida que siguen son lineales o no lineales, causales o no causales, variantes o invariantes con el tiempo, y con o sin memoria

(a) $y(t) = 2x(t) + 3$

(b) $y(t) = 2x^2(t) + 3x(t)$

(c) $y(t) = Ax(t)$

(d) $y(t) = Atx(t)$

(e) $y(t) = \begin{cases} x(t), & t \geq 0 \\ -x(t), & t < 0 \end{cases}$

(f) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

(g) $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$

(h) $y(t) = x(t - 5)$

(i) $y(t) = \exp[x(t)]$

(j) $y(t) = x(t)x(t - 2)$

(k) $y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau) d\tau$

(l) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x^2(t)$

2.2. Utilizando el modelo de $\delta(t)$ dado por

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{rect}(t/\Delta)$$

demostrar la Ecuación (2.3.1).

2.3. Realizar las siguientes convoluciones:

- (a) $\text{rect}(t - a/a) * \delta(t - b)$
- (b) $\text{rect}(t/a) * \text{rect}(t/a)$
- (c) $\text{rect}(t/a) * u(t)$
- (d) $\text{rect}(t/a) * \text{sgn}(t)$
- (e) $u(t) * u(t)$
- (f) $t[u(t) - u(t - 1)] * u(t)$
- (g) $\text{rect}(t/a) * r(t)$
- (h) $r(t) * [\text{sgn}(t) + u(-t - 1)]$
- (i) $[u(t + 1) - u(t - 1)] \text{sgn}(t) * u(t)$
- (j) $u(t) * \delta'(t)$

2.4. Determinar gráficamente la convolución de las parejas de señales que se muestran en la Figura P2.4.

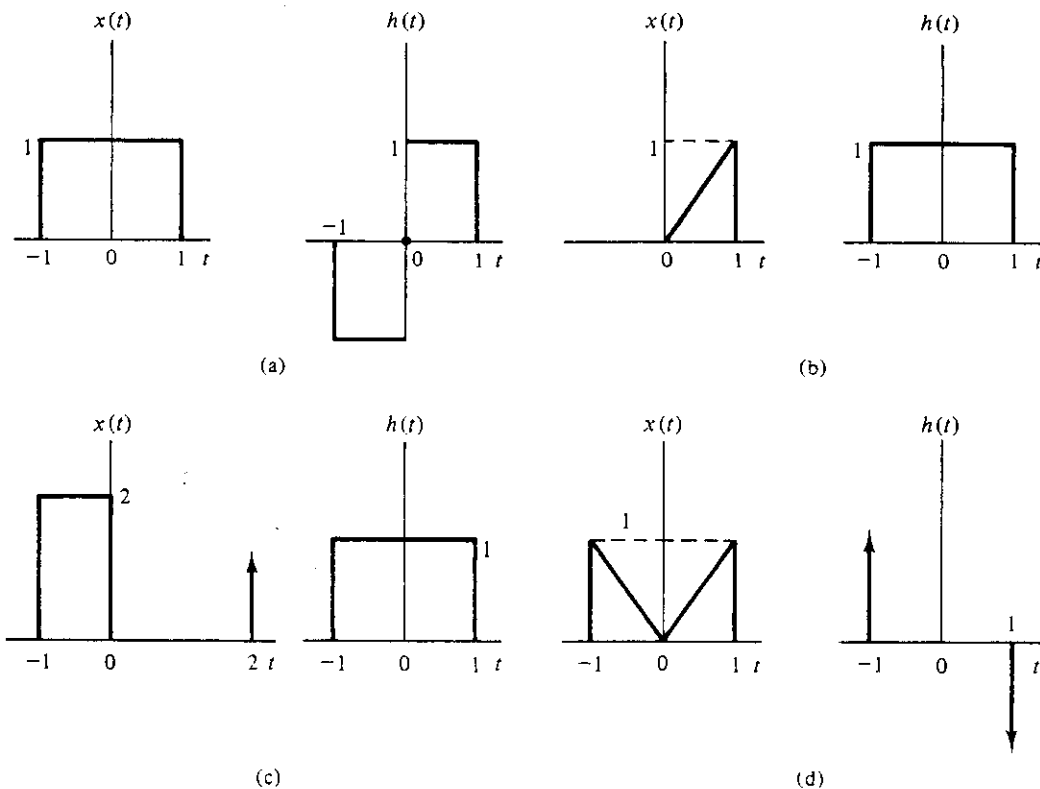


Figura P2.4.

2.5. Utilizar la integral de convolución para encontrar la respuesta $y(t)$ de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ a una entrada $x(t)$.

- | | |
|---|------------------------------------|
| (a) $x(t) = \exp[-t]u(t)$ | $h(t) = \exp[-2t]u(t)$ |
| (b) $x(t) = t \exp[-t]u(t)$ | $h(t) = u(t)$ |
| (c) $x(t) = \exp[-t]u(t) + u(t)$ | $h(t) = u(t)$ |
| (d) $x(t) = u(t)$ | $h(t) = \exp[-2t]u(t) + \delta(t)$ |
| (e) $x(t) = \exp[-at]u(t)$ | $h(t) = u(t) - \exp[-at]u(t-b)$ |
| (f) $x(t) = \delta(t-1) + \exp[-t]u(t)$ | $h(t) = \exp[-2t]u(t)$ |

2.6. La correlación cruzada de dos señales diferentes se define así:

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau-t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau+t)y(\tau) d\tau$$

(a) Demostrar que

$$R_{xy}(t) = x(t) * y(-t)$$

(b) Demostrar que la correlación cruzada no tiene la propiedad conmutativa.

(c) Demostrar que $R_{xy}(t)$ es simétrica ($R_{xy}(t) = R_{yx}(-t)$).

2.7. Encontrar la correlación cruzada entre una señal $x(t)$ y la señal $y(t) = x(t-1) + n(t)$ para $B/A = 0; 0,1$ y 1 , donde $x(t)$ y $n(t)$ se muestran en la Figura P2.7.

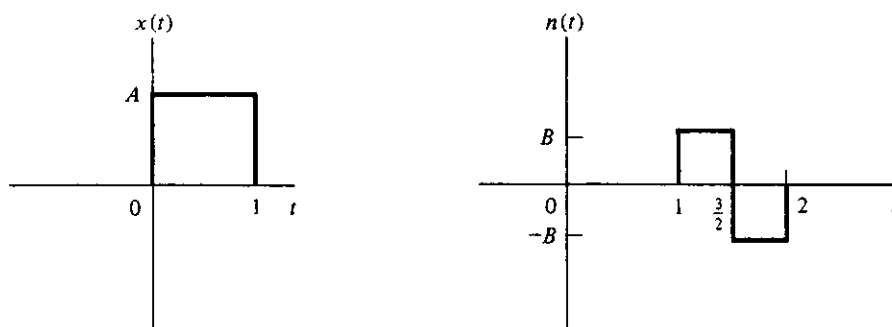


Figura P2.7.

2.8. La autocorrelación es un caso especial de la correlación cruzada cuando $y(t) = x(t)$. En este caso

$$R_x(t) = R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(\tau+t) d\tau$$

(a) Demostrar que

$$R_x(0) = E, \quad \text{la energía de } x(t)$$

(b) Demostrar que

$$R_x(t) \leq R_x(0) \quad (\text{utilizar la desigualdad de Schwarz})$$

(c) Demostrar que la autocorrelación de $x(t) = x(t) + y(t)$ es

$$R_z(t) = R_x(t) + R_y(t) + R_{xy}(t) + R_{yx}(t)$$

- 2.9. Consideremos un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$. Sean $x(t)$ e $y(t)$ la entrada y la salida del sistema, respectivamente. Demostrar que

$$R_y(t) = R_x(t) * h(t) * h(-t)$$

- 2.10. La entrada de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ es la exponencial compleja $\exp[j\omega t]$. Demostrar que la salida correspondiente es

$$y(t) = \exp[j\omega t]H(\omega)$$

siendo

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp[-j\omega t] dt$$

- 2.11. Determinar si los siguientes sistemas LTI en tiempo continuo caracterizados por sus respuestas al impulso son causales o no causales, y estables o inestables. Justificar las respuestas.

- (a) $h(t) = \exp[-3t] \sin(t)u(t)$
- (b) $h(t) = \exp[4t]u(-t)$
- (c) $h(t) = (-t) \exp[-t]u(-t)$
- (d) $h(t) = \exp[-|2t|]$
- (e) $h(t) = |t-2| \exp[-|2t|]$
- (f) $h(t) = \text{rect}[t/2]$
- (g) $h(t) = \delta(t) + \exp[-3t]u(t)$
- (h) $h(t) = \delta'(t) + \exp[-2t]$
- (i) $h(t) = \delta'(t) + \exp[-|2t|]$
- (j) $h(t) = (1-t) \text{rect}(t/3)$

- 2.12. Determinar si las siguientes respuestas al impulso son o no invertibles. Para las que lo sean, encontrar el sistema inverso.

- (a) $h(t) = \delta(t+2)$
- (b) $h(t) = u(t)$
- (c) $h(t) = \delta(t-3)$
- (d) $h(t) = \text{rect}(t/4)$
- (e) $h(t) = \exp[-t]u(t)$

- 2.13. Consideremos los dos sistemas que se muestran en las Figuras P2.13(a) y P2.13(b). El sistema I actúa sobre $x(t)$ y da una salida $y_1(t)$ que es óptima de acuerdo con un determinado criterio. El sistema II actúa primero sobre $x(t)$ con una operación invertible (subsistema I) obteniéndose $z(t)$, y posteriormente actúa sobre $z(t)$ para obtener la salida $y_2(t)$ mediante una operación que es óptima de acuerdo al mismo criterio que en el sistema I.

- (a) ¿Puede comportarse mejor el sistema II que el sistema I? [No olvidar el supuesto de que el sistema I realiza la operación óptima sobre $x(t)$.]
- (b) Sustituir la operación óptima sobre $z(t)$ por dos subsistemas, como muestra la Figura P2.13(c). El sistema resultante funciona ahora tan bien como el siste-

ma I. ¿Puede el nuevo sistema ser mejor que el sistema II? [Recuérdese que el sistema II realiza la operación óptima sobre $z(t)$.]

(c) ¿Qué se concluye de los Apartados (a) y (b)?

(d) ¿Tiene que ser el sistema lineal para que el Apartado (c) sea cierto?

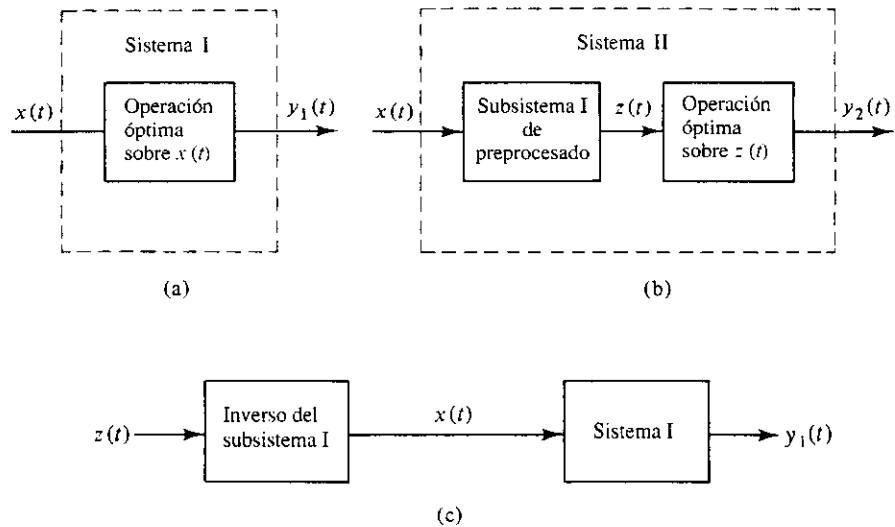


Figura P2.13.

2.14. Determinar si el sistema de la Figura P2.14 es estable en sentido BIBO.

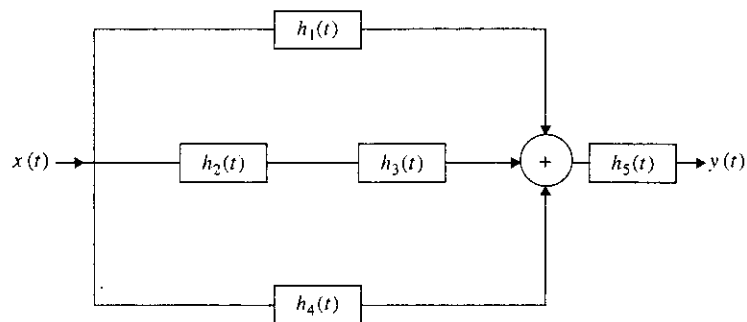


Figura P2.14.

$$h_1(t) = \exp[-2t]u(t)$$

$$h_2(t) = \exp[-2t]u(t)$$

$$h_3(t) = \exp[-t]u(t)$$

$$h_4(t) = \delta(t)$$

$$h_5(t) = \exp[-3t]u(t)$$

2.15. La entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ de un sistema lineal invariante con el tiempo se muestran en la Figura P2.15. Dibujar las respuestas a las siguientes entradas:

- (a) $x(t + 2)$
- (b) $2x(t) + 3x(-t)$
- (c) $x(t - 1/2) - x(t + 1/2)$
- (d) $\frac{dx(t)}{dt}$

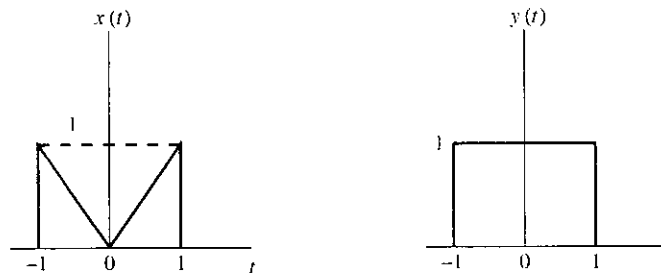


Figura P2.15.

- 2.16. Encontrar la respuesta al impulso del sistema en reposo inicial que se muestra en la Figura P2.16.

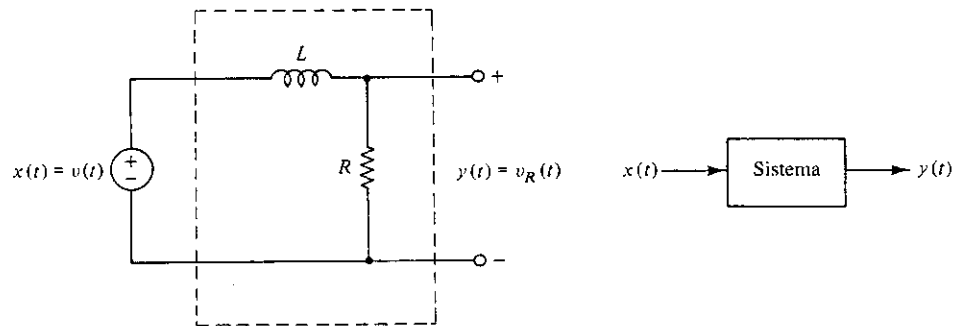


Figura P2.16.

- 2.17. Encontrar la respuesta al impulso del sistema en reposo inicial que se muestra en la Figura P2.17. Utilizar este resultado para encontrar la salida del sistema cuando la entrada es

- (a) $u\left(t - \frac{\theta}{2}\right)$
- (b) $u\left(t + \frac{\theta}{2}\right)$
- (c) $\text{rect}(t/\theta)$, donde $\theta = 1/RC$

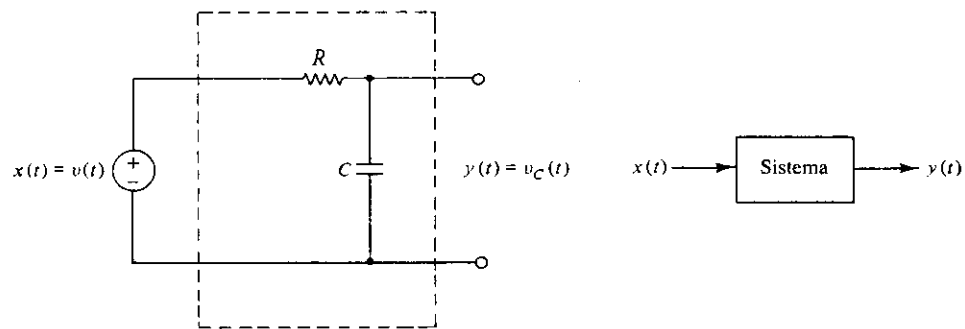


Figura P2.17.

2.18. Repetir el Problema 2.17 con el circuito que se muestra en la Figura P2.18.

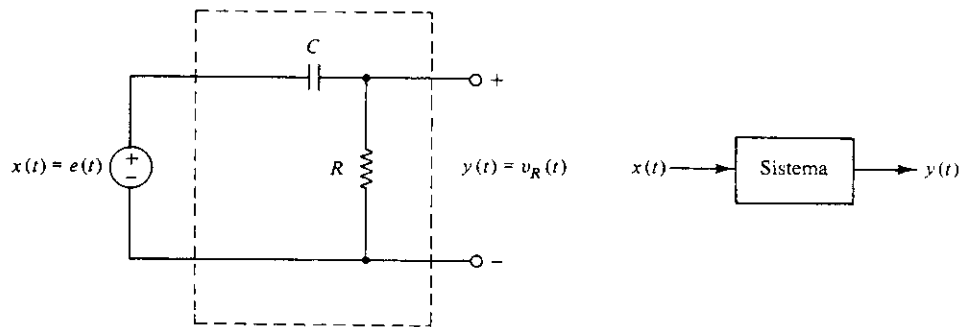


Figura P2.18.

2.19. Demostrar que cualquier sistema que se pueda describir mediante una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \sum_{k=0}^{N-1} a_k(t) \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k(t) \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

es lineal. (Suponiendo condiciones iniciales nulas.)

2.20. Demostrar que cualquier sistema que se pueda describir mediante la ecuación diferencial del Problema 2.19 es invariante con el tiempo. Supóngase que todos los coeficientes son constantes.

2.21. Un vehículo de masa M viaja por una superficie pavimentada con coeficiente de rozamiento k . Supongamos que la posición del coche en el instante t relativa algún sistema de referencia, es $y(t)$, y que la fuerza de tracción que se aplica al vehículo es $x(t)$. Utilizando la segunda ley de Newton sobre el movimiento, escribir la ecuación diferencial que describe el sistema. Demostrar que el sistema es un sistema LTI. ¿Podría ser variante con el tiempo?

2.22. Consideremos un péndulo de longitud l y masa M como se muestra en la Figura P2.22. El desplazamiento desde la posición de equilibrio es $l\theta$. Por lo tanto, la

aceleración es $l\theta''$. La entrada $x(t)$ es la fuerza aplicada a la masa M en sentido tangencial a la dirección de movimiento de la masa. La fuerza de retorno es la componente tangencial de $Mg \sin \theta$. Despreciando la masa del hilo y la resistencia del aire, utilizar la segunda ley de Newton sobre el movimiento para escribir la ecuación diferencial que describe el sistema. ¿Es un sistema lineal? Como aproximación, suponga que θ es lo suficientemente pequeño para que $\sin \theta = \theta$. ¿Es ahora el sistema lineal?

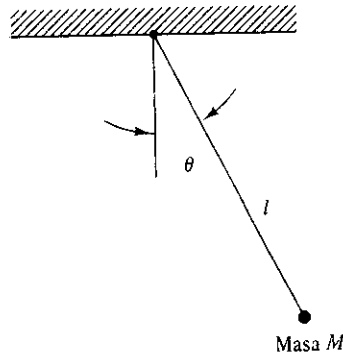


Figura P2.22.

- 2.23. Dado el sistema realizado por interconexión de componentes que se muestra en la Figura P2.23, encontrar la ecuación diferencial que relaciona la entrada $x(t)$ con la salida $y(t)$.

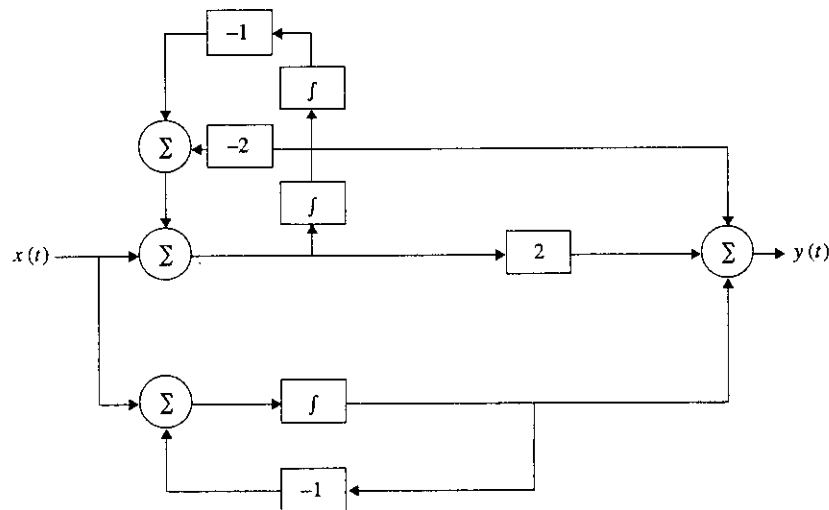


Figura P2.23.

- 2.24. Dado el sistema simulado por el diagrama de bloques que se muestra en la Figura P2.24, determinar la ecuación diferencial que lo describe.

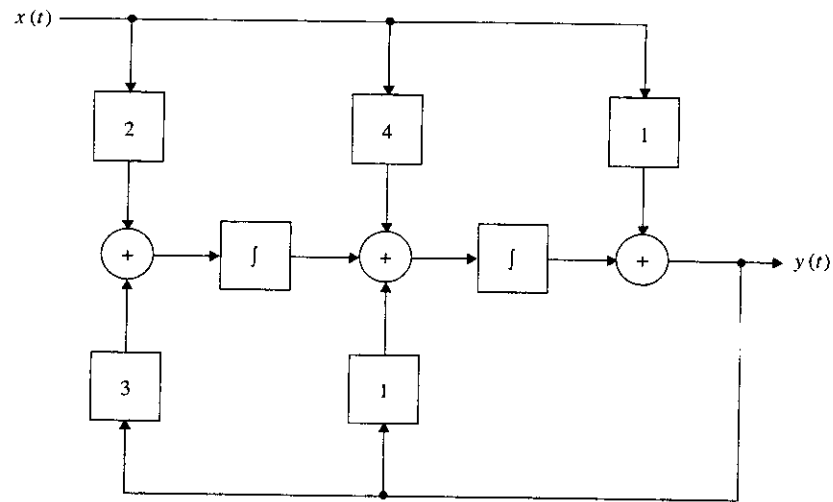


Figura P2.24.

2.25. Considere el circuito serie RLC que se muestra en la Figura P2.25.

- Determinar la ecuación diferencial de segundo orden que describe al sistema.
- Determinar los diagramas de simulación en primera y segunda forma canónica.

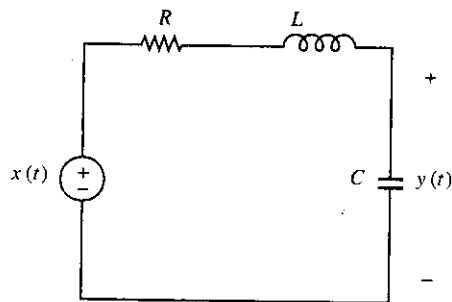


Figura P2.25.

2.26. Dado un sistema LTI descrito por la ecuación

$$y'''(t) + 3y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 3x''(t) - x(t)$$

Encontrar los diagramas de simulación en primera y segunda forma canónica.

2.27. Encontrar la respuesta al impulso del sistema en reposo inicial que se muestra en la Figura P2.27.

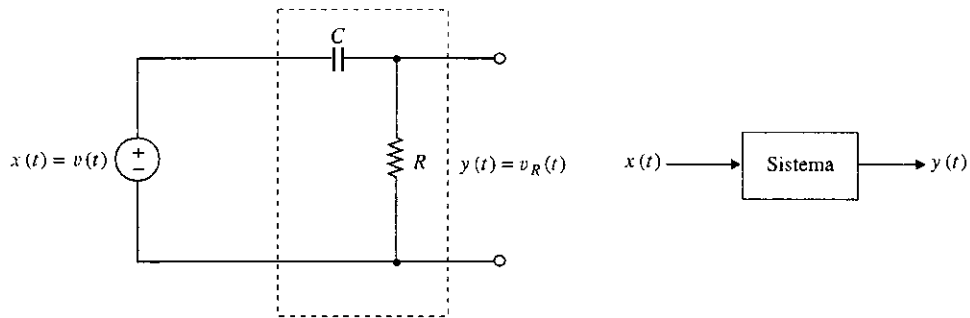


Figura P2.27.

- 2.28. Encontrar las ecuaciones de estado en primera y segunda forma canónica del sistema descrito por la ecuación diferencial

$$y''(t) + 2,5y'(t) + y(t) = x'(t) + x(t)$$

- 2.29. Dado el circuito de la Figura P2.29, escoger la corriente de la bobina y la tensión del condensador como variables de estado, y escribir las ecuaciones de estado.

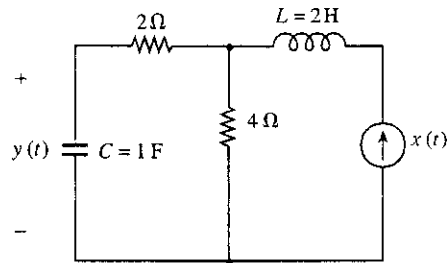


Figura P2.29.

- 2.30. Repetir el Problema 2.28 para el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$y'''(t) + y''(t) - 2y(t) = x'(t) - 2x(t)$$

- 2.31. Calcular $\exp[At]$ para las siguientes matrices. Utilizar el método del desarrollo en serie y el teorema de Cayley-Hamilton.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

- 2.32. Utilizando técnicas de variables de estado, encontrar la respuesta al impulso para el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = x'(t) + x(t)$$

Suponga que el sistema está en reposo inicial, es decir, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.

- 2.33. Utilizando técnicas de variables de estado, encontrar la respuesta al impulso del sistema descrito por la ecuación

$$y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = x''(t) - 3x'(t) + 4x(t)$$

Suponga que el sistema está en reposo inicial, es decir, $y'(0) = 0$ e $y(0) = 0$.

- 2.34. Consideremos el sistema descrito por las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}x(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{v}(t) + dx(t)$$

Empleando el cambio de variable dado por

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}\mathbf{v}(t)$$

siendo $\mathbf{P}$ una matriz cuadrada cuya inversa es $\mathbf{P}^{-1}$. Demostrar que las nuevas ecuaciones de estado son

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_1x(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}_1\mathbf{z}(t) + d_1x(t)$$

donde

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{P}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}\mathbf{P}^{-1}$$

$$d_1 = d$$

- 2.35. Consideremos el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) - x(t)$$

- (a) Escribir las ecuaciones de estado en primera forma canónica.
- (b) Escribir las ecuaciones de estado en segunda forma canónica.
- (c) Utilizando los resultados del Problema 2.34, encontrar la matriz $\mathbf{P}$ que transforma la primera forma canónica en la segunda.
- (d) Encontrar las ecuaciones de estado si se transforma la segunda forma canónica utilizando la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Series de Fourier

3.1. INTRODUCCIÓN

Como hemos visto en el capítulo anterior, se puede obtener la respuesta de un sistema lineal a una entrada arbitraria representando dicha entrada en función de señales básicas. Concretamente, las señales básicas utilizadas son funciones δ desplazadas. Muchas veces es conveniente escoger como señales básicas un conjunto de funciones ortogonales. Existen varias razones para proceder así. En primer lugar, resulta matemáticamente conveniente representar una señal arbitraria como una suma ponderada de funciones ortogonales, ya que entonces, muchas de las operaciones que se realizan sobre dicha señal se simplifican. En segundo lugar, la señal se puede representar como un vector en un sistema de coordenadas ortogonal, en el que las funciones ortogonales son las coordenadas. Finalmente, la representación mediante una base de funciones ortogonales proporciona medios convenientes para encontrar la respuesta de sistemas lineales a entradas arbitrarias. En este capítulo vamos a considerar la representación de una señal arbitraria en un intervalo finito utilizando una base formada por un conjunto de funciones ortogonales.

Para el caso de señales periódicas, resulta conveniente escoger como base ortogonal el conjunto de las exponenciales complejas armónicamente relacionadas. Esta elección resulta apropiada porque estas exponenciales complejas son funciones periódicas, relativamente sencillas de manejar matemáticamente, y producen resultados que tienen significado físico. La representación de una señal periódica utilizando exponenciales complejas, o lo que es lo mismo, utilizando funciones senos y cosenos, conduce directamente a desarrollo en serie de Fourier, ampliamente utilizado en todos los campos de la ciencia y la ingeniería. El nombre de desarrollo en serie de Fourier se debe al físico francés Jean Baptiste Fourier (1768-1830), que fue el primero en sugerir que las señales periódicas se podían representar como una suma de sinusoides.

Hasta el momento, sólo hemos considerado descripciones de las señales y los sistemas en el dominio del tiempo. En este capítulo vamos a presentar el concepto de representación en el dominio de la frecuencia. Aprenderemos a descomponer señales periódicas en sus componentes en frecuencia. Estos resultados se pueden extender a señales no periódicas, como veremos en el Capítulo 4.

Las señales periódicas aparecen en un amplio conjunto de fenómenos físicos. Podemos poner algunos ejemplos, como muchos tipos de ondas acústicas y electromagnéticas, el desplazamiento vertical de un péndulo mecánico, las vibraciones periódicas de los instrumentos musicales, y los bellos diseños de las estructuras cristalinas.

En este capítulo presentaremos conceptos, hechos y técnicas básicas relacionadas con el desarrollo en serie de Fourier. Incluiremos ejemplos ilustrativos y algunas aplicaciones importantes en el campo de la ingeniería. Comenzaremos considerando en la Sección 3.2 las funciones que forman una base ortogonal. En la Sección 3.3, trataremos las señales periódicas y desarrollaremos procedimientos para representar dichas señales como una combinación lineal de exponenciales complejas. En la Sección 3.4, hablaremos de las condiciones suficientes para que una señal periódica se pueda representar mediante un desarrollo en serie de Fourier. Estas condiciones se conocen como las condiciones de Dirichlet. Afortunadamente, todas las señales periódicas con las que tratamos en la práctica cumplen estas condiciones. Como muchas otras herramientas matemáticas, las series de Fourier poseen varias propiedades de utilidad. Estas propiedades se explican en la Sección 3.5. La comprensión de estas propiedades nos ayudará a trasladarnos fácilmente del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, y viceversa. En la Sección 3.6, utilizaremos las propiedades de las series de Fourier para encontrar la respuesta de los sistemas LTI a señales periódicas. Los efectos de truncar el desarrollo en serie de Fourier y el fenómeno de Gibbs se presentan en la Sección 3.7. Veremos que siempre que intentamos reconstruir una señal discontinua a partir de su desarrollo en serie de Fourier, encontramos un comportamiento oscilatorio extraño en las discontinuidades. Este comportamiento extraño no desaparece del todo, aunque aumentemos el número de términos utilizados para reconstruir la señal.

3.2. REPRESENTACIONES ORTOGONALES DE SEÑALES

Las representaciones ortogonales de señales son de importancia general en la resolución de muchos problemas de ingeniería. Dos de las razones son que resulta matemáticamente conveniente representar señales arbitrarias como una suma ponderada de funciones ortogonales, ya que muchos cálculos relacionados con esas señales se simplifican, y que es posible visualizar las señales como vectores en un sistema de coordenadas ortogonal en el que las funciones ortogonales representan los vectores unitarios.

Un conjunto de señales ϕ_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, se denomina ortogonal en un intervalo (a, b) si

$$\int_a^b \phi_l(t) \phi_k^* dt = \begin{cases} E_k, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases} = E_k \delta(l - k) \quad (3.2.1)$$

donde $\phi_k^*(t)$ indica el complejo conjugado de la señal y $\delta(l - k)$ es la función delta de Kronecker, definida así:

$$\delta(l - k) = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Si $\phi_i(t)$ corresponde a una señal de tensión o de corriente que se aplica sobre una carga resistiva de 1 ohmio, la Ecuación (1.4.1) indica que E_k es la energía disipada en la carga en $b - a$ segundos debido a la aplicación de la señal $\phi_i(t)$. Si todas las constantes E_k son igual-

les a 1, las señales $\phi_i(t)$ se denominan ortonormales. Se puede normalizar cualquier conjunto de señales $\phi_i(t)$ sin más que dividir cada señal por $\sqrt{E_i}$.

Ejemplo 3.2.1

Las señales $\phi_m(t) = \sin mt$, $m = 1, 2, 3, \dots$ forman un conjunto ortogonal en el intervalo $-\pi < t < \pi$, ya que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(t) \phi_n^*(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin mt)(\sin nt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)t dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)t dt \\ &= \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

Como la energía de cada señal es igual a π , el siguiente conjunto de señales es un conjunto ortonormal en el intervalo $-\pi < t < \pi$

$$\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3t}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Ejemplo 3.2.2

Las señales $\phi_k(t) = \exp[(j2\pi kt)/T]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ forman un conjunto ortogonal en el intervalo $(0, T)$ ya que

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi_l(t) \phi_k^*(t) dt &= \int_0^T \exp\left[\frac{j(2\pi lt)}{T}\right] \exp\left[-\frac{j(2\pi kt)}{T}\right] dt \\ &= \begin{cases} T, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

y, por tanto, las señales $(1/\sqrt{T}) \exp[(j2\pi kt)/T]$ constituyen un conjunto ortonormal en el intervalo $0 < t < T$.

Ejemplo 3.2.3

Las tres señales que se muestran en la Figura 3.2.1 son ortonormales, ya que son mutuamente ortogonales y todas tienen energía unidad.

Los conjuntos ortonormales resultan de utilidad, ya que producen desarrollos en serie de señales que son relativamente simples. Sea $\phi_i(t)$ un conjunto de señales ortonormal en el intervalo $a < t < b$, y sea $x(t)$ una señal dada con energía finita en un determinado intervalo. Podemos representar $x(t)$ en función de $\{\phi_i\}$ utilizando una serie convergente

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \phi_i(t) \quad (3.2.3)$$

donde

$$c_k = \int_a^b x(t) \phi_k^*(t) dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2.4)$$

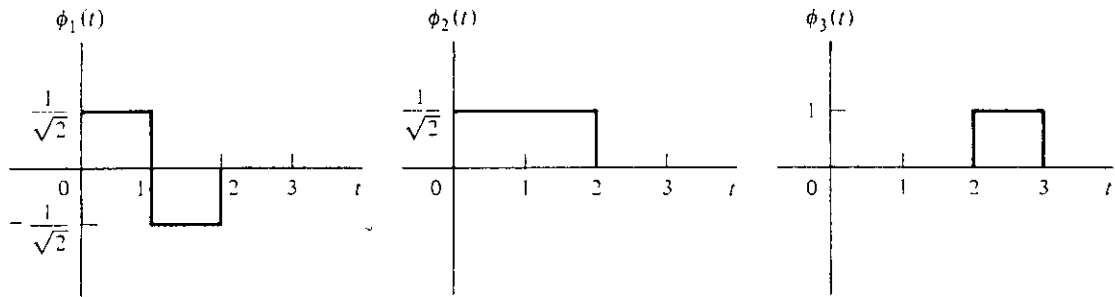


Figura 3.2.1. Tres señales ortonormales.

La Ecuación (3.2.4) se obtiene multiplicando la Ecuación (3.2.3) por $\phi_k^*(t)$ e integrando el resultado en el rango de definición de $x(t)$. Nótese que los coeficientes se pueden calcular independientemente uno de otro. Si el conjunto $\phi_i(t)$ sólo es ortogonal, la Ecuación (3.2.4) toma la forma (véase Problema 3.5)

$$c_i = \frac{1}{E_i} \int_a^b x(t) \phi_i^*(t) dt \quad (3.2.5)$$

El desarrollo en serie que representa la Ecuación (3.2.3) se denomina desarrollo en serie de Fourier generalizado de $x(t)$ y las constantes c_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ se denominan coeficientes de Fourier con respecto al conjunto ortonormal $\{\phi_i(t)\}$.

En general, la representación de una señal arbitraria mediante un desarrollo en serie de la forma mostrada en la Ecuación (3.2.3), requiere una suma infinita en el lado derecho de la ecuación. Sin embargo, en la práctica, sólo podemos utilizar un número finito de términos. Cuando truncamos la suma infinita utilizando un número finito de términos, obtenemos una aproximación $\hat{x}(t)$ a la señal $x(t)$. Cuando utilizamos sólo M términos, el error de representación es

$$e_M(t) = x(t) - \sum_{i=1}^M c_i \phi_i(t) \quad (3.2.6)$$

La energía del error es

$$E_e(M) = \int_a^b |e_M(t)|^2 dt = \int_a^b |x(t) - \sum_{i=1}^M c_i \phi_i(t)|^2 dt \quad (3.2.7)$$

Se puede demostrar que para todo M la elección de c_k de acuerdo a la Ecuación (3.2.4) minimiza la energía del error e_M (véase Problema 3.4).

Ciertas clases de señales, por ejemplo las señales de comunicaciones digitales de longitud finita, admiten un desarrollo en términos de un número finito de funciones ortogonales $\{\phi_i(t)\}$. En este caso, $i = 1, 2, \dots, N$, siendo N la dimensión del conjunto de señales. El desarrollo en serie se reduce entonces a

$$x(t) = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Phi}(t) \quad (3.2.8)$$

donde los vectores $\mathbf{x}$ y $\boldsymbol{\Phi}(t)$ se definen así:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [c_1, c_2, \dots, c_N]^T \\ \boldsymbol{\Phi}(t) &= [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)]^T \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

y el superíndice T indica vector traspuesto. La energía normalizada de $x(t)$ en el intervalo $a < t < b$ es

$$\begin{aligned} E_x &= \int_a^b |x(t)|^2 dt = \int_a^b \left| \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(t) \right|^2 dt \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N c_k c_n^* \int_a^b \phi_k(t) \phi_n^*(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^N |c_i|^2 E_i \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Este resultado relaciona la energía de la señal $x(t)$ con la suma de los cuadrados de los coeficientes del desarrollo en serie de funciones ortogonales, modificados por la energía en cada coordenada E_i . Si se utilizan señales ortogonales, tenemos que $E_i = 1$, y la Ecuación (3.2.10) se reduce a

$$E_x = \sum_{i=1}^N |c_i|^2$$

En términos del vector de coeficientes $\mathbf{x}$ se puede escribir así

$$E_x = (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{x} \quad (3.2.11)$$

donde $\dagger$ indica traspuesta conjugada $[(\)^*]^T$. Esto es un caso especial de una relación conocida como teorema de Parseval, que consideraremos con más detalle en la Sección 3.5.6.

Ejemplo 3.2.4

En este ejemplo examinaremos la representación de una señal de duración finita mediante una base de funciones ortogonales. Consideremos las cuatro señales definidas en el intervalo $(0, 3)$ que se muestran en la Figura 3.2.2(a). Estas señales no son ortogonales, pero se pueden representar mediante las tres funciones ortogonales que se muestran en la Figura 3.2.2(b), ya que mediante las tres señales de la base se pueden representar las cuatro señales de la Figura 3.2.2(a).

Los coeficientes que representan la señal $x_1(t)$, obtenidos mediante la Ecuación (3.2.4) son

$$c_{11} = \int_0^3 x_1(t) \phi_1^*(t) dt = 2$$

$$c_{12} = \int_0^3 x_1(t) \phi_2^*(t) dt = 0$$

$$c_{13} = \int_0^3 x_1(t) \phi_3^*(t) dt = 1$$

En notación vectorial, $\mathbf{x}_1 = [2, 0, 1]^T$. De forma similar podemos calcular los coeficientes de $x_2(t)$, $x_3(t)$ y $x_4(t)$, que valen

$$\begin{aligned} x_{21} &= 1, & x_{22} &= 1, & x_{23} &= 0, & \text{o} & \mathbf{x}_2 &= [1, 1, 0]^T \\ x_{31} &= 0, & x_{32} &= 1, & x_{33} &= 1, & \text{o} & \mathbf{x}_3 &= [0, 1, 1]^T \\ x_{41} &= 0, & x_{42} &= -1, & x_{43} &= 1, & \text{o} & \mathbf{x}_4 &= [1, -1, 2]^T \end{aligned}$$

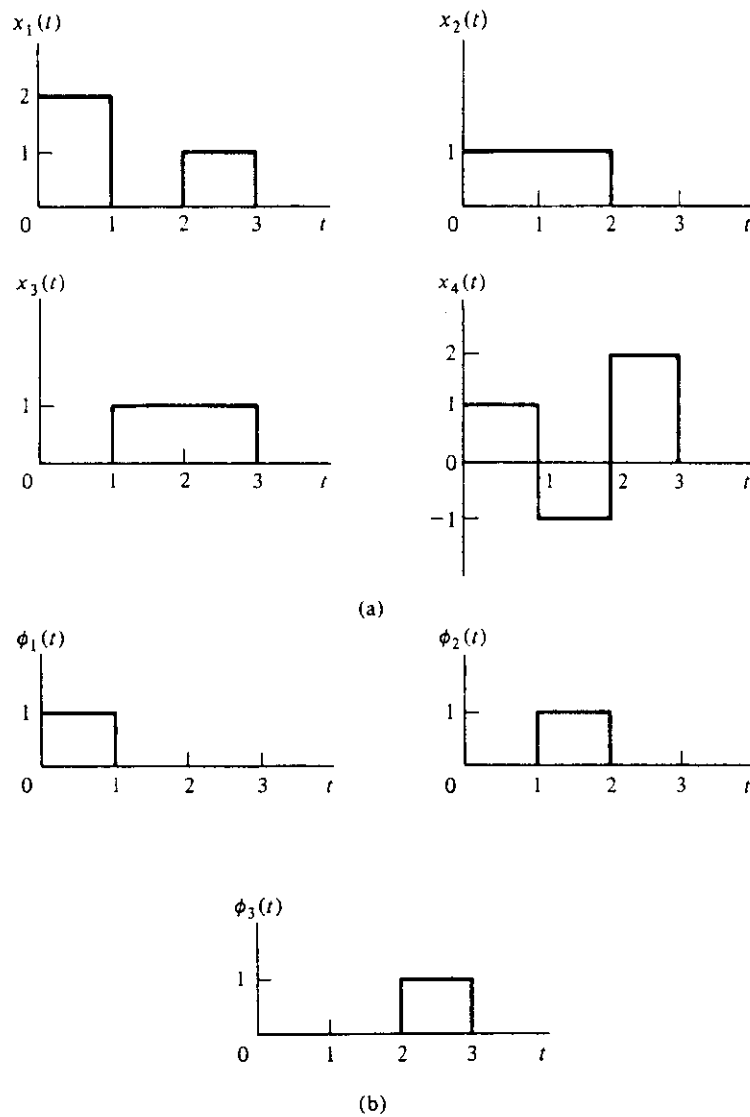


Figura 3.2.2. Representación ortogonal de señales digitales.

Como sólo hacen falta tres señales de la base para representar completamente a $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, podemos ver esas cuatro señales como vectores de un espacio tridimensional. Debemos señalar que la selección de la base no es única, y que existen muchas otras posibilidades. Por ejemplo, si escogemos

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} x_2(t), \quad \phi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} [2u(t-1) - u(t) - u(t-3)]$$

y

$$\phi_3(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} x_4(t)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \left[\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\frac{\sqrt{6}}{3} \right]^T, & \mathbf{x}_2 &= [\sqrt{2}, 0, 0]^T \\ \mathbf{x}_3 &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right]^T, & \mathbf{x}_4 &= [0, 0, \sqrt{6}]^T \end{aligned}$$

Cerraremos esta sección haciendo hincapié en que los resultados presentados en la misma son generales. El propósito de esta sección es presentar al lector de una manera formal los métodos para representar las señales en función de otras bases. En el Capítulo 4 veremos que si la señal satisface algunas restricciones podemos escribirla en términos de una base ortonormal (señales de interpolación). Los coeficientes del desarrollo en serie son muestras de la señal obtenidas con un intervalo de tiempo adecuado.

3.3. DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER MEDIANTE EXPONENCIALES COMPLEJAS

Según vimos en el Capítulo 1 una señal es periódica si existe algún valor positivo de T tal que

$$x(t) = x(t + nT), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3.1)$$

El valor de T para el que se verifica la Ecuación (3.3.1) se denomina período fundamental, y el valor $2\pi/T$ se denomina frecuencia angular fundamental, que denotaremos por ω_0 . La representación gráfica de una señal periódica se obtiene mediante la repetición periódica en un intervalo de longitud T , como se muestra en la Figura 3.3.1. Si observamos la Ecuación (3.3.1), podemos ver que $x(t)$ es periódica de período $2T$, $3T$. Como se demuestra en el Capítulo 1, si dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son periódicas de período T entonces

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (3.3.2)$$

es también periódica de período T .

Como ejemplos familiares de señales periódicas tenemos las funciones seno, coseno y exponencial compleja. Nótese que una señal constante, $x(t) = c$ es también periódica en el sentido de la definición, ya que la Ecuación (3.3.1) se satisface para todo número positivo T .

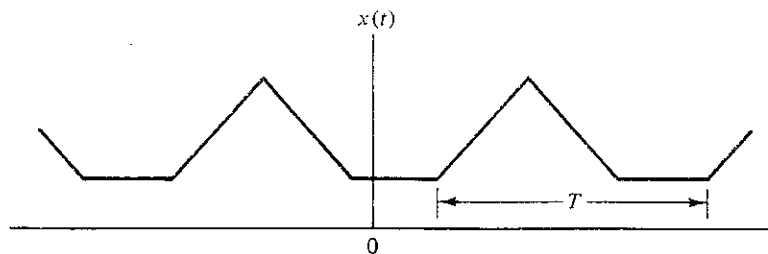


Figura 3.3.1. Una señal periódica.

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \left[\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\frac{\sqrt{6}}{3} \right]^T, & \mathbf{x}_2 &= [\sqrt{2}, 0, 0]^T \\ \mathbf{x}_3 &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right]^T, & \mathbf{x}_4 &= [0, 0, \sqrt{6}]^T \end{aligned}$$

Cerraremos esta sección haciendo hincapié en que los resultados presentados en la misma son generales. El propósito de esta sección es presentar al lector de una manera formal los métodos para representar las señales en función de otras bases. En el Capítulo 4 veremos que si la señal satisface algunas restricciones podemos escribirla en términos de una base ortonormal (señales de interpolación). Los coeficientes del desarrollo en serie son muestras de la señal obtenidas con un intervalo de tiempo adecuado.

3.3. DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER MEDIANTE EXPONENCIALES COMPLEJAS

Según vimos en el Capítulo 1 una señal es periódica si existe algún valor positivo de T tal que

$$x(t) = x(t + nT), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3.1)$$

El valor de T para el que se verifica la Ecuación (3.3.1) se denomina período fundamental, y el valor $2\pi/T$ se denomina frecuencia angular fundamental, que denotaremos por ω_0 . La representación gráfica de una señal periódica se obtiene mediante la repetición periódica en un intervalo de longitud T , como se muestra en la Figura 3.3.1. Si observamos la Ecuación (3.3.1), podemos ver que $x(t)$ es periódica de período $2T$, $3T$. Como se demuestra en el Capítulo 1, si dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son periódicas de período T entonces

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (3.3.2)$$

es también periódica de período T .

Como ejemplos familiares de señales periódicas tenemos las funciones seno, coseno y exponencial compleja. Nótese que una señal constante, $x(t) = c$ es también periódica en el sentido de la definición, ya que la Ecuación (3.3.1) se satisface para todo número positivo T .

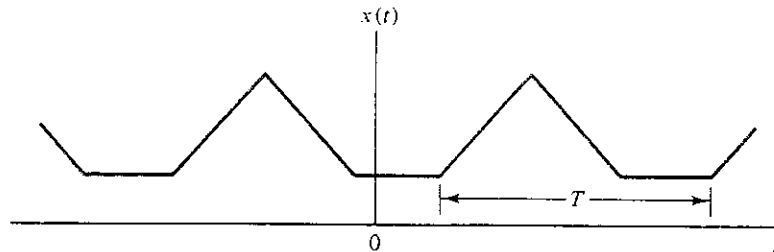


Figura 3.3.1. Una señal periódica.

En esta sección consideraremos la representación de señales periódicas mediante una base de funciones ortogonales. Como vimos en la Sección 3.2, el conjunto de las exponenciales complejas $\phi_n(t) = \exp[j2n\pi t/T]$ forma un conjunto ortogonal. Si seleccionamos este conjunto como funciones de base de acuerdo a la Ecuación (3.2.3)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left[j \frac{2n\pi t}{T}\right] \quad (3.3.3)$$

donde, si tenemos en cuenta la Ecuación (3.2.4), las constantes complejas c_n vienen dadas por

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp\left[-j \frac{2n\pi t}{T}\right] dt \quad (3.3.4)$$

Cada uno de los términos de la serie tiene período T y frecuencia angular fundamental $2\pi/T = \omega_0$. Por lo tanto, si la serie converge, su suma es periódica de período T . Esta serie se denomina serie de Fourier de exponenciales complejas, y los se denominan coeficientes de Fourier. Nótese que debido a la periodicidad del integrando, el intervalo de integración en la Ecuación (3.3.4) se puede sustituir por cualquier intervalo de longitud T (por ejemplo, por el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, con t_0 un valor arbitrario). Indicaremos la integración en un intervalo de longitud T mediante el símbolo $\int_{\langle T \rangle}$. Podemos observar que aunque para sintetizar la señal original en el desarrollo en serie de Fourier se utiliza un número infinito de frecuencias, éstas no son continuas, ya que cada término de frecuencia es un múltiplo de $\omega_0/2\pi$. La frecuencia correspondiente a $n = 1$ se denomina primer armónico o fundamental; $n = 2$ corresponde al segundo armónico, etc. Los coeficientes c_n definen una función de variable compleja en las frecuencias discretas $n\omega_0$, siendo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. La componente continua, o promedio en un ciclo completo de $x(t)$, es igual a c_0 y se obtiene haciendo $n = 0$ en la Ecuación (3.3.4). Los valores calculados de c_0 se pueden comprobar por inspección de $x(t)$, una práctica que se recomienda para verificar la validez del resultado obtenido mediante integración. La gráfica de $|c_n|$ en función de $n\omega_0$ muestra las amplitudes de las diversas componentes en frecuencia que constituyen $x(t)$. Esta gráfica se denomina, por tanto, amplitud o módulo del espectro de la señal periódica $x(t)$. La unión de las puntas de las líneas de amplitud se denomina envolvente del módulo del espectro. Análogamente, la fase de las componentes sinusoidales de $x(t)$ es igual a $\angle c_n$, y la gráfica de $\angle c_n$ en función de $n\omega_0$ se denomina fase del espectro de $x(t)$. En resumen, la amplitud y la fase del espectro de cualquier señal periódica se definen en función del módulo y la fase de c_n . Como el espectro consta de una serie de líneas que representan el módulo y la fase en $\omega = n\omega_0$, se denomina espectro de líneas.

Para señales reales (no complejas), el complejo conjugado de c_n es

$$\begin{aligned} c_n^* &= \left[\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp\left[\frac{-j2n\pi t}{T}\right] dt \right]^* \\ &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp\left[\frac{-j2(-n)\pi t}{T}\right] dt \\ &= c_{-n} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Por tanto

$$|c_{-n}| = |c_n| \quad \text{y} \quad \angle c_{-n} = -\angle c_n \quad (3.3.6)$$

lo que significa que la amplitud del espectro tiene simetría par y la fase simetría impar. Esta propiedad de las señales reales nos permite reagrupar los términos de la serie exponencial en parejas conjugadas, excepto para c_0 , como sigue

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m \exp\left[\frac{j2m\pi t}{T}\right] + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \exp\left[\frac{j2m\pi t}{T}\right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \exp\left[\frac{-j2n\pi t}{T}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left[\frac{j2n\pi t}{T}\right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{-n} \exp\left[\frac{-j2n\pi t}{T}\right] + c_n \exp\left[\frac{j2n\pi t}{T}\right] \right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ c_n \exp\left[\frac{j2n\pi t}{T}\right] \right\} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \operatorname{Re} \{c_n\} \cos \frac{2n\pi t}{T} - 2 \operatorname{Im} \{c_n\} \operatorname{sen} \frac{2n\pi t}{T} \right) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

En la expresión anterior $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ e $\operatorname{Im}\{\cdot\}$ indican la parte real e imaginaria de sus argumentos, respectivamente. La Ecuación (3.3.7) se puede escribir:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi t}{T} \right] \quad (3.3.8)$$

La expresión de $x(t)$ en la Ecuación (3.3.8) se denomina desarrollo en serie de Fourier de funciones trigonométricas para la señal periódica $x(t)$. Los coeficientes a_0 , a_n y b_n vienen dados por

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) dt \quad (3.3.9a)$$

$$a_n = 2 \operatorname{Re} \{c_n\} = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \quad (3.3.9b)$$

$$b_n = -2 \operatorname{Im} \{c_n\} = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \operatorname{sen} \frac{2n\pi t}{T} dt \quad (3.3.9c)$$

En términos del módulo y la fase de c_n , la señal $x(t)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + \angle c_n\right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + \phi_n\right) \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

donde

$$A_n = 2|c_n| \quad (3.3.11)$$

y

$$\phi_n = \angle c_n \quad (3.3.12)$$

La Ecuación (3.3.10) representa una forma alternativa del desarrollo en serie de Fourier más compacta y con mayor significado que la Ecuación (3.3.8). Cada término de la serie representa un oscilador necesario para generar la señal periódica $x(t)$.

La gráfica de $|c_n|$ y $\angle c_n$ en función de n o de $n\omega_0$ para valores positivos y negativos de n se denomina espectro bilateral de amplitud. La gráfica de A_n y ϕ_n en función de valores positivos de n o de $n\omega_0$ se denomina espectro unilateral. Los espectros bilaterales se encuentran muchas veces en desarrollos teóricos, debido a que son más convenientes por la naturaleza de las series de Fourier. Hay que hacer hincapié en que la existencia de una línea en frecuencia negativa no implica que la señal esté compuesta de componentes de frecuencia negativas, sino que por cada componente de la forma $c_n \exp[j2n\pi t/T]$, hay asociada otra de la forma $c_{-n} \exp[-j2n\pi t/T]$. Esas dos componentes se combinan para crear una componente real $a_n \cos(2n\pi t/T) + b_n \sin(2n\pi t/T)$. Nótese que de la definición de integral definida, se desprende que si $x(t)$ es continua o incluso simplemente continua por tramos (continua excepto por un número finito, que puede ser grande, de saltos en el intervalo de integración), los coeficientes de Fourier existen y se pueden calcular mediante las integrales indicadas.

Ilustraremos el uso práctico de las ecuaciones anteriores mediante los siguientes ejemplos. Veremos otros numerosos ejemplos en secciones posteriores.

Ejemplo 3.3.1

Supongamos que deseamos encontrar el espectro de líneas de la señal periódica que se muestra en la Figura 3.3.2. La señal $x(t)$ tiene la representación analítica

$$x(t) = \begin{cases} -K, & -1 < t < 0 \\ K, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

y $x(t+2) = x(t)$. Por lo tanto, $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$. Las señales de este tipo pueden aparecer como señales externas de sistemas mecánicos, o como fuerzas electromagnéticas en circuitos eléctricos, etc. Los coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(t) \exp[-jn\pi t] dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 -K \exp[-jn\pi t] dt + \int_0^1 K \exp[-jn\pi t] dt \right] \end{aligned}$$

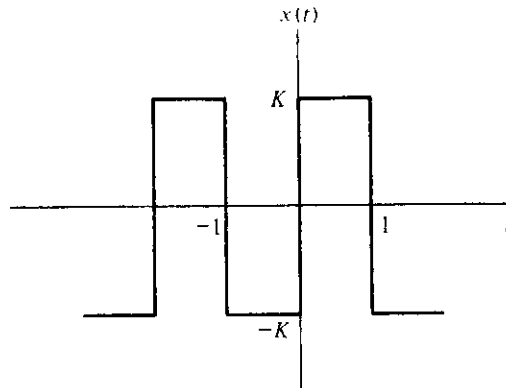


Figura 3.3.2. La señal $x(t)$ del Ejemplo 3.3.1.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{K}{2} \left(\frac{1 - \exp[jn\pi]}{jn\pi} + \frac{\exp[-jn\pi] - 1}{-jn\pi} \right) \\
 &= \frac{K}{jn\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\exp[jn\pi] + \exp[-jn\pi]) \right\} \quad (3.3.13)
 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{2K}{jn\pi}, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases} \quad (3.3.14)$$

La amplitud del espectro es

$$|c_n| = \begin{cases} \frac{2K}{|n|\pi}, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

La componente continua o valor medio de la señal $x(t)$ se obtiene haciendo $n = 0$. Al sustituir $n = 0$ en la Ecuación (3.3.13) obtenemos un resultado indefinido, que se puede solucionar aplicando la regla de L'Hopital, con lo que se obtiene $c_0 = 0$. Esto se puede comprobar si vemos que $x(t)$ es una función impar y que, por tanto, el área encerrada bajo la curva $x(t)$ en un período es cero.

La fase del espectro de $x(t)$ es

$$\angle c_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & n = (2m - 1), m = 1, 2, \dots \\ 0, & n = 2m, m = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{\pi}{2}, & n = -(2m - 1), m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

El espectro de líneas de $x(t)$ se muestra en la Figura 3.3.3. Nótese que la amplitud tiene simetría par, y la fase simetría impar.

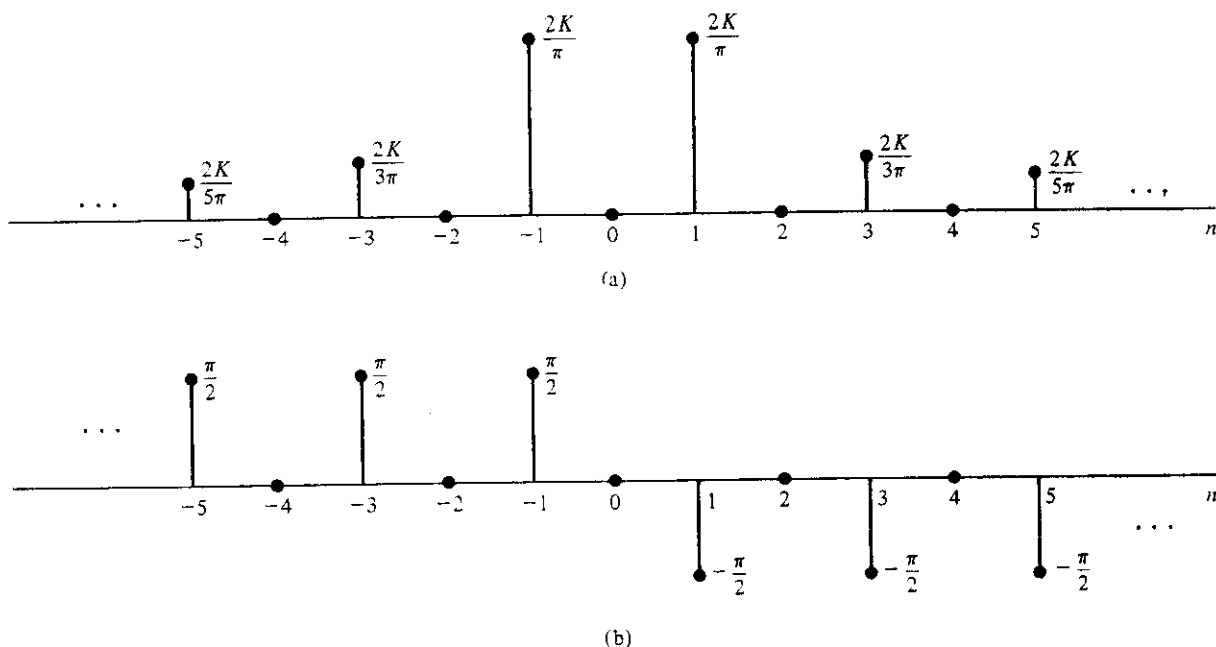


Figura 3.3.3. Espectro de líneas para la señal periódica $x(t)$ del Ejemplo 3.3.1. (a) Amplitud y (b) Fase.

Ejemplo 3.3.2 Un voltaje sinusoidal $E \text{ sen } \omega_0 t$ se pasa por un rectificador de media onda que corta la parte negativa de la señal, como muestra la Figura 3.3.4. Estas señales se pueden encontrar en problemas de diseño de rectificadores. Los rectificadores son circuitos que convierten en corriente continua la corriente alterna.

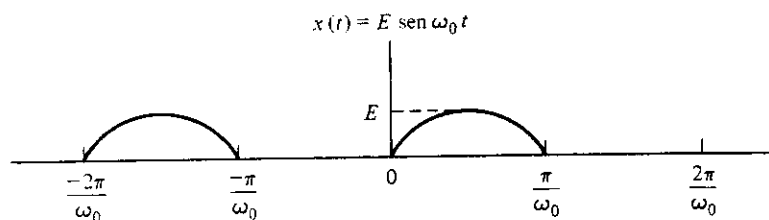


Figura 3.3.4. Señal $x(t)$ del Ejemplo 3.3.2.

La representación analítica de $x(t)$ es

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{cuando } -\frac{\pi}{\omega_0} < t < 0 \\ E \text{ sen } \omega_0 t, & \text{cuando } 0 < t < \frac{\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

y $x(t + 2\pi/\omega_0) = x(t)$. Como $x(t) = 0$ cuando $-\pi/\omega_0 < t < 0$ obtenemos, de la Ecuación (3.3.4),

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T E \text{ sen } \omega_0 t \exp \left[-j \frac{2n\pi t}{T} \right] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E\omega_0}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega_0} \frac{1}{2j} [\exp[j\omega_0 t] - \exp[-j\omega_0 t]] \exp[-jn\omega_0 t] dt \\
&= \frac{E\omega_0}{4\pi j} \int_0^{\pi/\omega_0} [\exp[-j\omega_0(n-1)t] - \exp[-j\omega_0(n+1)t]] dt \\
&= \frac{E \exp[-jn\pi/2]}{2\pi(1-n^2)} \left(\exp\left[\frac{-jn\pi}{2}\right] + \exp\left[\frac{jn\pi}{2}\right] \right) \\
&= \frac{E}{\pi(1-n^2)} \cos(n\pi/2) \exp[-jn\pi/2], \quad n \neq \pm 1 \tag{3.3.15}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{E}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar, } n \neq \pm 1 \end{cases} \tag{3.3.16}$$

Haciendo $n = 0$ obtenemos la componente continua o valor medio de la señal periódica que es $c_0 = E/\pi$. Este resultado se puede verificar calculando el área bajo un semiciclo de la onda sinusoidal y dividiendo por T . Para determinar los coeficientes c_1 y c_{-1} que corresponden al primer armónico, nótese que no se puede sustituir $n = \pm 1$ en la Ecuación (3.3.15), ya que esto conduce a una indeterminación. Utilizaremos, por tanto, la Ecuación (3.3.4) con $n = \pm 1$, con lo que resulta

$$c_1 = \frac{E}{4j} \quad \text{y} \quad c_{-1} = \frac{-E}{4j}$$

El espectro de líneas de $x(t)$ se muestra en la Figura 3.3.5.

En general los rectificadores se utilizan para convertir una señal alterna en una señal continua. Idealmente, la salida rectificada $x(t)$ debe constar sólo de componente continua. Cualquier componente alterna contribuye al rizado (desviación respecto a la continua pura) de la señal. Como se puede ver en la Figura 3.3.5, las amplitudes de los armónicos decrecen rápidamente cuando n crece, de forma que la contribución principal al rizado procede del primer armónico. La razón entre la amplitud del primer armónico y la componente continua se puede utilizar como medida de la cantidad de rizado que queda en la señal rectificada. En este ejemplo, la razón vale $\pi/4$. Se pueden utilizar circuitos más complejos que proporcionan menor rizado (véase Ejemplo 3.6.4).

Ejemplo 3.3.3

Consideremos la señal cuadrada que se muestra en la Figura 3.3.6. La representación analítica de $x(t)$ es

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{cuando } \frac{-T}{2} < t < \frac{-\tau}{2} \\ K, & \text{cuando } \frac{-\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{cuando } \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

y $x(t+T) = x(t)$. Los generadores de pulsos producen señales como ésta, que se utilizan ampliamente en sistemas radar y sonar. Aplicando la Ecuación (3.3.4) obtenemos

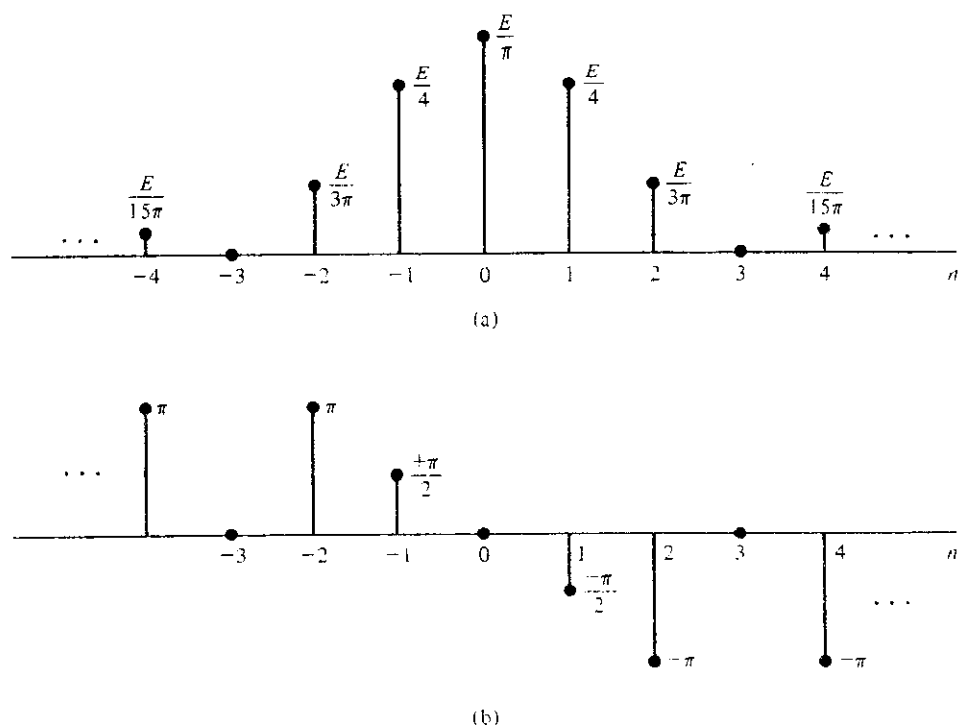


Figura 3.3.5. Espectro de líneas de $x(t)$ del Ejemplo 3.3.2. (a) Amplitud y (b) Fase.

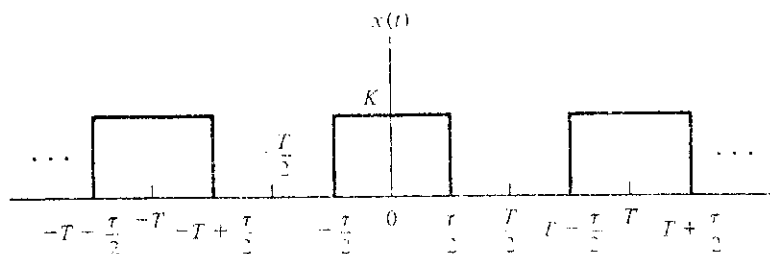


Figura 3.3.6. La señal $x(t)$ del Ejemplo 3.3.3.

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left[-\frac{j2n\pi t}{T}\right] dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} K \exp\left[-\frac{j2n\pi t}{T}\right] dt \\
 &= \frac{K}{j2n\pi} \left[\exp\left[\frac{jn\pi\tau}{T}\right] - \exp\left[-\frac{jn\pi\tau}{T}\right] \right] \\
 &= \frac{K}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi\tau}{T} \\
 &= \frac{K\tau}{T} \operatorname{sinc} \frac{n\tau}{T}
 \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

donde $\operatorname{sinc}(\lambda) = \operatorname{sen}(\pi\lambda)/\pi\lambda$. La función sinc tiene un importante papel en el análisis de Fourier y en el estudio de sistemas LTI. Tiene un máximo en $\lambda = 0$ y se aproxima a cero

cuando λ tiende a infinito, oscilando entre valores positivos y negativos. Vale cero en $\lambda = \pm 1, \pm 2, \dots$

Investiguemos el efecto que produce cambiar T en el espectro de frecuencia de $x(t)$. Para un valor de τ fijo, al aumentar T se reduce la amplitud de cada armónico, así como la frecuencia fundamental y, por tanto, la separación entre los armónicos. Sin embargo, la forma del espectro depende sólo de la forma del pulso y no cambia al aumentar T , excepto por un factor de amplitud. Una medida adecuada de la ocupación en frecuencia, que se denomina ancho de banda, es la distancia del origen al primer cruce por cero de la función sinc. Esta distancia vale $2\pi/\tau$ y es independiente de T . Otras medidas de la anchura en frecuencia del espectro se discutirán con detalle en la Sección 4.5.

Concluimos que cuando el período aumenta la amplitud va decreciendo y el espectro se va haciendo más denso, pero la forma del espectro no cambia y no depende del período de repetición T . La Figura 3.3.7 muestra el espectro de amplitud de $x(t)$ para $\tau = 1$ y $T = 5, 10$ y 15 .

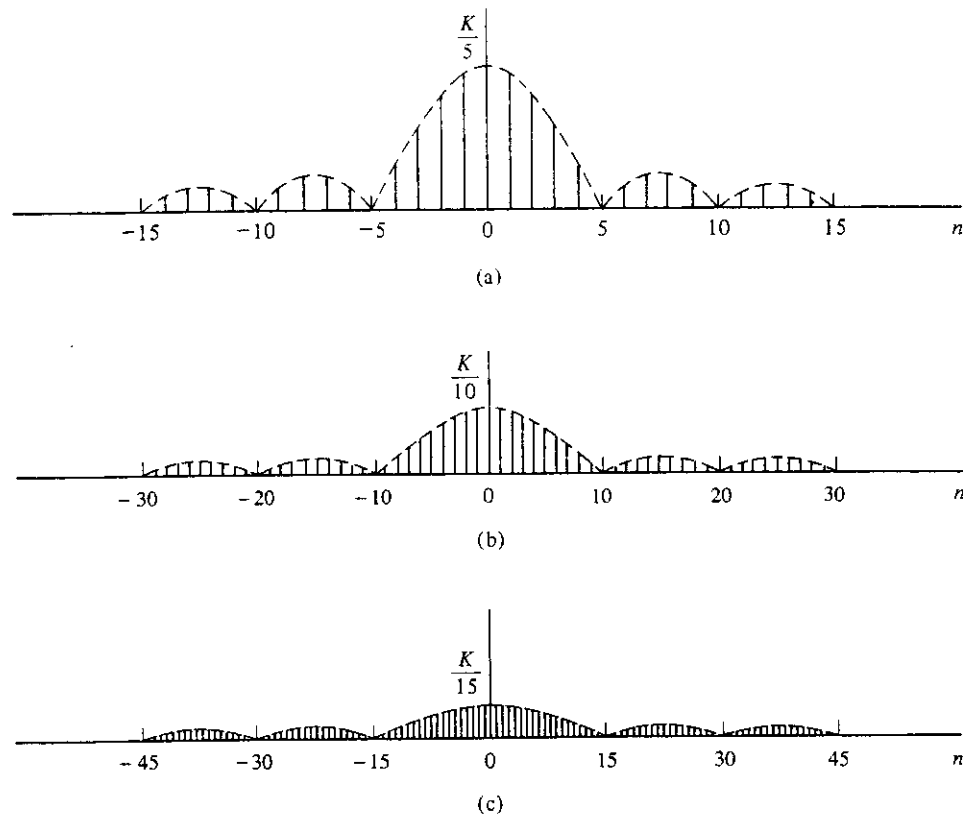


Figura 3.3.7. Espectro de líneas de $x(t)$ del Ejemplo 3.3.3. (a) Módulo del espectro para $\tau = 1$, y $T = 5$. (b) Módulo del espectro para $\tau = 1$ y $T = 10$. (c) Módulo del espectro para $\tau = 1$ y $T = 15$.

Ejemplo 3.3.4

En este ejemplo demostraremos que la señal $x(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ con $x(t + 2\pi) = x(t)$ tiene el siguiente desarrollo en serie de Fourier

$$x(t) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos t - \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{9} \cos 3t - \dots \right) \quad (3.3.18)$$

Nótese que $x(t)$ es periódica de período 2π y frecuencia fundamental $\omega_0 = 1$. Los coeficientes complejos del desarrollo en serie de Fourier son

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \exp[-jnt] dt$$

Integrando por partes dos veces obtenemos

$$c_n = \frac{2 \cos n\pi}{n^2}, \quad n \neq 0$$

El término c_0 se obtiene de

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ &= \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

De las Ecuaciones (3.3.9b) y (3.3.9c)

$$a_n = 2 \operatorname{Re}\{c_n\} = \frac{4}{n^2} \cos n\pi$$

$$b_n = -2 \operatorname{Im}\{c_n\} = 0$$

ya que c_n es real. Sustituyendo en la Ecuación (3.3.8) obtenemos la Ecuación (3.3.18).

Ejemplo 3.3.5 Consideremos

$$x(t) = 1 + 2 \sin\left(\frac{7\pi}{3} t\right) - 3 \cos\left(\frac{7\pi}{3} t\right) + \sin(7\pi t) + \cos\left(\frac{28\pi}{3} t\right)$$

Se puede verificar que esta señal es periódica de período $T=6/7$ de modo que $\omega_0 = 7\pi/3$. Por tanto, $7\pi = 3\omega_0$ y $28\pi/3 = 4\omega_0$. Aunque podemos encontrar los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier para este ejemplo utilizando la Ecuación (3.3.4), es mucho más fácil representar en este caso las señales seno y coseno en términos de exponenciales complejas, y escribir $x(t)$ de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \frac{1}{j} \exp[j\omega_0 t] - \frac{1}{j} \exp[-j\omega_0 t] - \frac{3}{2} \exp[j\omega_0 t] - \frac{3}{2} \exp[-j\omega_0 t] \\ &\quad + \frac{1}{2j} \exp[j3\omega_0 t] - \frac{1}{2j} \exp[-j3\omega_0 t] + \frac{1}{2} \exp[j4\omega_0 t] + \frac{1}{2} \exp[-j4\omega_0 t] \end{aligned}$$

Comparando con la Ecuación (3.3.3) obtenemos

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = c_{-1}^* = -\left(\frac{3}{2} + j1\right)$$

$$c_2 = c_{-2}^* = -\frac{j}{2}$$

$$c_4 = c_{-4}^* = \frac{1}{2}$$

y todos los restantes c_n son cero.

Como el espectro de amplitud de $x(t)$ contiene sólo un número finito de componentes, esta señal se denomina de banda limitada.

3.4. CONDICIONES DE DIRICHLET

El trabajo que realizó Fourier sobre la representación de señales periódicas mediante series trigonométricas, representa un logro considerable. Sus resultados indican que una señal periódica, como la señal con discontinuidades que se representa en la Figura 3.3.2, se puede expresar como una suma de sinusoides. Como las sinusoides son señales infinitamente suaves (es decir, admiten derivadas ordinarias de orden arbitrariamente alto), es difícil creer que una señal discontinua se puede representar de esta forma. Por supuesto, la clave está en que la suma es infinita, y que la señal debe satisfacer algunas condiciones generales. Fourier pensó que cualquier señal periódica se podría representar mediante una suma de sinusoides. Sin embargo, resultó no ser así. Afortunadamente, el conjunto de funciones que se pueden representar mediante un desarrollo en serie de Fourier es grande y suficientemente general, de forma que la mayor parte de las señales utilizadas en aplicaciones de ingeniería en las que podamos pensar admiten una representación mediante una serie de Fourier.

Para que un desarrollo en serie de Fourier converja, la señal $x(t)$ debe poseer en cualquier período las siguientes propiedades, que se conocen como condiciones de Dirichlet:

1. $x(t)$ debe ser absolutamente integrable, es decir,

$$\int_h^{h+T} |x(t)| dt < \infty$$

2. $x(t)$ sólo debe tener un número finito de máximos y de mínimos.
3. El número de discontinuidades de $x(t)$ debe ser finito.

Estas condiciones son suficientes, pero no necesarias. Por tanto, si una señal $x(t)$ satisface las condiciones de Dirichlet, el correspondiente desarrollo en serie de Fourier es convergente y su suma vale $x(t)$, excepto los puntos t_0 en los que la señal sea discontinua. En los puntos de discontinuidad, la serie converge al valor medio de los límites por la derecha y por la izquierda de $x(t)$ en t_0 . Es decir

$$x(t_0) = \frac{1}{2} [x(t_0^+) + x(t_0^-)] \quad (3.4.1)$$

Ejemplo 3.4.1 Consideremos la señal periódica del Ejemplo 3.3.1. Los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier son

$$a_n = 2 \operatorname{Re} \{c_n\} = 0$$

$$b_n = -2 \operatorname{Im} \{c_n\} = \frac{2K}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \frac{4K}{n\pi}, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

de forma que $x(t)$ se puede escribir así:

$$x(t) = \frac{4K}{\pi} \left(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \dots + \frac{1}{n} \sin n\pi t + \dots \right) \quad (3.4.2)$$

Nótese que en $t = 0$ y en $t = 1$, $x(t)$ presenta discontinuidades, y la suma de la Ecuación (3.4.2) vale cero, que es igual a la media aritmética de los valores $-K$ y K de $x(t)$. Además, como la señal satisface las condiciones de Dirichlet, la serie converge, y $x(t)$ es igual a la suma de la serie infinita. Haciendo $t = 1/2$ en la Ecuación (3.4.2) obtenemos

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = K = \frac{4K}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots \right)$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 3.4.2 Consideremos la señal periódica del Ejemplo 3.3.3 con $\tau = 1$ y $T = 2$. Los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier vienen dados por

$$a_n = 2 \operatorname{Re} \{c_n\} = K \operatorname{sinc} \frac{n}{2}$$

$$b_n = -2 \operatorname{Im} \{c_n\} = 0$$

Por tanto, $a_0 = K/2$, cuando n es par, $a_n = 2K/n\pi$ para $n = 1, 5, 9, \dots$, $a_n = -2K/n\pi$ cuando $n = 3, 7, 11, \dots$ y $b_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots$. Por consiguiente, $x(t)$ se puede escribir

$$x(t) = \frac{K}{2} + \frac{2K}{\pi} \left[\cos \pi t - \frac{1}{3} \cos 3\pi t + \frac{1}{5} \cos 5\pi t + \dots \right] \quad (3.4.3)$$

Como $x(t)$ satisface las condiciones en el intervalo $[-1, 1]$, la suma de la Ecuación (3.4.3) converge en todos los puntos de ese intervalo, excepto en $t = \pm 1/2$, los puntos de discontinuidad de la señal. En los puntos de discontinuidad, el lado derecho de la Ecuación (3.4.3) tiene el valor $K/2$, que es la media aritmética de los valores K y cero que toma $x(t)$.

Ejemplo 3.4.3 Consideremos la señal periódica $x(t)$ del Ejemplo 3.3.4. Los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier son

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{4}{n^2} \cos n\pi, \quad n \neq 0$$

$$b_n = 0$$

Por lo tanto, $x(t)$ se puede escribir así

$$x(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt \quad (3.4.4)$$

En este ejemplo, se cumplen las condiciones de Dirichlet. Es más, $x(t)$ es continua para todo t . Por tanto, la suma de la Ecuación (3.4.4) converge a $x(t)$ en todos los puntos. Si evaluamos $x(t)$ en $t = \pi$ obtenemos

$$x(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

O

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Es importante darse cuenta que la representación de una señal periódica $x(t)$ mediante el desarrollo en serie de Fourier no se puede derivar término a término para obtener la representación de $dx(t)/dt$. Para demostrar este hecho, consideremos la señal del Ejemplo 3.3.3. La derivada de esta señal en un período es una pareja de funciones δ de signos opuestos. Esto no se puede obtener mediante la diferenciación directa de la representación en serie de Fourier de $x(t)$. Sin embargo, sí se puede integrar término a término un desarrollo en serie de Fourier para obtener una representación de $\int x(t) dt$.

3.5. PROPIEDADES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

En esta sección consideraremos diversas propiedades del desarrollo en serie de Fourier. Estas propiedades nos van a proporcionar una mejor comprensión de la noción de espectro de frecuencia de una señal en tiempo continuo. Además, muchas propiedades son a menudo útiles para reducir la complejidad del cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier.

3.5.1. Propiedad de aproximación de mínimos cuadrados

Si deseáramos construir una señal periódica $x(t)$ utilizando un conjunto de exponenciales, podríamos preguntarnos cuántos términos deberíamos usar para obtener una aproximación razonable. Si $x(t)$ es una señal de banda limitada, podemos utilizar un número finito de exponenciales. En cualquier otro caso, si utilizamos un número finito de exponenciales (por ejemplo, M), obtendremos sólo una aproximación de $x(t)$. La diferencia entre $x(t)$ y su aproximación es el error de aproximación. Deseamos que la aproximación sea «cercana» a $x(t)$ en algún sentido. La mejor aproximación será la que minimice alguna medida de error. Un criterio útil y matemáticamente tratable que utilizaremos es el promedio en un período del error total elevado al cuadrado, lo que se conoce también como el valor cuadrático medio del error. Este criterio de aproximación se conoce también con el nombre de aproximación de $x(t)$ por mínimos cuadrados. La propiedad de aproximación por mínimos cuadrados de las series de Fourier, relaciona cuantitativamente la energía de la señal diferencia con la diferencia de error entre la señal $x(t)$ especificada y su aproximación mediante un desarrollo en serie de Fourier truncado. Concretamente, la propiedad indica que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier son la mejor elección (en el sentido de error cuadrático medio) para los coeficientes de una serie truncada.

Supongamos ahora que $x(t)$ se puede aproximar mediante un desarrollo en serie de exponenciales truncado, de la forma

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^N d_n \exp[jn\omega_0 t] \quad (3.5.1)$$

Deseamos seleccionar los coeficientes d_n de forma que el error $x(t) - x_N(t)$ tenga un valor cuadrático medio mínimo. Si empleamos el desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$, podemos escribir la señal de error:

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - x_N(t) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp[jn\omega_0 t] - \sum_{-N}^N d_n \exp[jn\omega_0 t] \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Definamos los coeficientes

$$g_n = \begin{cases} c_n, & |n| > N \\ c_n - d_n, & -N < n < N \end{cases} \quad (3.5.3)$$

de forma que la Ecuación (3.5.2) se puede escribir

$$e(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n \exp[jn\omega_0 t] \quad (3.5.4)$$

$e(t)$ es una señal periódica de período $T = 2\pi/\omega_0$, ya que todos los términos del sumatorio son periódicos con ese período. Por lo tanto, la Ecuación (3.5.4) representa el desarrollo en serie de Fourier de $e(t)$. Como medida de lo bien que $x_N(t)$ se aproxima a $x(t)$ utilizamos el error cuadrático medio, definido así:

$$\text{MSE} = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |e(t)|^2 dt$$

Sustituyendo $e(t)$ por su valor definido en la Ecuación (3.5.4) podemos escribir

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \exp[jn\omega_0 t] \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m^* \exp[-jm\omega_0 t] \right) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_n g_m^* \left\{ \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \exp[j(n-m)\omega_0 t] dt \right\} \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Como el término entre llaves del lado derecho vale cero si $m \neq n$ y vale 1 si $n = m$, la Ecuación (3.5.5) se reduce a

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=-N}^N |c_n - d_n|^2 + \sum_{|n| > N} |c_n|^2 \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Todos los términos de la Ecuación (3.5.6) son positivos, por lo tanto, para minimizar el error cuadrático medio debemos escoger

$$d_n = c_n \quad (3.5.7)$$

Esto hace que la primera suma se anule, con lo que el error resultante es

$$(\text{MSE})_{\min} = \sum_{|n| > N} |c_n|^2 \quad (3.5.8)$$

La Ecuación (3.5.8) demuestra el hecho de que el error cuadrático medio se minimiza si seleccionamos los coeficientes d_n de la serie exponencial finita de la Ecuación (3.5.1) iguales a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier c_n . Es decir, si el desarrollo en serie de Fourier de la señal $x(t)$ se trunca a un número cualquiera N de términos, la señal resultante se aproxima a $x(t)$ con menor error cuadrático medio que cualquier otra serie exponencial con el mismo número de términos. Es más, como el error es una suma de términos positivos, decrece monótonamente a medida que el número de términos de la aproximación aumenta.

Ejemplo 3.5.1

Consideremos la aproximación a la señal periódica $x(t)$ de la Figura 3.4.2 mediante un conjunto de $2N + 1$ exponenciales. Para ver cómo varía el error de la aproximación con el número de términos, consideraremos la aproximación a $x(t)$ basada en tres términos, después en siete términos, después en nueve términos, y así sucesivamente [nótese que $x(t)$ tiene sólo armónicos impares]. Para $N = 1$ (tres términos), el error cuadrático medio mínimo es

$$\begin{aligned} (\text{MSE})_{\min} &= \sum_{|n| > 1} |c_n|^2 \\ &= \sum_{|n| > 1} \frac{4K^2}{n^2 \pi^2} \sin^4 \frac{n\pi}{2} \\ &= \frac{4K^2}{\pi^2} \sum_{\substack{|n| > 1 \\ n \text{ impar}}} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{8K^2}{\pi^2} \left(\frac{3\pi^2}{24} - 1 \right) \\ &\simeq 0,189K^2 \end{aligned}$$

De forma similar, para $N = 3$, se puede demostrar que

$$\begin{aligned} (\text{MSE})_{\min} &= \frac{8K^2}{\pi^2} \left[\frac{3\pi^2}{24} - \frac{10}{9} \right] \\ &\simeq 0,01K^2 \end{aligned}$$

3.5.2. Efectos de la simetría

Se puede evitar trabajo innecesario (fuente de posibles errores) al determinar los coeficientes de Fourier de señales periódicas si la señal posee algún tipo de simetría. Los tipos importantes de simetría son:

1. Simetría par, $x(t) = x(-t)$
2. Simetría impar, $x(t) = -x(-t)$
3. Simetría impar en un semiciclo, $x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$

Estos casos se muestran en la Figura 3.5.1.

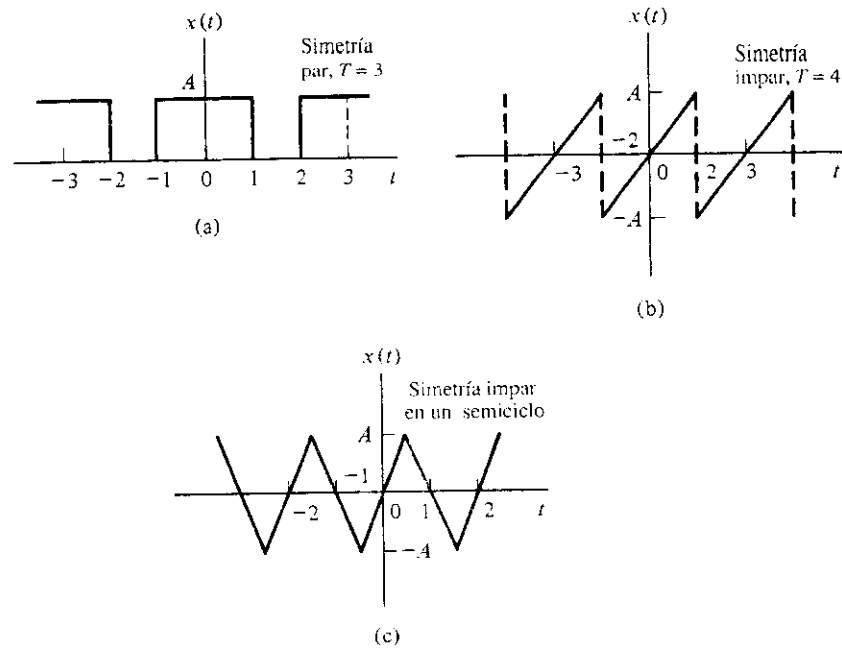


Figura 3.5.1. Tipos de simetría.

Si reconocemos la existencia de una o más simetrías como las mencionadas, el cómputo de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier se simplifica. Por ejemplo, el desarrollo en serie de Fourier de una señal $x(t)$ par de período T se denomina «serie de Fourier de cosenos».

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi t}{T}$$

y los coeficientes valen

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) dt, \quad y \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt$$

El desarrollo en serie de Fourier de una señal $x(t)$ impar de período T se denomina «serie de Fourier de senos».

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi t}{T}$$

con coeficientes

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt$$

Los efectos de estas simetrías se resumen en la Tabla 3.1, en la que las entradas $a_0 \neq 0$ y $b_{2n+1} \neq 0$, significan que esos coeficientes no son necesariamente cero, pero pueden serlo en algunos ejemplos.

Tabla 3.1. Efectos de la simetría

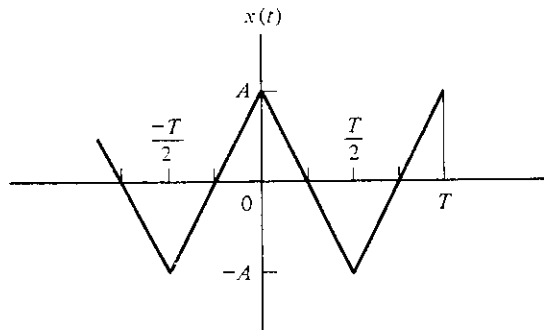
Simetría	a_0	a_n	b_n	Notas
Par	$a_0 \neq 0$	$a_n \neq 0$	$b_n = 0$	Integrar sólo en $T/2$ y multiplicar los coeficientes por 2.
Impar	$a_0 = 0$	$a_n = 0$	$b_n \neq 0$	Integrar sólo en $T/2$ y multiplicar los coeficientes por 2.
Impar en un semiciclo	$a_0 = 0$	$a_{2n} = 0$ $a_{2n+1} \neq 0$	$b_{2n} = 0$ $b_{2n+1} \neq 0$	Integrar sólo en $T/2$ y multiplicar los coeficientes por 2.

En el Ejemplo 3.3.1 $x(t)$ es una señal impar y, por lo tanto, los coeficientes c_n son imaginarios ($a_n = 0$). Por el contrario, en el Ejemplo 3.3.3 los coeficientes c_n son reales ($b_n = 0$) ya que $x(t)$ es una señal par.

Ejemplo 3.5.2 Consideremos la señal

$$x(t) = \begin{cases} A - \frac{4A}{T} t, & 0 < t < T/2 \\ \frac{4A}{T} t - 3A, & T/2 < t < T \end{cases}$$

que se muestra en la Figura 3.5.2.

Figura 3.5.2. La señal $x(t)$ del Ejemplo 3.5.2.

Nótese que $x(t)$ es a la vez par e impar en un semiciclo. Por lo tanto, $a_0 = 0$, $b_n = 0$ y no esperamos armónicos impares. Si calculamos a_n obtenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(A - \frac{4At}{T} \right) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \\ &= \frac{4A}{(n\pi)^2} (1 - \cos(n\pi)), \quad n \neq 0 \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{8A}{(n\pi)^2} & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Obsérvese que a_0 , que corresponde al término de continua (el armónico cero) es cero ya que el área de $x(t)$ en un período es cero.

3.5.3. Linealidad

Supongamos que $x(t)$ e $y(t)$ son dos señales periódicas del mismo período. Sean sus correspondientes desarrollos en serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \exp[jn\omega_0 t] \quad (3.5.9a)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \exp[jn\omega_0 t] \quad (3.5.9b)$$

y sea

$$z(t) = k_1 x(t) + k_2 y(t)$$

con k_1 y k_2 constantes arbitrarias. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (k_1 \beta_n + k_2 \gamma_n) \exp[jn\omega_0 t] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \exp[jn\omega_0 t] \end{aligned}$$

La última ecuación implica que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $z(t)$ son

$$\alpha_n = k_1 \beta_n + k_2 \gamma_n \quad (3.5.10)$$

3.5.4. Producto de dos señales

Si $x(t)$ e $y(t)$ son dos señales periódicas del mismo período como en la Ecuación (3.5.9), su producto es

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t)y(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \exp[jn\omega_0 t] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m \exp[jm\omega_0 t] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_n \gamma_m \exp[j(n+m)\omega_0 t] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_{l-m} \gamma_m \right) \exp[jl\omega_0 t] \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

La suma entre paréntesis se denomina convolución de las secuencias β_m y γ_m (en el Capítulo 6 hablaremos de nuevo de la convolución). La Ecuación (3.5.11) indica que los

coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la señal producto $z(t)$ son la convolución de las dos secuencias generadas por los coeficientes del desarrollo de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$. Es decir

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_{l-m} \gamma_m = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) y(t) \exp[-j l \omega_0 t] dt$$

Si $y(t)$ se sustituye por $y^*(t)$ obtenemos

$$z(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_{l+m} \gamma_m^* \right) \exp[j l \omega_0 t]$$

y

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_{l+m} \gamma_m^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) y^*(t) \exp[-j l \omega_0 t] dt \quad (3.5.12)$$

3.5.5. Convolución de dos señales

Para señales periódicas del mismo período se puede definir una forma especial de convolución que se conoce como convolución circular o periódica, y que se define mediante la integral

$$z(t) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \quad (3.5.13)$$

donde la integral se realiza en un período T . Es fácil demostrar que $z(t)$ es periódica de período T , y que la convolución periódica es conmutativa y asociativa (véase Problema 3.22). Por tanto, podemos escribir $z(t)$ mediante su desarrollo en serie de Fourier con coeficientes

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{T} \int_0^T z(t) \exp[-j n \omega_0 t] dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T x(\tau) y(t - \tau) \exp[-j n \omega_0 t] dt d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) \exp[-j n \omega_0 \tau] \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T y(t - \tau) \exp[-j n \omega_0 (t - \tau)] dt \right\} d\tau \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Utilizando el cambio de variables $\sigma = t - \tau$ en la segunda integral, obtenemos

$$z_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) \exp[-j n \omega_0 \tau] \left[\frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T-\tau} y(\sigma) \exp[-j n \omega_0 \sigma] d\sigma \right] d\tau$$

Como $y(t)$ es periódica, la integral interna es independiente del desplazamiento τ y es igual a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $y(t)$, γ_n . Por tanto, se obtiene

$$z_n = \beta_n \gamma_n \quad (3.5.15)$$

siendo β_n los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$.

Ejemplo 3.5.3 En este ejemplo calcularemos los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier del producto y de la convolución periódica de las dos señales que se muestran en la Figura 3.5.3.

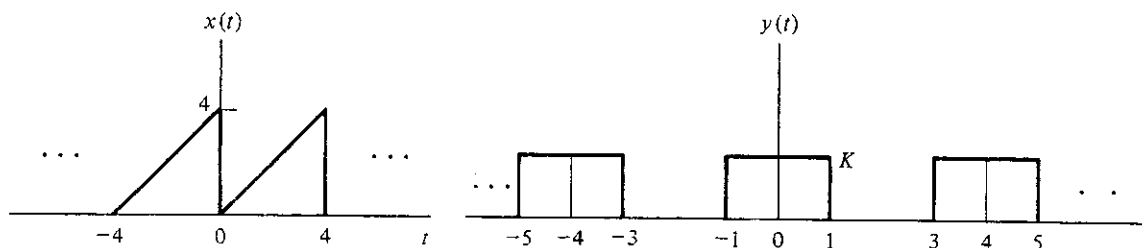


Figura 3.5.3. Las señales $x(t)$ e $y(t)$ del Ejemplo 3.5.3.

La representación analítica de $x(t)$ es

$$x(t) = t, \quad 0 < t < 4, \quad x(t) = x(t + 4)$$

Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$ son

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{4} \int_0^4 t \exp\left[\frac{-jn\pi t}{2}\right] dt \\ &= \frac{2j}{n\pi} \end{aligned}$$

Para la señal $y(t)$, la representación analítica se encuentra en el Ejemplo 3.3.3 con $\tau = 2$ y $T = 4$. Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier son

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 K \exp\left[\frac{-jn\pi t}{2}\right] dt \\ &= \frac{K}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = \frac{K}{2} \operatorname{sinc} \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Aplicando la Ecuación (3.5.15), los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la señal resultado de la convolución son

$$\alpha_n = \frac{2jK}{(n\pi)^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

y aplicando la Ecuación (3.5.11), los coeficientes de la señal resultado del producto son

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_{n-m} \gamma_m \\ &= \frac{2jK}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m(n-m)} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \end{aligned}$$

3.5.6. Teorema de Parseval

En el Capítulo 1 demostramos que la potencia media de una señal $x(t)$ periódica es

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

La raíz cuadrada de la potencia media, o valor rms (root-mean-square) de $x(t)$ es una medida útil para la amplitud de señales con formas de onda complicadas. Por ejemplo, la exponencial compleja $x(t) = c_n \exp[jn\omega_0 t]$ cuya frecuencia es $n\omega_0$ tiene una potencia media de $|c_n|^2$. La relación entre la potencia media de una señal periódica y la potencia de sus armónicos es una de las formulaciones (la convencional) del teorema de Parseval.

Hemos visto que si $x(t)$ e $y(t)$ son señales periódicas con el mismo período T y coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier β_n y γ_n , respectivamente, el producto de dichas señales tiene un desarrollo en serie de Fourier con los siguientes coeficientes (véase Ecuación 3.5.12):

$$z_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_{n+m} \gamma_m^*$$

La componente continua, o promedio temporal en un ciclo del producto es

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y^*(t) dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m \gamma_m^* \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Si hacemos $y(t) = x(t)$ en esa expresión, entonces $\beta_n = \gamma_n$ y la Ecuación (3.5.16) queda

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\beta_m|^2 \quad (3.5.17)$$

El lado izquierdo es la potencia media de la señal periódica $x(t)$. El resultado indica que la potencia media total de $x(t)$ es la suma de las potencias medias en cada componente armónica. Incluso aunque la potencia es una magnitud no lineal, en esta situación particular podemos aplicar la superposición de las potencias medias, suponiendo que todas las componentes individuales están relacionadas armónicamente.

Tenemos ahora dos formas diferentes de encontrar la potencia media de cualquier señal periódica $x(t)$: en el dominio del tiempo, utilizando el lado izquierdo de la Ecuación (3.5.17), y en el dominio de la frecuencia, utilizando el lado derecho de la misma ecuación.

3.5.7. Desplazamiento en el tiempo

Si $x(t)$ tiene un desarrollo en serie de Fourier cuyos coeficientes son c_n , la señal $x(t - \tau)$ tiene como coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier d_n , siendo

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t - \tau) \exp[-jn\omega_0 t] dt \\ &= \exp[-jn\omega_0 \tau] \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\sigma) \exp[-jn\omega_0 \sigma] d\sigma \\ &= c_n \exp[-jn\omega_0 \tau] \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Por tanto, si se conoce el desarrollo en serie de Fourier de una señal $x(t)$ respecto a un origen de tiempo, el desarrollo respecto a otro origen desplazado τ se obtiene añadiendo el desplazamiento de fase $n\omega_0\tau$ a la fase de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$.

Ejemplo 3.5.4

Consideremos la señal periódica $x(t)$ que se muestra en la Figura 3.5.4. Esta señal se puede expresar como la suma de dos señales periódicas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, cada una de ellas de período $2\pi/\omega_0$, donde $x_1(t)$ es señal rectificadora en media onda del Ejemplo 3.3.2 y $x_2(t) = x_1(t - \pi/\omega_0)$. Por lo tanto, si β_n y γ_n son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente, de acuerdo con la Ecuación (3.5.18),

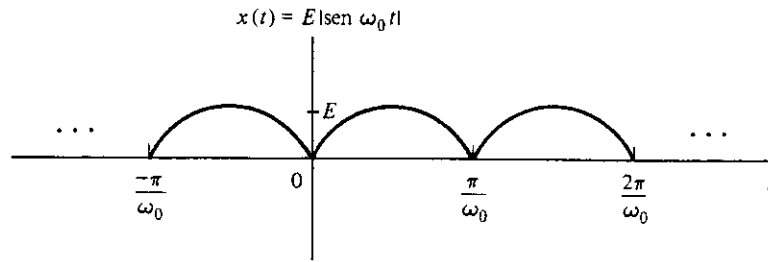


Figura 3.5.4. La señal $x(t)$ del Ejemplo 3.5.4.

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \beta_n \exp \left[-jn\omega_0 \frac{\pi}{\omega_0} \right] \\ &= \beta_n \exp [-jn\pi] = (-1)^n \beta_n\end{aligned}$$

Aplicando la Ecuación (3.5.10), podemos obtener los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \beta_n + (-1)^n \beta_n \\ &= \begin{cases} 2\beta_n, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}\end{aligned}$$

Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la señal periódica $x_1(t)$ se pueden determinar como en la Ecuación (3.3.16):

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega_0} E \sin \omega_0 t \exp [jn\omega_0 t] dt \\ &= \begin{cases} \frac{E}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ par} \\ \frac{-jnE}{4}, & n = \pm 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x_n = \begin{cases} \frac{2E}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Este resultado se puede verificar calculando directamente los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$.

3.5.8. Integración de señales periódicas

Si una señal periódica tiene un valor medio no nulo ($c_0 \neq 0$), la integración de esta señal produce una componente que crece linealmente con el tiempo y, por tanto, la señal resultante no es periódica. Sin embargo, si $c_0 = 0$, la señal integrada es periódica, pero puede tener componente continua. Integrando los dos miembros de la Ecuación (3.3.3) obtenemos

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{jn\omega_0} \exp[jn\omega_0 t], \quad n \neq 0 \quad (3.5.19)$$

Las amplitudes relativas de los armónicos de la señal integrada comparados con su frecuencia fundamental son menores que las de la señal original, antes de integrar. En otras palabras, la integración atenúa (desenfatisa) el módulo de las componentes de alta frecuencia de la señal. Las componentes de alta frecuencia de una señal son las que contribuyen a sus cambios más abruptos, como los que ocurren en los puntos de discontinuidad o en las derivadas discontinuas. Por consiguiente, la integración suaviza la señal, y ésta es una de las razones por las que a veces se denomina operación de suavizado.

3.6. SISTEMAS CON ENTRADAS PERIÓDICAS

Consideremos un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es $h(t)$. En el Capítulo 2 vimos que la respuesta a una entrada $x(t)$ es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

Si la entrada es una exponencial compleja de la forma

$$x(t) = \exp[j\omega t]$$

la salida del sistema es

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp[j\omega(t-\tau)] d\tau \\ &= \exp[j\omega t] \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp[-j\omega\tau] d\tau \end{aligned}$$

Definiendo

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp[-j\omega\tau] d\tau \quad (3.6.1)$$

podemos escribir

$$y(t) = H(\omega) \exp[j\omega t] \quad (3.6.2)$$

$H(\omega)$ se denomina función de transferencia (o respuesta en frecuencia) del sistema, y es constante para un valor de ω determinado. La Ecuación (3.6.2) es de importancia fundamental, ya que nos dice que la respuesta del sistema a una exponencial compleja es también una exponencial compleja de la misma frecuencia ω , cuya amplitud se multiplica por la cantidad $H(\omega)$. El módulo $|H(\omega)|$ se denomina respuesta de amplitud del sistema y la fase $\angle H(\omega)$ se denomina respuesta de fase del sistema. Conociendo $H(\omega)$ se puede determinar si el sistema amplifica o atenúa una componente sinusoidal aplicada a su entrada, y qué desplazamiento de fase añade el sistema a esa componente particular.

Para determinar la respuesta $y(t)$ de un sistema LTI a una entrada periódica $x(t)$, utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la Ecuación (3.3.3), utilizaremos la propiedad de linealidad y la Ecuación (3.6.2), con lo que se obtiene

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\omega_0) c_n \exp[jn\omega_0 t] \quad (3.6.3)$$

La Ecuación (3.6.3) nos indica que la señal de salida es una suma de exponenciales con coeficientes

$$d_n = H(n\omega_0) c_n \quad (3.6.4)$$

Estos coeficientes son las salidas del sistema en respuesta a $c_n \exp[jn\omega_0 t]$. Nótese que como $H(n\omega_0)$ es una constante compleja para cada valor de n , la salida es también periódica y sus coeficientes de Fourier son d_n . Además, como la frecuencia fundamental de $y(t)$ es ω_0 , que es también la frecuencia fundamental de $x(t)$, los períodos de las dos señales son iguales. Por lo tanto, la respuesta de un sistema LTI a una entrada periódica de período T es periódica con el mismo período.

Ejemplo 3.6.1 Consideremos el sistema descrito por la ecuación diferencial de entrada/salida

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m q_i x^{(i)}(t)$$

Dada la entrada $x(t) = \exp[j\omega t]$, la salida correspondiente es $y(t) = H(\omega) \exp[j\omega t]$. Como todas las entradas y salidas satisfacen la ecuación diferencial del sistema, sustituyendo obtenemos

$$\left[(j\omega)^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i (j\omega)^i \right] H(\omega) \exp[j\omega t] = \sum_{i=0}^m q_i (j\omega)^i \exp[j\omega t]$$

Despejando $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^m q_i (j\omega)^i}{(j\omega)^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i (j\omega)^i}$$

Ejemplo 3.6.2

Vamos a encontrar la tensión de salida $y(t)$ del sistema que muestra la Figura 3.6.1 si la tensión de entrada es la señal periódica

$$x(t) = 4 \cos t - 2 \cos 2t$$

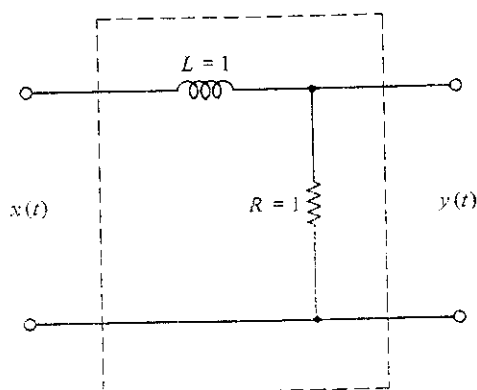


Figura 3.6.1. El sistema del Ejemplo 3.6.2.

Aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones al circuito se obtiene

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R}{L} y(t) = \frac{R}{L} x(t)$$

Si hacemos $x(t) = \exp[j\omega t]$ en esta ecuación, la tensión de salida es $y(t) = H(\omega) \exp[j\omega t]$. Utilizando la ecuación diferencial del sistema obtenemos

$$j\omega H(\omega) \exp[j\omega t] + \frac{R}{L} H(\omega) \exp[j\omega t] = \frac{R}{L} \exp[j\omega t]$$

Despejando $H(\omega)$ resulta

$$H(\omega) = \frac{R/L}{R/L + j\omega}$$

A las frecuencias $\omega = n\omega_0$ la función del sistema vale

$$H(n\omega_0) = \frac{R/L}{R/L + jn\omega_0}$$

En este ejemplo, $\omega_0 = 1$ y $R/L = 1$, con lo que la salida vale

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{2}{1+j1} \exp[jt] + \frac{2}{1-j1} \exp[-jt] - \frac{1}{1+j2} \exp[j2t] - \frac{1}{1-j2} \exp[-j2t] \\ &= 2\sqrt{2} \cos(t - 45^\circ) - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos(2t - 63^\circ) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6.3 Consideremos el circuito que se muestra en la Figura 3.6.2. Su correspondiente ecuación diferencial es

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R}$$

Para una entrada de la forma $i(t) = \exp[j\omega t]$, la salida $v(t)$ será $v(t) = H(\omega) \exp[j\omega t]$. Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos

$$\exp[j\omega t] = Cj\omega H(\omega) \exp[j\omega t] + \frac{1}{R} H(\omega) \exp[j\omega t]$$

El término $\exp[j\omega t]$ se puede eliminar de todos los términos. Despejando $H(\omega)$ resulta

$$H(\omega) = \frac{1}{1/R + j\omega C}$$

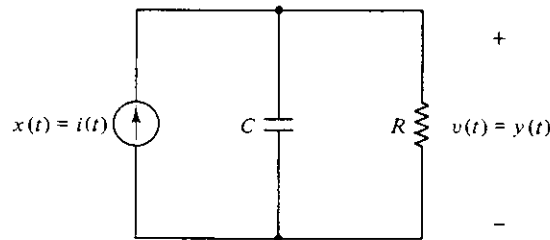


Figura 3.6.2. El circuito del Ejemplo 3.6.3.

Obtengamos la respuesta del sistema a una entrada más compleja. Consideremos como entrada la señal periódica $x(t)$ del Ejemplo 3.3.1. La señal de salida es periódica de período 2 y $\omega_0 = \pi$. Además, ya sabemos que

$$c_n = \begin{cases} \frac{2K}{jn\pi}, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

Aplicando la Ecuación (3.5.3), la salida del sistema en respuesta a esta entrada periódica es

$$y(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2K}{jn\pi} \frac{1}{1/R + jn\pi C} \exp[jn\pi t]$$

Ejemplo 3.6.4 Consideremos ahora el sistema que se muestra en la Figura 3.6.3. Aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones, encontramos que la ecuación diferencial que describe el sistema es

$$x(t) = L \frac{d}{dt} \left(\frac{y(t)}{R} + C \frac{dy(t)}{dt} \right) + y(t)$$

que se puede expresar como

$$LCy''(t) + \frac{L}{R} y'(t) + y(t) = x(t)$$

Si la entrada es de la forma $x(t) = \exp[j\omega t]$, la tensión de salida es $y(t) = H(\omega)\exp[j\omega t]$. Utilizando la ecuación diferencial del sistema obtenemos

$$(j\omega)^2 LCH(\omega) + j\omega \frac{L}{R} H(\omega) + H(\omega) = 1$$

Despejando $H(\omega)$ resulta

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega L/R - \omega^2 LC}$$

con

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L/R)^2}}$$

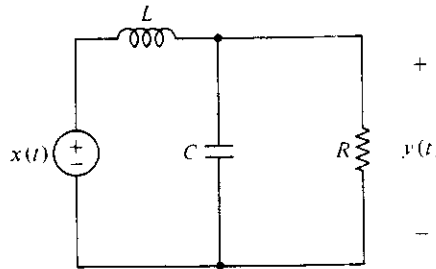


Figura 3.6.3. El circuito del Ejemplo 3.6.4.

Y la fase vale

$$\angle H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega L/R}{1 - \omega^2 LC}$$

Supongamos ahora que la entrada al sistema es la señal rectificada en media onda del Ejemplo 3.3.2. Entonces, la salida del sistema es periódica, y su desarrollo en serie de Fourier es el de la Ecuación (3.6.3). Veamos qué efecto produce el sistema en los armónicos de la señal de entrada $x(t)$. Supongamos que $\omega_0 = 120\pi$, $LC = 1,0 \times 10^{-4}$, y $L/R = 1,0 \times 10^{-4}$. Para esos valores, el módulo y la fase de $H(n\omega_0)$ se pueden aproximar, respectivamente, así:

$$|H(n\omega_0)| = \frac{1}{(n\omega_0)^2 LC}$$

y

$$\angle H(n\omega_0) = \frac{1}{n\omega_0 RC}$$

Nótese que el módulo de $H(n\omega_0)$ decrece como $1/n^2$. El módulo de las primeras componentes d_n , $n = 0, 1, 2, 3, 4$ del desarrollo en serie de Fourier de $y(t)$ vale:

$$|d_0| = \frac{E}{\pi}, \quad |d_1| = 7,6 \times 10^{-2} \frac{E}{4}, \quad |d_2| = 1,8 \times 10^{-2} \frac{E}{3\pi}$$

$$|d_3| = 0, \quad |d_4| = 4,4 \times 10^{-3} \frac{E}{15\pi}$$

La componente continua de la entrada $x(t)$ ha pasado sin atenuación, pero los armónicos primero y superiores han visto sus amplitudes atenuadas. La atenuación aumenta a medida que el orden del armónico crece. De hecho, la función de este circuito es atenuar todas las componentes alternas de la señal rectificada en media onda. Esta operación es un ejemplo de suavizado o filtrado. La razón de amplitudes entre el primer armónico y la componente continua es $7,6 \times 10^{-2} \pi/4$, que se puede comparar con el valor de $\pi/4$ que se obtenía para la señal rectificada en media onda sin filtrar. Como mencionamos anteriormente, se pueden diseñar circuitos más complejos que producirán señales rectificadas mejores. El diseñador se enfrenta siempre al compromiso entre complejidad y prestaciones.

Hasta el momento hemos visto que cuando se transmite una señal $x(t)$ por un sistema LTI (un sistema de comunicaciones, un amplificador, etc.) con función de transferencia $H(\omega)$, la salida $y(t)$ es, en general, diferente de $x(t)$. Se dice que se ha producido una distorsión. Un sistema LTI se denomina sin distorsión si la entrada y la salida son idénticas, excepto por una constante multiplicativa. Un sistema que produce a su salida una versión retrasada de la entrada con la misma forma también se considera sin distorsión. Por tanto, la relación entrada/salida de un sistema LTI sin distorsión debe satisfacer la ecuación

$$y(t) = Kx(t - t_d) \quad (3.6.5)$$

La correspondiente función de transferencia $H(\omega)$ de un sistema sin distorsión tendrá la forma

$$H(\omega) = K \exp[-j\omega t_d] \quad (3.6.6)$$

Vemos que el módulo $|H(\omega)|$ es constante para todo ω , y el desplazamiento de fase es una función lineal de la frecuencia de la forma $-t_d\omega$.

Consideremos un sistema sin distorsión a cuya entrada se aplica una señal periódica con coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier c_n . De la Ecuación (3.6.4) se desprende que el correspondiente desarrollo en serie de Fourier para la salida se puede expresar

$$d_n = K \exp[-jn\omega_0 t_d] c_n \quad (3.6.7)$$

Por tanto, en un sistema sin distorsión, las cantidades $|d_n|/|c_n|$ y $\angle c_n - \angle d_n/n$ deben ser constantes para todo n .

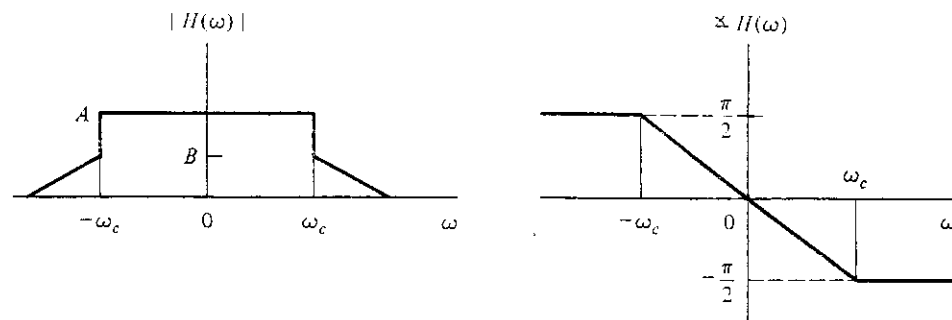


Figura 3.6.4. Características del módulo y fase de un sistema sin distorsión.

En la práctica, no podemos tener un sistema sin distorsión en todo el rango $-\infty < \omega < \infty$. La Figura 3.6.4 muestra las características de módulo y fase de un sistema LTI sin distorsión en el rango de frecuencias $-\omega_c < \omega < \omega_c$.

Ejemplo 3.6.5

Las señales de entrada y de salida de un sistema LTI son

$$x(t) = 8 \exp[j(\omega_0 t + 30^\circ)] + 6 \exp[j(3\omega_0 t - 15^\circ)] - 2 \exp[j(5\omega_0 t + 45^\circ)]$$

$$y(t) = 4 \exp[j(\omega_0 t - 15^\circ)] - 3 \exp[j(3\omega_0 t - 30^\circ)] + \exp[j(5\omega_0 t)]$$

Deseamos determinar si las dos señales tienen la misma forma. Nótese que la razón de los módulos de los correspondientes armónicos $|d_n|/|c_n|$ vale siempre $1/2$. Para comparar las fases, calculamos $[x_n c_n - x_n d_n]/n$, que vale $30^\circ - (-15^\circ) = 45^\circ$ para el fundamental, $(-15^\circ - 30^\circ + 180^\circ)/3 = 45^\circ$ para el tercer armónico y $(45^\circ + 180^\circ)/5 = 45^\circ$ para el quinto armónico. Por tanto, las dos señales $x(t)$ e $y(t)$ presentan la misma forma excepto por un factor de escala de $1/2$ y un desplazamiento de fase de $\pi/4$. Este desplazamiento de fase corresponde a un desplazamiento temporal de $\tau = \pi/4\omega_0$. Por tanto, $y(t)$ se puede escribir:

$$y(t) = \frac{1}{2} x\left(t - \frac{\pi}{4\omega_0}\right)$$

El sistema es, por tanto, sin distorsión para esta entrada $x(t)$.

Ejemplo 3.6.6

Sean $x(t)$ e $y(t)$ la entrada y la salida, respectivamente, del circuito RC simple que se muestra en la Figura 3.6.5. Aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones obtenemos

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$

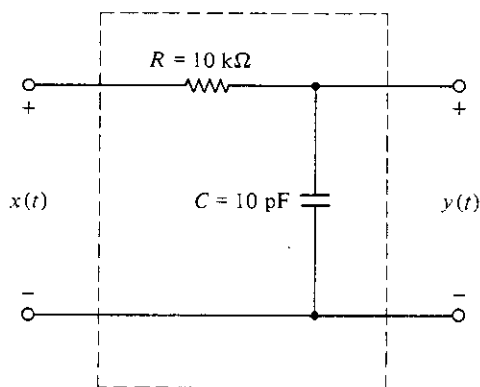


Figura 3.6.5. El circuito del Ejemplo 3.6.6.

Haciendo $x(t) = \exp[j\omega t]$ y sabiendo que $y(t) = H(\omega) \exp[j\omega t]$ tenemos que

$$j\omega H(\omega) \exp[j\omega t] + \frac{1}{RC} H(\omega) \exp[j\omega t] = \frac{1}{RC} \exp[j\omega t]$$

Despejando $H(\omega)$ tenemos

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{1/RC + j\omega} = \frac{\eta}{\eta + j\omega}$$

donde

$$\eta = \frac{1}{10^4 \times 10^{-11}} = 10^7 \text{ s}^{-1}$$

Teniendo en cuenta lo anterior

$$|H(\omega)| = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}}$$

$$\angle H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\eta}$$

El módulo y la fase del espectro de $H(\omega)$ se muestran en la Figura 3.6.6. Nótese que para $\omega \ll \eta$,

$$H(\omega) \simeq 1$$

y que

$$\angle H(\omega) \simeq -\frac{\omega}{\eta}$$

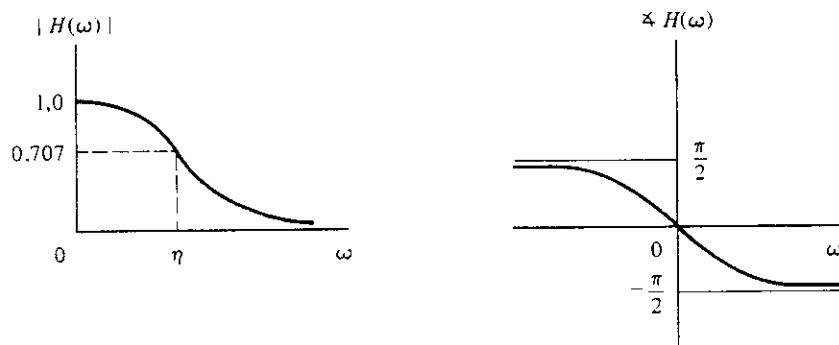


Figura 3.6.6. Módulo y fase de $H(\omega)$.

Es decir, las características de módulo y de fase son prácticamente ideales. Por ejemplo, para la entrada

$$x(t) = A \exp[j10^3 t]$$

el sistema es prácticamente sin distorsión con salida

$$\begin{aligned} y(t) &= H(10^3) A \exp[j10^3 t] \\ &= \frac{10^7}{10^7 + j10^3} A \exp[j10^3 t] \\ &\simeq A \exp[j10^3(t - 10^{-7})] \end{aligned}$$

Por lo tanto, el retardo temporal es de 10^{-7} s.

3.7. EL FENÓMENO DE GIBBS

Consideremos la señal del Ejemplo 3.3.1, donde ya hemos visto que $x(t)$ se puede expresar así:

$$x(t) = \frac{2K}{j\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \exp[jn\pi t]$$

Vamos a investigar qué efecto se produce cuando truncamos la serie infinita. Para ello, consideremos la serie truncada

$$x_N(t) = \frac{2K}{j\pi} \sum_{\substack{n=-N \\ n \text{ impar}}}^N \frac{1}{n} \exp[jn\pi t]$$

Esta serie truncada se muestra en la Figura 3.7.1 para valores de $N = 3$ y 5. Nótese que incluso con $N = 3$, la forma de $x_3(t)$ recuerda a la del tren de pulsos de la Figura 3.3.2. Si aumentamos el valor de N hasta 39, obtenemos la aproximación que se muestra en la Figura 3.7.2. Resulta claro que, excepto por las oscilaciones en los puntos de discontinuidad, la última figura es una aproximación mucho mejor del tren de pulsos $x(t)$ que $x_5(t)$. En general, cuando N crece, el error cuadrático medio entre la aproximación y la señal decrece, y la de la señal original mejora en todos los puntos excepto en la inmediata vecindad de la discontinuidad finita. En las proximidades de los puntos de discontinuidad de $x(t)$, la serie de Fourier no converge, incluso aunque el error cuadrático medio de la apro-

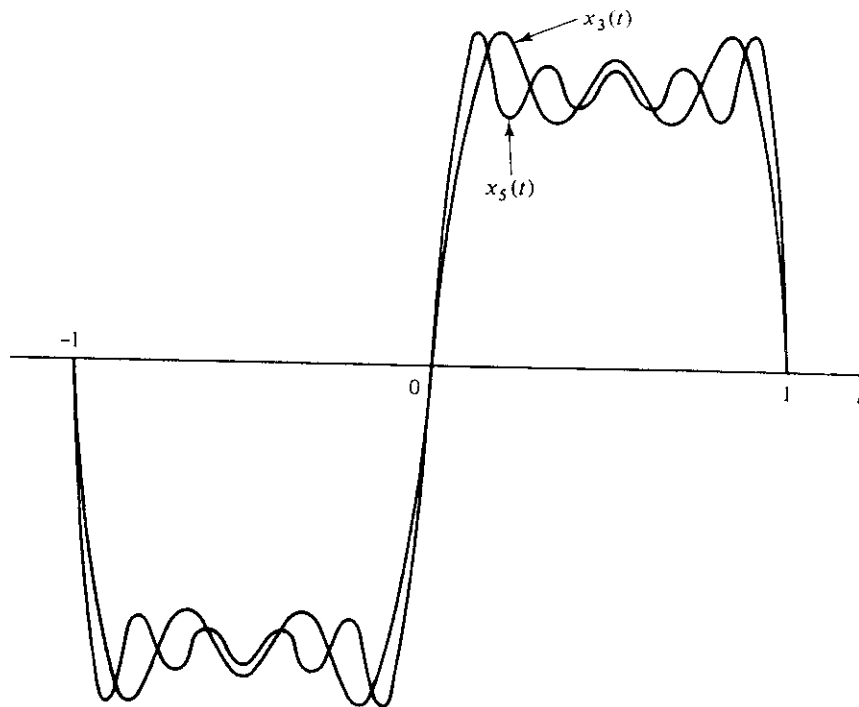
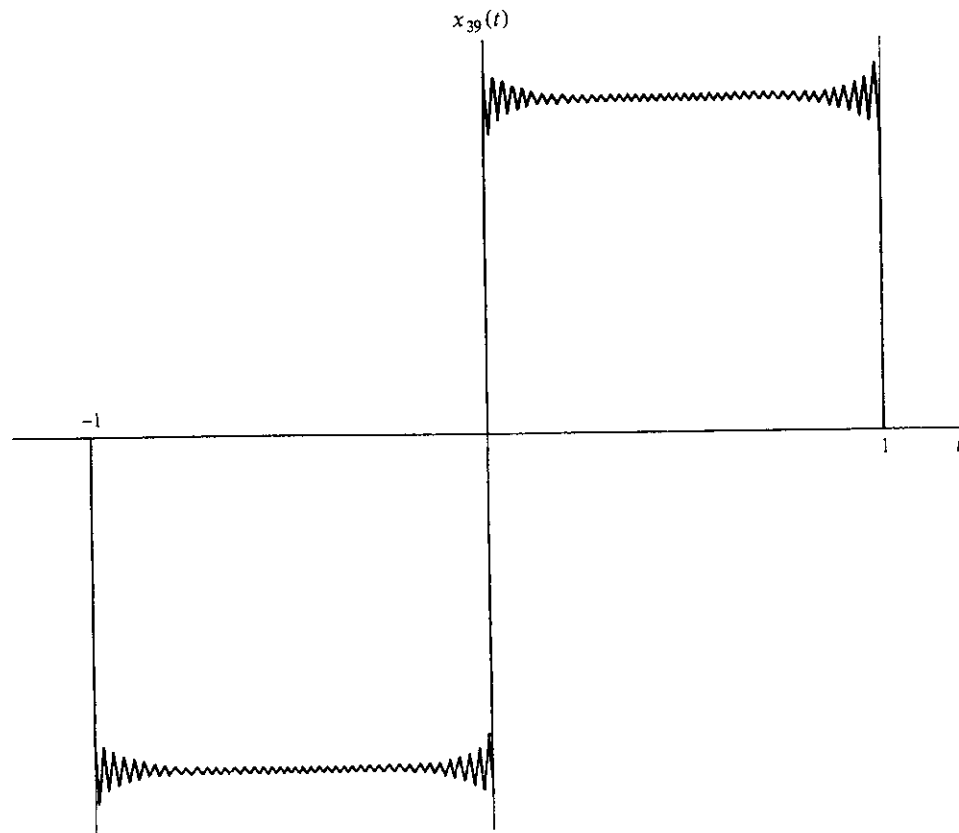


Figura 3.7.1. Las señales $x_3(t)$ y $x_5(t)$.

Figura 3.7.2. La señal $x_{39}(t)$.

ximación tienda a cero. Si examinamos cuidadosamente la Figura 3.7.2, veremos que la amplitud del rizado es aproximadamente un 9 % mayor que el valor de la señal $x(t)$. De hecho, este rizado de amplitud 9 % superior siempre está presente y es independiente del número de términos que se utilicen para aproximar la señal $x(t)$. Esta observación fue realizada por primera vez por el físico matemático Josiah Willard Gibbs.

Para obtener una explicación de este fenómeno, consideremos la forma general de la serie de Fourier truncada:

$$\begin{aligned}
 x_N &= \sum_{n=-N}^N c_n \exp[jn\omega_0 t] \\
 &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) \exp[-jn\omega_0 \tau] d\tau \exp[jn\omega_0 t] \\
 &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) \left\{ \sum_{n=-N}^N \exp[jn\omega_0(t - \tau)] \right\} d\tau
 \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

Se puede demostrar (véase Problema 3.39) que la suma entre paréntesis es igual a

$$g(t - \tau) \Delta \sum_{n=-N}^N \exp[jn\omega_0(t - \tau)] = \frac{\text{sen} \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega_0(t - \tau) \right]}{\text{sen} \left(\omega_0 \frac{t - \tau}{2} \right)} \quad (3.7.2)$$

La Figura 3.7.3 muestra la señal $g(\sigma)$ para $N = 6$. Nótese el comportamiento oscilatorio de la señal y los picos en los puntos $\sigma = m\pi$, $m = 1, 2, \dots$

Sustituyendo en la Ecuación (3.7.1) se obtiene

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) \frac{\text{sen} \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega_0(t - \tau) \right]}{\text{sen} \left(\omega_0 \frac{t - \tau}{2} \right)} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t - \tau) \frac{\text{sen} \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \tau \right]}{\text{sen} \left(\omega_0 \frac{\tau}{2} \right)} d\tau \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

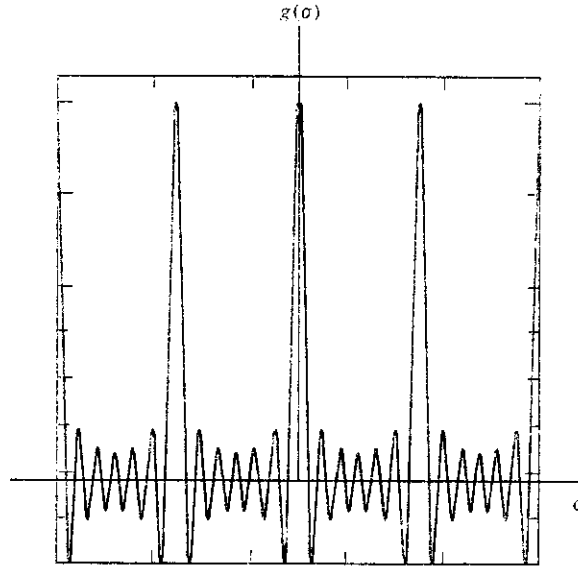


Figura 3.7.3. La señal $g(\sigma)$ para $N = 6$.

En la Sección 3.5.1 demostramos que $x_N(t)$ converge a $x(t)$ (con criterio de error cuadrático medio) cuando $N \rightarrow \infty$. Por tanto, para valores de N suficientemente grandes, $x_N(t)$ debe ser una buena aproximación a $x(t)$. La Ecuación (3.7.3) demuestra matemáticamente el fenómeno de Gibbs demostrando que truncar una serie de Fourier es equivalente a convolucionar la señal $x(t)$ con la señal $g(t)$ definida en la Ecuación (3.7.2). La naturaleza oscilatoria de $g(t)$ es la causante de los rizos en los puntos de discontinuidad.

Nótese que para cualquier señal, sus componentes de alta frecuencia (es decir, sus armónicos de orden alto) son los que contribuyen principalmente a sus variaciones más rápidas, como las que aparecen en los puntos de discontinuidad o de derivada discontinua.

3.8. RESUMEN

- Se dice que dos funciones $\phi_i(t)$ y $\phi_j(t)$ son ortogonales en el intervalo (a, b) si

$$\int_a^b \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \begin{cases} E_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

y son ortonormales en el intervalo (a, b) si $E_i = 1$ para todo i .

- Cualquier señal arbitraria $x(t)$ se puede desarrollar en un intervalo (a, b) utilizando una base ortogonal de funciones $\{\phi_i(t)\}$, de la siguiente forma:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \phi_i(t)$$

donde

$$c_i = \frac{1}{E_i} \int_a^b x(t) \phi_i^*(t) dt$$

- Las exponenciales complejas

$$\phi_n(t) = \exp\left[\frac{2\pi}{T} nt\right]$$

son ortogonales en el intervalo $[0, T]$.

- Una señal periódica $x(t)$ de período T se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left[\frac{j2n\pi t}{T}\right]$$

- La frecuencia angular fundamental de una señal periódica está relacionada con su período fundamental:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- Los coeficientes c_n se denominan coeficientes del desarrollo en serie de Fourier y su expresión es

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp\left[-\frac{j2n\pi t}{T}\right] dt$$

- La frecuencia fundamental ω_0 se denomina frecuencia del primer armónico, la frecuencia $2\omega_0$, frecuencia del segundo armónico, y así sucesivamente.
- La representación de $|c_n|$ en función de $n\omega_0$ se denomina amplitud del espectro. El lugar geométrico de los extremos de las líneas se denomina envolvente de la amplitud del espectro.

- La representación de $\angle c_n$ en función de $n\omega_0$ se denomina fase del espectro.
- Para señales periódicas, tanto la amplitud como la fase del espectro son espectros de líneas. Si la señal es real, la amplitud tiene simetría par, y la fase simetría impar.
- Si una señal $x(t)$ es real, se puede desarrollar mediante una serie trigonométrica de la forma

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right)$$

- La relación entre los coeficientes de la serie trigonométrica y los de la serie con exponenciales complejas es:

$$a_0 = c_0$$

$$a_n = 2 \operatorname{Re} \{c_n\}$$

$$b_n = -2 \operatorname{Im} \{c_n\}$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

- El desarrollo en serie de Fourier se puede expresar de una forma alternativa:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\frac{2n\pi t}{T} + \phi_n \right)$$

con

$$A_0 = c_0$$

y

$$A_n = 2|c_n|, \quad \phi_n = \angle c_n$$

- Para que un desarrollo en serie de Fourier converja, la señal $x(t)$ debe ser absolutamente integrable, no tener un número infinito de máximos y mínimos en un período, y no tener un número infinito de discontinuidades en un período. Este conjunto de condiciones se denominan condiciones de Dirichlet.
- Si la señal $x(t)$ tiene simetría par, entonces

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\langle T/2 \rangle} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_{\langle T/2 \rangle} x(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt$$

- Si la señal $x(t)$ tiene simetría impar, entonces

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_{\langle T/2 \rangle} x(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt$$

- Si la señal $x(t)$ tiene simetría impar en un semiciclo, entonces

$$a_{2n} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$a_{2n+1} = \frac{4}{T} \int_{\langle T/2 \rangle} x(t) \cos \frac{2(2n+1)\pi t}{T} dt$$

$$b_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{T} \int_{\langle T/2 \rangle} x(t) \sin \frac{2(2n+1)\pi t}{T} dt$$

- Sean β_n y γ_n , respectivamente, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de exponenciales complejas de dos señales periódicas $x(t)$ e $y(t)$ con el mismo período. Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la señal $z(t) = k_1 x(t) + k_2 y(t)$ son

$$z_n = k_1 \beta_n + k_2 \gamma_n$$

y los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la señal $z(t) = x(t)y(t)$ son

$$z_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_{n-m} \gamma_m$$

- La convolución periódica de dos señales periódicas $x(t)$ e $y(t)$ con el mismo período T se define

$$z(t) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

- Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la convolución periódica de las señales $x(t)$ e $y(t)$ son

$$z_n = \beta_n \gamma_n$$

- Una de las formulaciones del teorema de Parseval indica que la potencia media de una señal $x(t)$ se relaciona con los coeficientes c_n de su desarrollo en serie de Fourier mediante la expresión

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

- La función de transferencia de un sistema LTI se define así:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp[-j\omega\tau] d\tau$$

- El módulo de $H(\omega)$ se denomina respuesta de amplitud (característica de amplitud) del sistema y la fase de $H(\omega)$ se denomina respuesta de fase (característica de fase) del sistema.
- La respuesta $y(t)$ de un sistema LTI a la entrada periódica $x(t)$ es

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\omega_0) c_n \exp[jn\omega_0 t]$$

siendo ω_0 la frecuencia fundamental y c_n los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$.

- La representación de $x(t)$ utilizando un desarrollo en serie de longitud finita presenta un comportamiento de rizado en los puntos de discontinuidad. El valor del rizado relativo al valor de $x(t)$ es de aproximadamente el 9 %. Este fenómeno se conoce como el fenómeno de Gibbs.

3.9. LISTA DE TÉRMINOS IMPORTANTES

Amplitud del espectro	Fase del espectro
Aproximación de mínimos cuadrados	Fenómeno de Gibbs
Armónico impar	Forma de laboratorio del desarrollo en serie de Fourier
Armónico par	Función de transferencia
Coefficientes de Fourier	Funciones ortogonales
Condiciones de Dirichlet	Señal absolutamente integrable
Convolución periódica	Señales periódicas
Desarrollo en serie de Fourier con exponenciales complejas	Simetría impar en un semiciclo
Desarrollo en serie de Fourier con funciones trigonométricas	Sistema sin distorsión
Error cuadrático medio	Teorema de Parseval

3.10. PROBLEMAS

- 3.1. Expresar el conjunto de señales que se muestra en la Figura P3.1 utilizando las señales de la base ortonormal $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$.

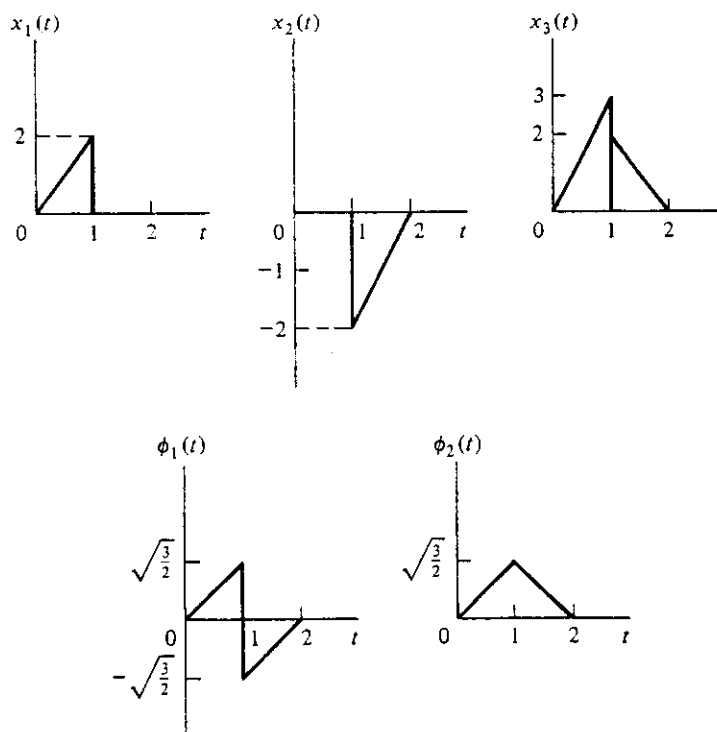


Figura P3.1.

- 3.2. Dado un conjunto arbitrario de funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, definido en un intervalo $[t_0, t_f]$, podemos generar un conjunto de funciones ortogonales $\psi_i(t)$ mediante el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt. Escojamos como primera función de la base

$$\psi_1(t) = x_1(t)$$

Seguidamente escogemos como segunda función de la base

$$\psi_2(t) = x_2(t) + a_1\psi_1(t)$$

donde a_1 se determina para que $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ sean ortogonales. Podemos continuar el procedimiento escogiendo

$$\psi_3(t) = x_3(t) + b_1\psi_1(t) + b_2\psi_2(t)$$

donde b_1 y b_2 se determinan para que $\psi_3(t)$ sea ortogonal a $\psi_1(t)$ y a $\psi_2(t)$. Las siguientes funciones se pueden generar de forma similar.

Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales cualesquiera. Definamos

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_f} x(t)y(t) dt$$

y sea $E_i = \langle x_i(t), x_i(t) \rangle$.

- (a) Verificar que los coeficientes a_1 , b_1 y b_2 tienen las siguientes expresiones

$$a_1 = - \frac{\langle x_1(t), x_2(t) \rangle}{E_1}$$

$$b_1 = - \frac{\langle x_1(t), x_3(t) \rangle}{E_1}$$

$$b_2 = - \frac{\langle x_1(t), x_2(t) \rangle \langle x_1(t), x_3(t) \rangle - E_1 \langle x_2(t), x_3(t) \rangle}{\langle x_1(t), x_2(t) \rangle^2 - E_1 E_2}$$

- (b) Utilizando los resultados del apartado (a), generar un conjunto de señales ortogonales partiendo del conjunto de señales que se muestra en la Figura P3.2.
- (c) Obtener un conjunto de funciones ortonormales $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ partiendo del conjunto $\psi_i(t)$ generado en el apartado (b).

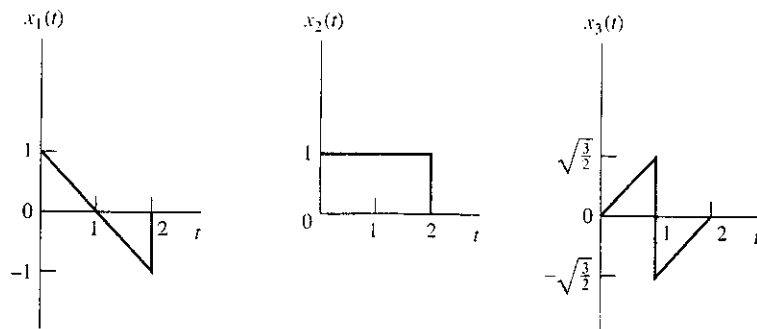


Figura P3.2.

3.3. Consideremos el conjunto de funciones

$$x_1(t) = e^{-t}u(t), \quad x_2(t) = e^{-2t}u(t), \quad x_3(t) = e^{-3t}u(t)$$

- (a) Utilizar el método del Problema 3.2 para generar un conjunto de funciones ortonormales $\phi_i(t)$ a partir de $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$.
- (b) Sea $\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^3 c_i \phi_i(t)$ una aproximación a la señal $x(t) = 3e^{-4t}u(t)$ en función de las señales $\phi_i(t)$, y sea $e(t)$ el error de aproximación. Determinar la exactitud de $\hat{x}(t)$ calculando la razón de las energías de $e(t)$ y $x(t)$.
- 3.4. (a) Suponiendo que todas las ϕ_i son funciones reales, demostrar que la Ecuación (3.2.4) minimiza la energía del error dada en la Ecuación (3.2.7) [Ayuda: Diferenciar la Ecuación (3.2.7) con respecto a un c_j concreto, igualar el resultado a cero, y resolver].
- (b) ¿Se puede extender el resultado del apartado (a) a funciones complejas?
- 3.5. Demostrar que si el conjunto $\phi_k(t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, es ortogonal en el intervalo $(0, T)$ y

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t) \quad (\text{P3.5})$$

entonces

$$c_i = \frac{1}{E_i} \int_0^T x(t) \phi_i^*(t) dt$$

siendo

$$E_i = \int_0^T |\phi_i(t)|^2 dt$$

- 3.6. Las funciones de Walsh son un conjunto de funciones ortonormales definidas en el intervalo $[0, 1)$ que toman valores de ± 1 en dicho intervalo. Las funciones de Walsh se caracterizan por su *secuencia*, que es la mitad del número de cruces por cero de la función en el intervalo $[0, 1)$. La Figura P3.6 muestra las siete primeras funciones de Walsh $\text{wal}_w(k, t)$ ordenadas según secuencia creciente.

- (a) Verificar que las funciones de Walsh mostradas son un conjunto ortonormal en el intervalo $[0, 1)$.
- (b) Supongamos que deseamos representar la señal $x(t) = t[u(t) - u(t - 1)]$ utilizando las funciones de Walsh

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^N c_k \text{wal}_w(k, t)$$

Calcular los coeficientes c_k para $N = 6$.

- (c) Dibujar $x_N(t)$ para $N = 3$ y 6.

3.7. Dada la señal periódica

$$x(t) = 2 + \frac{1}{2} \cos(t + 45^\circ) + 2 \cos(3t) - 2 \sin(4t + 30^\circ)$$

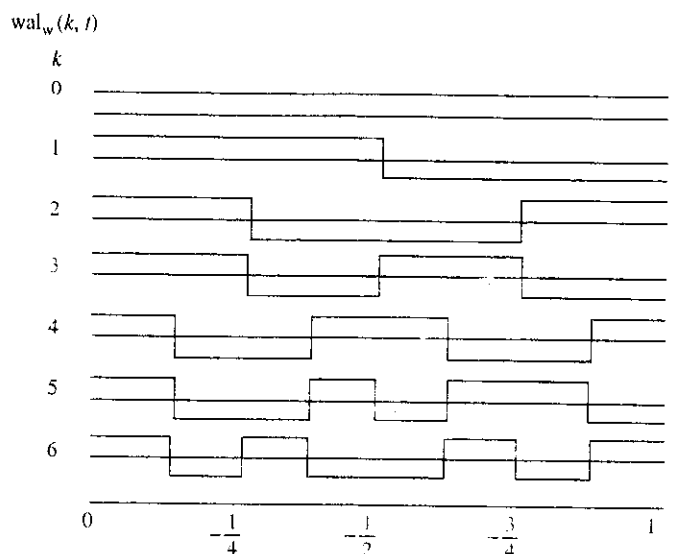


Figura P3.6.

- (a) Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de exponenciales complejas.
- (b) Dibujar el módulo y la fase del espectro en función de ω .
- 3.8. La señal que se muestra en la Figura P3.8 se genera cuando una señal de tensión o de corriente con forma de coseno es rectificadora por un diodo, proceso que se conoce como rectificación de media onda. Deducir el desarrollo en serie de Fourier de exponenciales de la señal rectificadora en media onda.

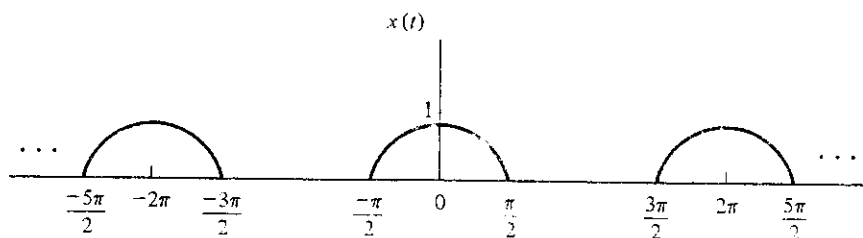


Figura P3.8.

- 3.9. Calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de funciones trigonométricas de la señal del Problema 3.8.
- 3.10. La señal que se muestra en la Figura P3.10 se genera cuando una señal de tensión o de corriente con forma de seno es rectificadora por un circuito con dos diodos, proceso que se conoce como rectificación de onda completa. Deducir el desarrollo en serie de Fourier de exponenciales de la señal rectificadora en onda completa.
- 3.11. Calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de funciones trigonométricas de la señal del Problema 3.10.

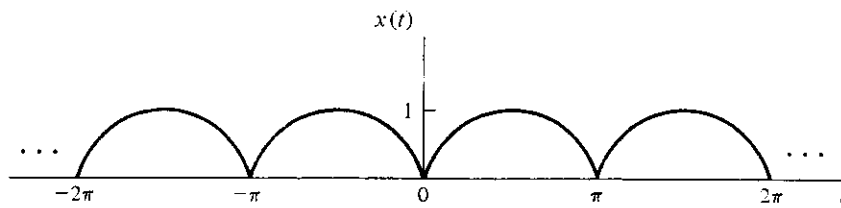


Figura P3.10.

3.12. Obtener el desarrollo en serie de Fourier con exponenciales complejas de las señales que se muestran en la Figura P3.12. Dibujar para cada caso la amplitud y fase del espectro.

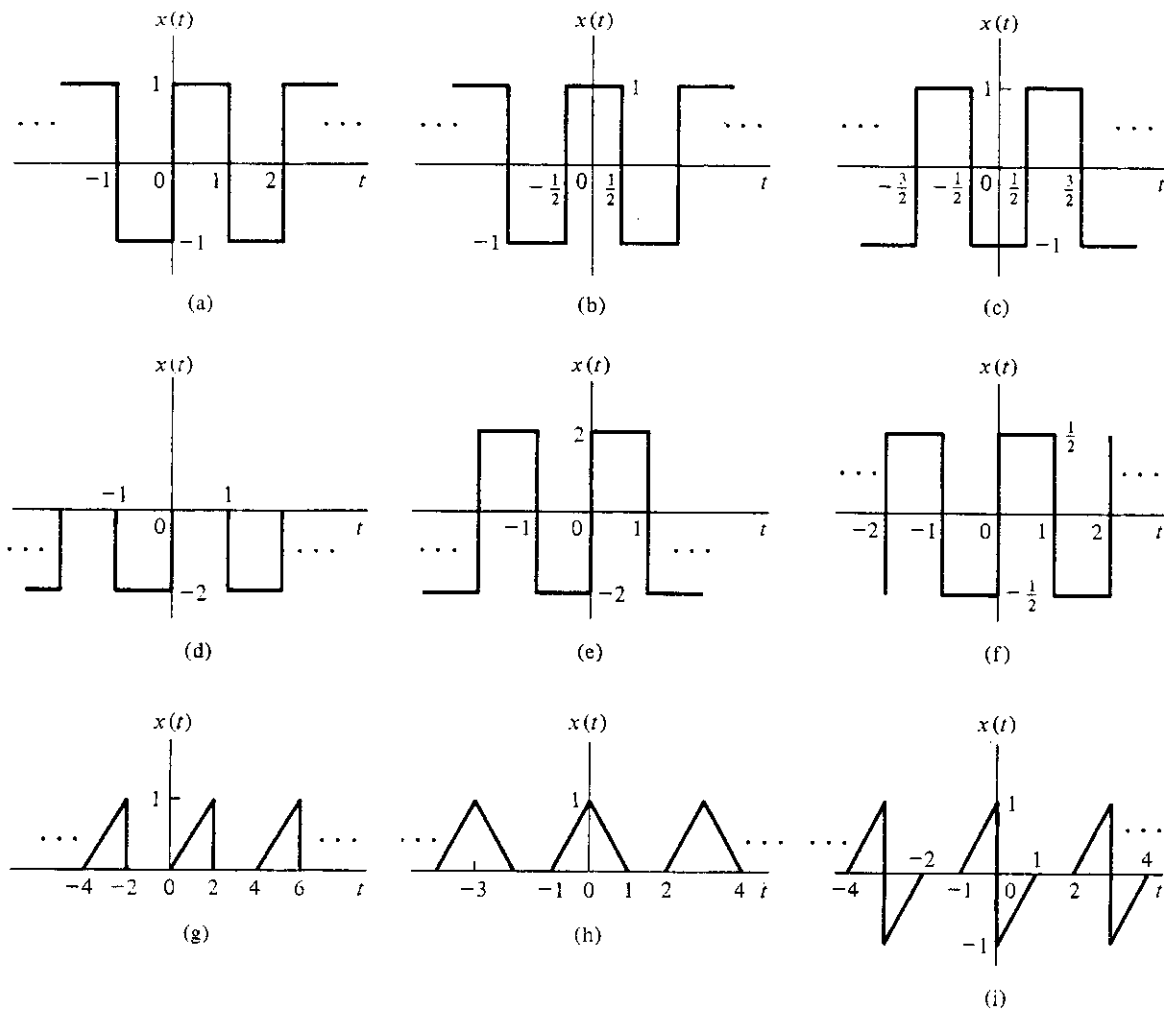


Figura P3.12.

3.13. Obtener el desarrollo en serie de Fourier con funciones trigonométricas de las señales que se muestran en la Figura P3.12.

- 3.14. (a) Demostrar que si una señal periódica es integrable en valor absoluto, entonces $|c_n| < \infty$.
- (b) ¿Tiene la señal periódica $x(t) = \sin \frac{2\pi}{t}$ representación mediante un desarrollo en serie de Fourier? ¿Por qué?
- (c) ¿Tiene la señal periódica $x(t) = \tan 2\pi t$ representación mediante un desarrollo en serie de Fourier? ¿Por qué?
- 3.15. (a) Demostrar que $x(t) = t^2$, $-\pi < t \leq \pi$, $x(t + 2\pi) = x(t)$ tiene como desarrollo en serie de Fourier

$$x(t) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos t - \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{9} \cos 3t - + \dots \right)$$

- (b) Hacer $t = 0$ para obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- 3.16. Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una señal periódica de período T son

$$c_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (1 + \exp[-\frac{jn\pi}{3}] - 2 \exp[-jn\pi]), & n \neq 0 \end{cases}$$

¿Representan una señal real? ¿Por qué, o por qué no? De la forma de c_n , deducir la señal temporal $x(t)$. Ayuda: Utilizar

$$\int \exp[-jn\omega t] \delta(t - t_1) dt = \exp[-jn\omega t_1]$$

- 3.17. (a) Dibujar la señal

$$x(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^M \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4} \cos 2n\pi t$$

para $M = 1, 3$ y 5 .

- (b) Predecir la forma de $x(t)$ cuando $M \rightarrow \infty$.

- 3.18. Obtener el desarrollo en serie de Fourier de exponenciales complejas del tren de impulsos que se muestra en la Figura P3.18.

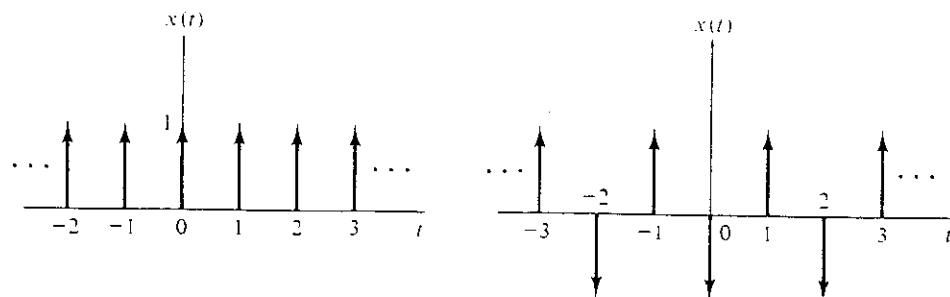


Figura P3.18.

- 3.19. Las señales del Problema 3.18 se pueden considerar periódicas de período N con N entero. Obtener los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de exponenciales para el caso de $N = 3$.
- 3.20. Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una señal periódica $x(t)$ de período T son

$$c_n = \left[\frac{\sin(n\pi/T)}{n\pi} \right]^2$$

- (a) Encontrar T tal que $c_5 = 1/150$ para T grande, de forma que $\sin(n\pi/T) \simeq n\pi/T$.
- (b) Determinar la energía en $x(t)$ y en

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-2}^2 c_n e^{jn\omega_0 t}$$

- 3.21. Especificar los tipos de simetría de las señales que se muestran en la Figura P3.12. Especificar también qué términos de las series de Fourier trigonométricas son cero.
- 3.22. La convolución circular o periódica es un caso especial de la convolución general. Para señales periódicas con el mismo período T , la convolución periódica se define mediante la integral

$$z(t) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

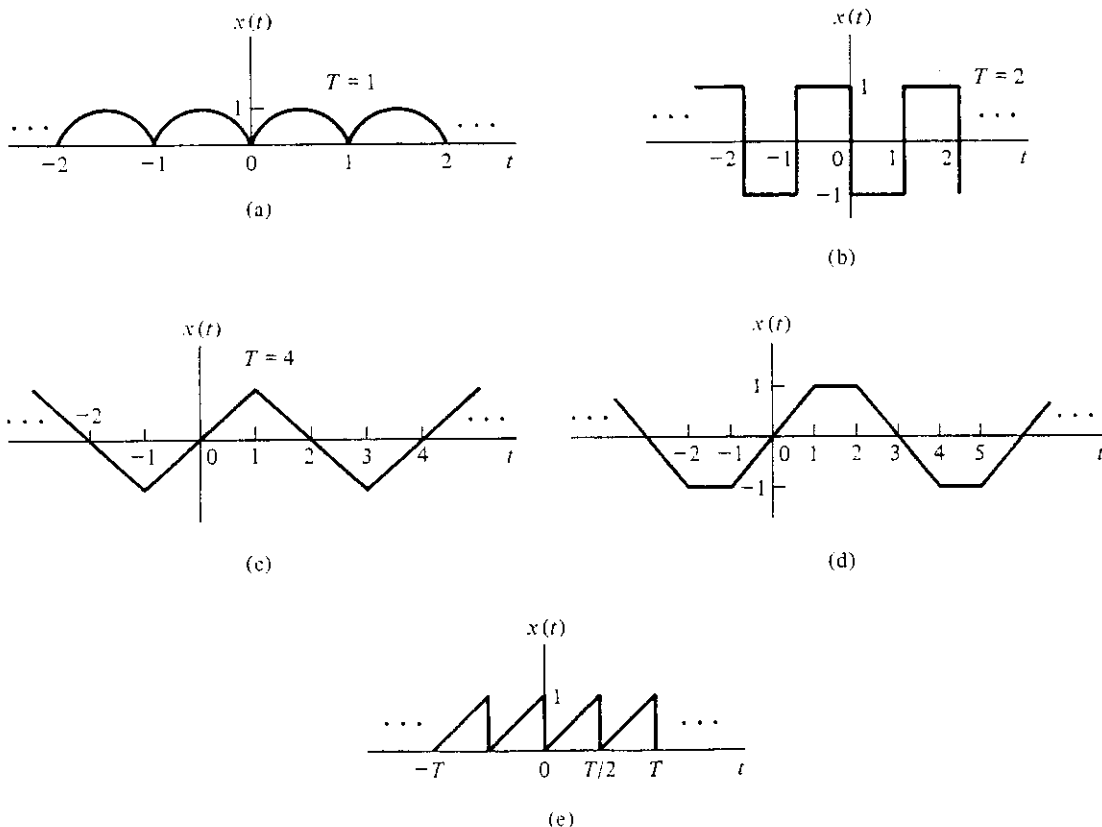


Figura P3.21.

- (a) Demostrar que $z(t)$ es periódica y encontrar su período.
 (b) Calcular que la convolución periódica tiene las propiedades conmutativa y asociativa.
- 3.23. Calcular la convolución periódica $z(t) = x(t) * y(t)$ de las dos señales que se muestran en la Figura P3.23. Verificar la Ecuación (3.5.15) para estas señales.

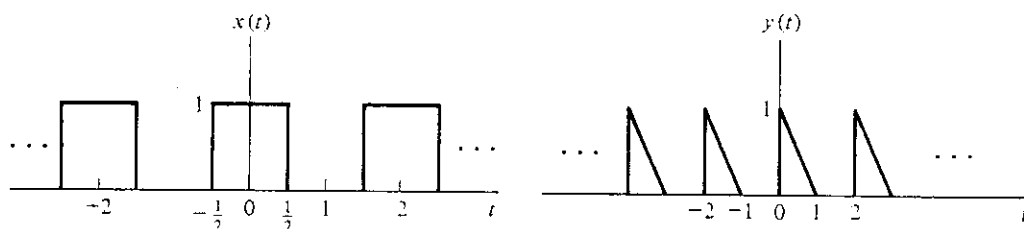


Figura P3.23.

- 3.24. Consideremos la señal periódica $x(t)$ cuyo desarrollo en serie de Fourier de exponenciales es

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[jn\omega_0 t], \quad c_0 = 0$$

- (a) Integrar término a término para obtener el desarrollo en serie de Fourier de la señal $y(t) = \int x(t) dt$ y demostrar que también es periódica.
 (b) Comparar las amplitudes de los armónicos de $y(t)$ con las amplitudes de los armónicos de $x(t)$.
 (c) ¿Cómo afecta la integración a las componentes de alta frecuencia? ¿Las amplifica o las atenúa?
 (d) Continuando con el apartado (c), ¿es la señal integrada más suave que la señal original?
- 3.25. El desarrollo en serie de Fourier de la señal triangular de la Figura P3.25(a) es

$$x(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\sin t - \frac{1}{9} \sin 3t + \frac{1}{25} \sin 5t - \frac{1}{49} \sin 7t + \dots \right)$$

Utilizar este resultado para obtener el desarrollo en serie de Fourier de la señal que se muestra en la Figura P3.25(b).

- 3.26. Se aplica una tensión $x(t)$ al circuito que se muestra en la Figura P3.26. Si los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$ son

$$c_n = \frac{1}{n^2 + 1} \exp \left[jn \frac{\pi}{3} \right]$$

- (a) Demostrar que $x(t)$ debe ser una señal real.
 (b) ¿Cuál es el valor medio de la señal?
 (c) Encontrar los tres primeros armónicos distintos de cero de $y(t)$.

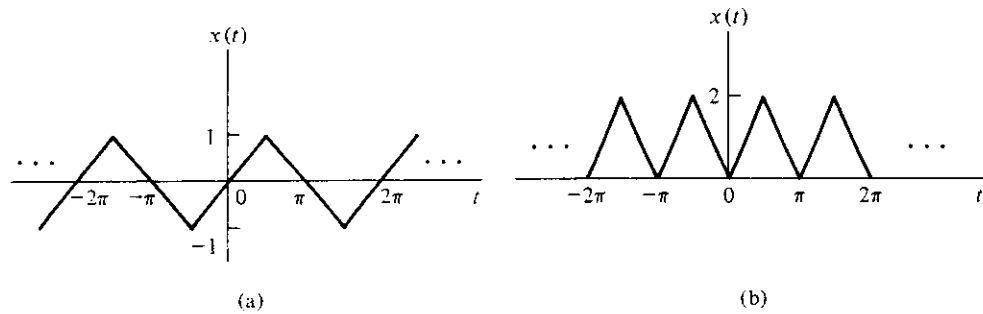


Figura P3.25.

- (d) ¿Cómo actúa el circuito sobre los componentes de alta frecuencia de la entrada?
- (e) Repetir los apartados (c) y (d) para el caso en el que $y(t)$ represente la tensión entre los extremos de la resistencia.

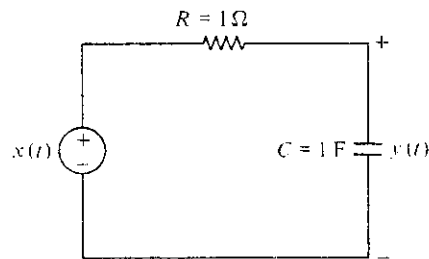


Figura P3.26.

- 3.27. Calcular la tensión $y(t)$ entre los extremos del condensador de la Figura P3.26 si la entrada es

$$x(t) = 1 + 3 \cos(t + 30^\circ) + \cos(2t)$$

- 3.28. La señal de entrada

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[j\omega_0 t]$$

se aplica a cuatro sistemas diferentes, y las señales de salida resultantes son

$$y_1(t) = \sum_{n=-10}^{10} |c_n| \exp[j(n\omega_0 t + \phi - 3n\omega_0)]$$

$$y_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[j(n\omega_0(t - t_0) - 3n\omega_0)]$$

$$y_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-\omega_0|n|] c_n \exp[j(n\omega_0 t - 3n\omega_0)]$$

$$y_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-j\omega_0|n|] c_n \exp[j(n\omega_0 t)]$$

Determinar qué tipo de distorsión tiene el sistema.

3.29. Dado el circuito de la Figura P3.29:

- (a) Determinar su función de transferencia $H(\omega)$.
- (b) Dibujar $|H(\omega)|$ y $\angle H(\omega)$.
- (c) Consideremos la señal de entrada $x(t) = 10 \exp[j\omega t]$. Encontrar el mayor valor de ω que podemos usar de forma que

$$\frac{|y(t) - x(t)|}{|x(t)|} < 0,01$$

- (d) ¿Cual es la máxima frecuencia ω que se puede usar para garantizar que $\angle H(\omega)$ no se desvía de la característica lineal más de 0,02?

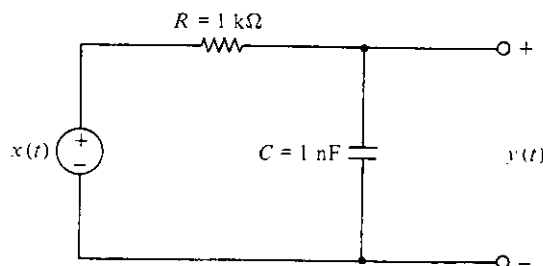


Figura P3.29.

- 3.30. Los dispositivos no lineales se utilizan para generar armónicos de la frecuencia de entrada. Consideremos el sistema no lineal descrito por la ecuación

$$y(t) = Ax(t) + Bx^2(t)$$

Obtener la respuesta del sistema a la señal $x(t) = a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t$. Indicar todos los armónicos nuevos que genera el sistema, y sus amplitudes.

- 3.31. La señal cuadrada del Ejemplo 3.3.3 con $K = 1$, $T = 500 \mu s$ y $\tau = 100 \mu s$ se pasa por un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte $f_c = 4,2 \text{ kHz}$, y se aplica a un sistema LTI cuya respuesta en frecuencia $H(\omega)$ se muestra en la Figura P3.31. Encontrar la respuesta del sistema.
- 3.32. La señal triangular del Ejemplo 3.5.2 con período $T = 4$ y amplitud de pico $A = 10$ se aplica a una combinación en serie de una resistencia $R = 100 \Omega$ y una bobina $L = 0,1 \text{ H}$. Determinar la potencia disipada en la resistencia.
- 3.33. Un sistema de primer orden obedece a la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2x(t)$$

Si la entrada es la señal del Ejemplo 3.3.2, calcular las amplitudes de los tres primeros armónicos de la salida.

- 3.34. Repetir el Problema 3.33 para el sistema

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + x(t)$$

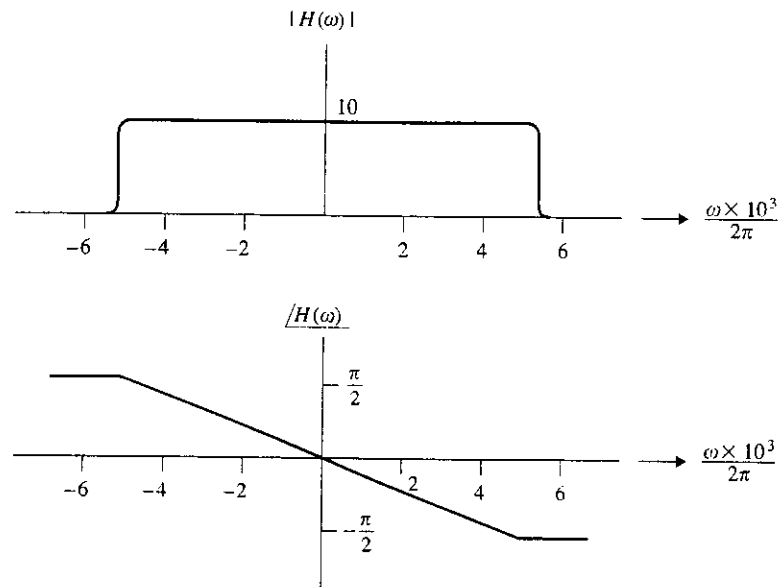


Figura P3.31.

- 3.35. En el sistema que se muestra en la Figura P3.35, la entrada $x(t)$ es una señal periódica de período T . Demostrar que en cualquier instante $t > T_1$ tras la conmutación de la entrada, $y_c(t)$ e $y_s(t)$ se aproximan a $\text{Re}\{c_n\}$ y a $\text{Im}\{c_n\}$, respectivamente. De hecho, si T_1 es un múltiplo entero del período T de la señal de entrada $x(t)$ las salidas son exactamente iguales a los mencionados valores. Comentar los valores de la salida en los siguientes casos

- (a) $T_1 = T$
- (b) $T_1 = lT$
- (c) $T_1 \gg T$, pero $T_1 \neq T$

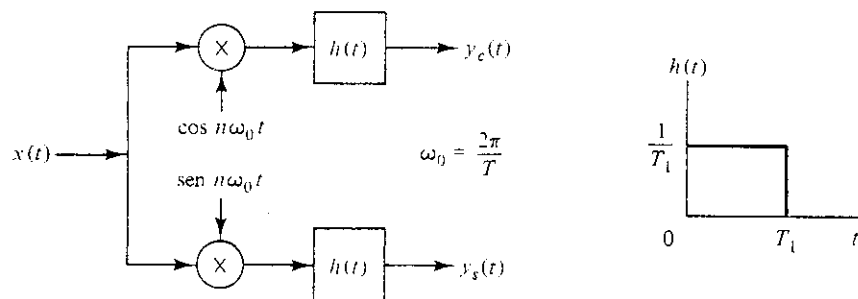


Figura P3.35.

- 3.36. Consideremos el circuito que se muestra en la Figura P3.36. La entrada es la señal rectificadora en media onda que se utiliza en el Problema 3.8. Calcular la amplitud de los armónicos segundo y cuarto de la salida $y(t)$.

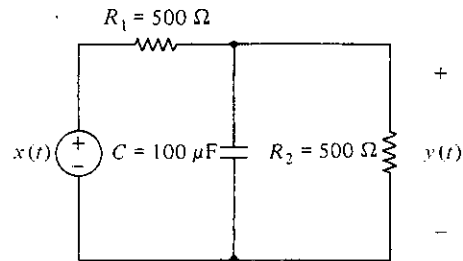


Figura P3.36.

- 3.37. Consideremos el circuito que se muestra en la Figura P3.37. La entrada es la señal rectificada en media onda que se utiliza en el Problema 3.8. Obtener la amplitud de los armónicos segundo y cuarto de la salida $y(t)$.

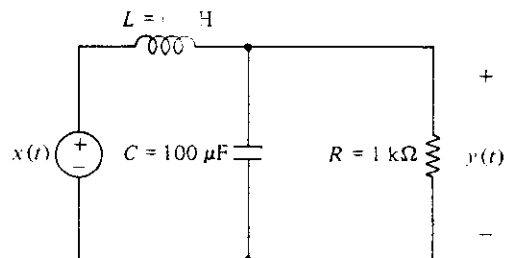


Figura P3.37.

- 3.38. (a) Determinar la componente continua y la amplitud del segundo armónico de la señal de salida $y(t)$ de los circuitos de las Figuras P3.36 y P3.37 si la entrada es la señal rectificada en onda completa que se utiliza en el Problema 3.10.
 (b) Calcular el primer armónico de la señal de salida $y(t)$ de los circuitos de las Figuras P3.36 y P3.37 si la entrada es la señal triangular del Problema 3.32.
- 3.39. Demostrar las siguientes identidades

$$(a) \sum_{n=-N}^N \exp[jn\omega_0 t] = \frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t\right]}{\sin(\omega_0 t/2)}$$

$$(b) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{\sin(\omega_0 t/2)} dt = 1$$

- 3.40. Dada la señal $x(t)$ que se utiliza en el Ejemplo 3.3.3, manteniendo T fijo, discutir el efecto sobre los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier al variar τ (con la restricción de $\tau < T$).
- 3.41. Consideremos la señal $x(t)$ que se muestra en la Figura 3.3.6. Determinar qué efecto se produce en la amplitud del segundo armónico de $x(t)$ cuando τ incorpora un pequeño error de medida. Para ello, hacer $\tau = \tau_0 - \varepsilon$, con $\varepsilon \ll \tau_0$ y encontrar la dependencia del segundo armónico con ε . Obtener el porcentaje de cambio de $|c_2|$ para $T = 10$, $\tau = 1$ y $\varepsilon = 0,1$.

3.42. La Figura P3.42 muestra una señal sinusoidal truncada.

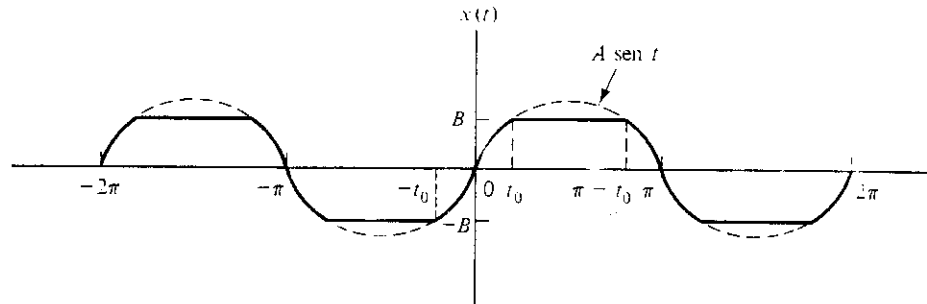


Figura P3.42.

- (a) Determinar los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier.
 - (b) Calcular la amplitud del tercer armónico para $B = A/2$.
 - (c) Encontrar el valor de t_0 para el que $|c_3|$ es máximo. Este método se utiliza para generar armónicos a partir de una onda sinusoidal.
- 3.43. Para la señal $x(t)$ que se muestra en la Figura P3.43:
- (a) Determinar los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier.
 - (b) Encontrar el valor óptimo de t_0 para el que $|c_3|$ es máximo.
 - (c) Comparar el resultado con el apartado (c) del Problema 3.42.

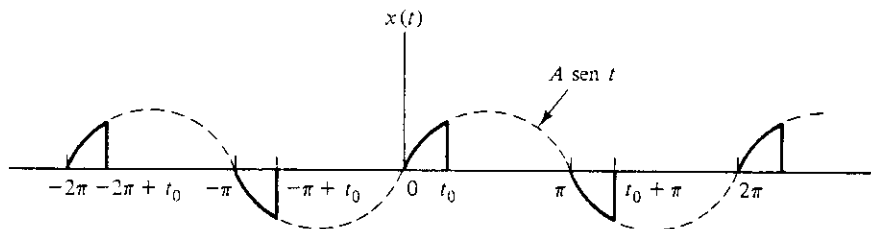


Figura P3.43.

3.44. La señal $x(t)$ que se muestra en la Figura P3.44 corresponde a una señal rectificadora en media onda y suavizada. Las constantes t_1 , t_2 y A satisfacen las siguientes relaciones

$$\omega t_1 = \pi - \tan^{-1}(\omega RC)$$

$$A = \text{sen } \omega t_1 \exp\left[\frac{t_1}{RC}\right]$$

$$A \exp\left[-\frac{t_2}{RC}\right] = \text{sen } \omega t_2$$

$$RC = 0.1 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi \times 60 = 377 \text{ rad/s}$$

- (a) Verificar que $\omega t_1 = 1,5973$ rad, $A = 1,0429$ y $\omega t_2 = 7,316$ rad.
- (b) Determinar los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier con exponenciales complejas.
- (c) Encontrar la relación de amplitudes entre el primer armónico y la componente continua.

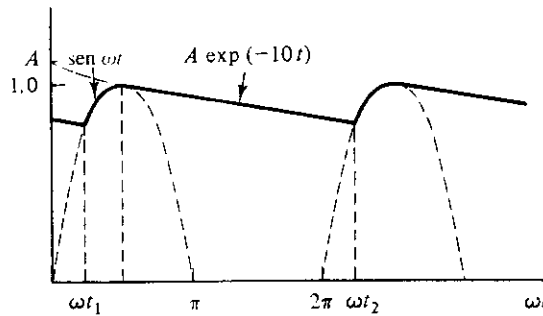


Figura P3.44.

3.11. PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

- 3.45. Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier se pueden calcular numéricamente. Esto resulta ventajoso cuando no existe una expresión analítica para $x(t)$ y se dispone de datos numéricos de la misma, o cuando la integración es difícil de realizar. Demostrar que

$$a_0 \simeq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x(m\Delta t)$$

$$a_n \simeq \frac{2}{M} \sum_{m=1}^M x(m\Delta t) \cos \frac{2\pi mn}{M}$$

$$b_n \simeq \frac{2}{M} \sum_{m=1}^M x(m\Delta t) \sin \frac{2\pi mn}{M}$$

siendo $x(m\Delta t)$ M valores equiespaciados de $x(t)$ en el intervalo $(0, T)$, y Δt el intervalo entre datos consecutivos de forma que

$$\Delta t = T/M$$

(Idea: aproximar la integral como una suma de rectángulos, cada uno de ellos con anchura Δt).

- 3.46. Consideremos la señal triangular del Ejemplo 3.5.2 con $A = \pi/2$ y $T = 2\pi$.
- (a) Utilizando el método del Problema 3.45, calcular numéricamente los primeros cinco armónicos tomando N puntos equiespaciados en cada período de esta señal. Particularizar para $N = 100$.
 - (b) Comparar los valores numéricos obtenidos en el apartado (a) con los valores reales.

- (c) Repetir el ejercicio para valores de $N = 20, 40, 60$ y 80 . Comentar los resultados.

3.47. La señal de la Figura P3.47 se puede representar así:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{impar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\pi t$$

Utilizando la aproximación

$$\hat{x}_N(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{impar}}}^N \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\pi t$$

escribir un programa de computador para calcular y representar la función de error

$$e_N(t) = x(t) - \hat{x}_N(t)$$

desde $t = 0$ hasta $t = 2$ para $N = 1, 3, 5$ y 7 .

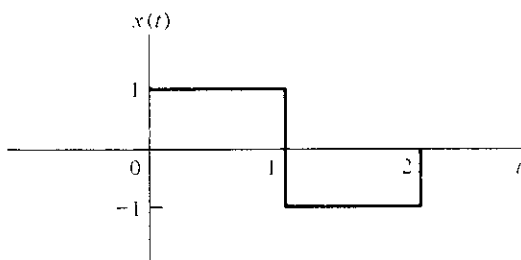


Figura P3.47.

- 3.48. La integral del cuadrado del error (energía del error) de la aproximación del Problema 3.47 con N términos es

$$\int_0^2 |e_N(t)|^2 dt = \int_0^2 |x(t)|^2 dt - \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{impar}}}^N \left| \frac{4}{n\pi} \right|^2$$

Calcular la integral del error al cuadrado para $N = 11, 21, 32, 41, 51, 101$ y 201 .

- 3.49. Escribir un programa para calcular numéricamente los coeficientes del desarrollo en serie utilizando las funciones $\operatorname{wal}_w(k, t)$, $0 \leq k \leq 6$ de la señal $x(t) = t[u(t) - u(t-1)]$. Comparar los resultados con los del Problema 3.6.



La transformada de Fourier

4.1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 3 hemos visto que el desarrollo en serie de Fourier es una poderosa herramienta para resolver problemas en los que intervienen señales periódicas. Este hecho se puso de manifiesto en la Sección 3.6, donde demostramos la forma en que los sistemas LTI procesan las señales de entrada periódicas para producir la respuesta de salida. De forma más precisa, a cualquier frecuencia $n\omega_0$, demostramos que la amplitud de la salida es igual al producto de la amplitud de la señal periódica de entrada, $|c_n|$ por el módulo de la función de transferencia del sistema $|H(\omega)|$ calculado en los valores $\omega = n\omega_0$. La fase de la salida es igual a la suma de la fase de la señal periódica de entrada $\angle c_n$ y la fase del sistema $\angle H(\omega)$ evaluada en $\omega = n\omega_0$.

En el Capítulo 3 vimos cómo descomponer una señal periódica de período T en una suma de infinitas exponenciales complejas armónicamente relacionadas de la forma $\exp[jn\omega_0 t]$. Todos los armónicos tienen un período común $T = 2\pi/\omega_0$. En este capítulo, vamos a presentar otra poderosa técnica matemática, denominada transformada de Fourier, que se utiliza para describir tanto señales periódicas como señales no periódicas para las que no existe desarrollo en serie de Fourier. De la misma forma que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier, la transformada de Fourier especifica el contenido espectral de una señal, proporcionando así una descripción en el dominio de la frecuencia. Además de su utilidad para la representación analítica de señales no periódicas, la transformada de Fourier es una valiosa herramienta para el análisis de sistemas LTI.

Quizá es difícil ver cómo algunas señales no periódicas típicas, como

$$u(t), \quad \exp[-t]u(t), \quad \text{rect}(t/T)$$

se pueden sintetizar utilizando exponenciales complejas. El problema es que las exponenciales complejas están definidas en todo el tiempo y tienen amplitudes constantes, mientras que las señales no periódicas típicas no tienen esas propiedades. A pesar de esto, veremos que las señales no periódicas tienen contenido armónico. Es decir, que se pueden representar como superposición de exponenciales complejas armónicamente relacionadas.

En la Sección 4.2 utilizaremos el desarrollo en serie de Fourier como punto de partida para el desarrollo de la transformada de Fourier y demostraremos que ésta se puede considerar como una extensión del desarrollo en serie de Fourier. En la Sección 4.3 consideraremos las propiedades de la transformada de Fourier. Estas propiedades la convierten en una herramienta de utilidad en el análisis de sistemas LTI. En esta sección daremos también algunos ejemplos del cálculo de algunas parejas de transformadas elementales. En la Sección 4.4 presentaremos algunas aplicaciones relacionadas con el uso de la transformada de Fourier en sistemas de comunicaciones, tratamiento de señal, y sistemas de control. En la Sección 4.5 presentaremos el concepto de ancho de banda y de duración de una señal y consideraremos algunas medidas de estas magnitudes. Finalmente, en la misma sección, desarrollaremos el principio de incertidumbre y su significado.

4.2. LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO CONTINUO

En el Capítulo 3 presentamos el desarrollo en serie de Fourier como un método de análisis de señales periódicas. Vimos que la representación de una señal periódica utilizando una suma ponderada de exponenciales complejas era de utilidad en la obtención de la respuesta en estado estacionario a entradas periódicas de sistemas estables, lineales e invariantes con el tiempo. El análisis basado en series de Fourier presenta algunas limitaciones en el sentido de estar restringido a entradas periódicas, cuando muchas señales de interés no son periódicas. Se puede desarrollar un método, denominado transformada de Fourier para representar señales no periódicas, descomponiéndolas en un conjunto de exponenciales ponderadas de forma análoga a como se hace en el desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas. Con objeto de evitar desarrollos matemáticos rigurosos, siempre que sea necesario utilizaremos razonamientos heurísticos, mediante argumentos con sentido físico. Como veremos a continuación, en el caso de señales no periódicas, la suma del desarrollo en serie de Fourier se transforma en una integral y la amplitud de cada exponencial es esencialmente cero, pero la totalidad de ese conjunto de exponenciales infinitesimales produce la señal no periódica.

4.2.1. Desarrollo de la transformada de Fourier

La generalización del desarrollo en serie de Fourier a señales no periódicas fue sugerida por el propio Fourier y se puede deducir de un examen de la estructura del desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas cuando el período T tiende a infinito. En la realización de la transición desde el desarrollo en serie de Fourier hasta la transformada de Fourier, utilizaremos siempre que sea necesario razonamientos de tipo heurístico, mediante argumentos de tipo físico, con objeto de evitar conceptos matemáticos un tanto sutiles. Tras tomar el límite, encontraremos que la amplitud del espectro de una señal no periódica ya no es un espectro de líneas (como sucedía en el caso de señales periódicas), sino que ocupa un continuo de frecuencias. Lo mismo sucede con la correspondiente fase.

Para aclarar cómo se produce el cambio del espectro discreto al espectro continuo, consideremos la señal $\tilde{x}(t)$ que se muestra en la Figura 4.2.1. Supongamos ahora que aumentamos cuidadosamente el período T manteniendo inalterado un período de la señal $\tilde{x}(t)$. En el límite, cuando $T \rightarrow \infty$, sólo queda un pulso, puesto que sus vecinos adyacentes se han desplazado al infinito. Como vimos en el Capítulo 3, aumentar T tiene dos efectos sobre el espectro de $\tilde{x}(t)$: la amplitud del espectro decrece como $1/T$, y la separación entre líneas decrece como $2\pi/T$. Cuando T tiende a infinito, la separación entre líneas tiende a cero. Esto significa que las líneas del espectro se acercan entre sí hasta llegar a formar un

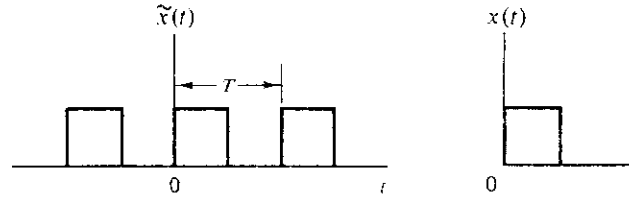


Figura 4.2.1. Obtención de una señal no periódica aumentando el período T .

continuo. La forma de la amplitud y de la fase del espectro está determinada por la forma del único pulso restante en la nueva señal $x(t)$ que no es periódica.

Para ver matemáticamente lo que sucede, utilizaremos la forma exponencial del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$. Es decir,

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[jn\omega_0 t] \quad (4.2.1)$$

en donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) \exp[-jn\omega_0 t] dt \quad (4.2.2)$$

En el límite cuando $T \rightarrow \infty$ vemos que $\omega_0 = 2\pi/T$ se convierte en una cantidad infinitesimal, $d\omega$ de forma que

$$\frac{1}{T} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$$

Postularemos que el límite, $n\omega_0$ se transformará en una variable continua. Entonces, de la Ecuación (4.2.2), los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier por intervalo unitario de frecuencia son

$$\frac{c_n}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t) \exp[-j\omega t] dt \quad (4.2.3)$$

Sustituyendo la Ecuación (4.2.3) en la Ecuación (4.2.1), y teniendo en cuenta que en el límite la suma se transformará en una integral y $\tilde{x}(t)$ se aproximará a $x(t)$ obtenemos

$$x(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left[\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j\omega t] dt \right] \exp[j\omega t] \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.2.4)$$

La integral interior entre corchetes sólo es función de ω , no de t . Llamando a esta integral $X(\omega)$ podemos volver a escribir la Ecuación (4.2.4):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp[j\omega t] d\omega \quad (4.2.5)$$

donde

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j\omega t] dt \quad (4.2.6)$$

Las Ecuaciones (4.2.5) y (4.2.6) forman la pareja de transformada de Fourier que utilizan la mayoría de los ingenieros (algunos ingenieros de comunicaciones prefieren escribir la variable frecuencia en hertzios en vez de en radianes por segundo; esto no es más que un simple cambio de variable). $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$ y desempeña la misma función para señales no periódicas que los coeficientes c_n para señales periódicas. Por tanto, $X(\omega)$ es el espectro de $x(t)$ y es una función continua definida para todos los valores de ω , mientras que c_n sólo está definido para frecuencias discretas. Por tanto, como dijimos anteriormente, una señal no periódica tiene un espectro continuo en lugar de un espectro de líneas. $X(\omega)$ representa los pesos de las exponenciales complejas utilizadas para representar la señal en la Ecuación (4.2.5) y en general, es una función compleja de la variable ω . Por tanto, se puede escribir así:

$$X(\omega) = |X(\omega)| \exp [j\phi(\omega)] \quad (4.2.7)$$

La representación del módulo de $X(\omega)$ en función de ω se denomina amplitud del espectro de $x(t)$, y $|X(\omega)|^2$ se denomina energía espectral. La representación de la fase de $X(\omega)$ en función de ω se denomina fase del espectro.

En el Capítulo 3, vimos que para cualquier señal periódica $x(t)$ existe una correspondencia única entre dicha señal y el conjunto de coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier c_n . Aquí también se puede demostrar que existe una correspondencia única entre $x(t)$ y $X(\omega)$, lo que se indicará así:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

lo que quiere decir que para cada señal $x(t)$ que posea transformada de Fourier $X(\omega)$, ésta será única y viceversa. Posteriormente presentaremos algunas condiciones suficientes para que una señal tenga transformada de Fourier. Deseamos indicar que aunque hemos utilizado una señal $x(t)$ real para desarrollar la pareja de transformadas, las relaciones que definen la transformada de Fourier son también válidas para señales complejas. Sin embargo, con pocas excepciones, nuestro principal interés serán las señales reales.

Por motivos de notación, a veces $X(\omega)$ se indica como $\mathcal{F}\{x(t)\}$, que se lee «transformada de Fourier de $x(t)$ ». Además, utilizaremos como convención que la transformada de Fourier se indicará con la misma letra de la señal, pero en mayúsculas. Por ejemplo

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp [-j\omega t] dt$$

Antes de examinar las propiedades de la transformada de Fourier y su significado físico, presentaremos un conjunto de condiciones suficientes para la existencia de la transformada de Fourier.

4.2.2. Existencia de la transformada de Fourier

Se dice que la señal $x(t)$ tiene transformada de Fourier en sentido ordinario si la integral de la Ecuación (4.2.6) converge (es decir, existe). Como

$$|\int y(t) dt| \leq \int |y(t)| dt$$

y $|\exp [-j\omega t]| = 1$, se deduce que la integral de la Ecuación (4.2.6) existe si

1. $x(t)$ es absolutamente integrable
2. $x(t)$ no presenta «comportamientos anómalos».

La primera condición significa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (4.2.8)$$

Una clase de señales que satisfacen la Ecuación (4.2.8) son las señales de energía finita. En general, estas señales, o bien son limitadas en el tiempo o asintóticamente limitadas en el tiempo, en el sentido de que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm \infty$. Las señales de potencia media finita (que fueron definidas en el Capítulo 1 como señales con contenido de energía infinito, pero potencia media finita) también tienen transformada de Fourier, pero contienen impulsos. Por consiguiente, tanto las señales de energía finita como de potencia media finita tienen transformada de Fourier.

No existencia de «comportamientos anómalos» significa que la señal es de variación acotada. En pocas palabras, esto quiere decir que $x(t)$ se puede representar mediante una curva de longitud finita en cualquier intervalo de tiempo finito o alternativamente, que la señal tiene un número finito de discontinuidades, máximos y mínimos en cualquier intervalo de tiempo finito. Si la señal es discontinua en un punto t_0 , la integral de la Ecuación (4.2.5) converge al valor $\frac{1}{2} [x(t_0^+) + x(t_0^-)]$. En los demás puntos, converge al valor de $x(t)$. Excepto los impulsos, la mayoría de las señales de interés no presentan comportamientos anómalos y satisfacen la Ecuación (4.2.8).

Las condiciones presentadas para la existencia de la transformada de Fourier de $x(t)$ son condiciones suficientes. Esto significa que hay señales que pueden violar alguna de las condiciones o ambas y tener transformada de Fourier. Como ejemplos tenemos las señales de potencia media finita que no son integrables en valor absoluto en un intervalo de longitud infinita, y los trenes de impulsos, que tienen «comportamientos anómalos», y que no son ni de energía finita ni de potencia media finita, aunque tienen transformada de Fourier. Es posible tratar señales que no tienen transformada de Fourier en sentido ordinario mediante la generalización de transformadas en el límite. Por ejemplo, para obtener la transformada de Fourier de una constante, se considera la señal $x(t) = \text{rect}(t/\tau)$ y, tras obtener previamente la transformada de Fourier de esta señal, se hace que $\tau \rightarrow \infty$.

4.2.3. Ejemplos de transformadas de Fourier en tiempo continuo

En esta sección, calcularemos la transformada de Fourier de algunas señales temporales que encontraremos frecuentemente.

Ejemplo 4.2.1 La transformada de Fourier del pulso rectangular $x(t) = \text{rect}(t/\tau)$ es

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j\omega t] dt \\ &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp[-j\omega t] dt \\ &= \frac{1}{-j\omega} \left(\exp\left[\frac{-j\omega\tau}{2}\right] - \exp\left[\frac{j\omega\tau}{2}\right] \right) \end{aligned}$$

que se puede simplificar así:

$$X(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = \tau \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2\pi} = \tau \operatorname{Sa} \frac{\omega\tau}{2}$$

Como $X(\omega)$ es una función real de ω , su fase es cero para todo ω . La Figura 4.2.2 muestra $X(\omega)$ en función de ω

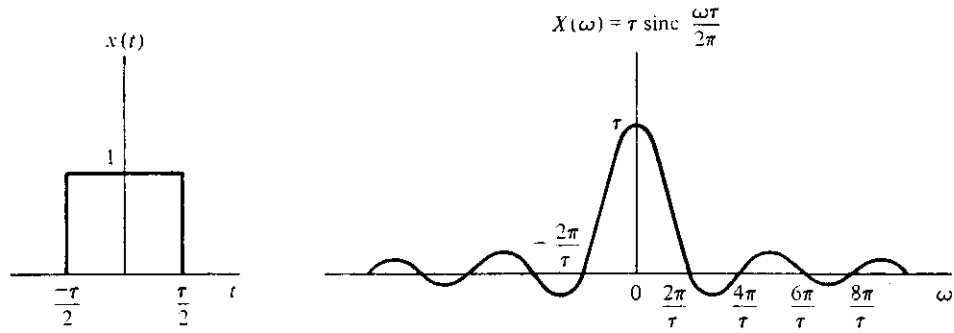


Figura 4.2.2. Transformada de Fourier de un pulso rectangular.

Resulta claro que el espectro del pulso rectangular se extiende en todo el intervalo $-\infty < \omega < \infty$. Sin embargo, si observamos la Figura 4.2.2, vemos que la mayor parte del contenido espectral del pulso está encerrado en el intervalo $-2\pi/\tau < \omega < 2\pi/\tau$. Este intervalo se denomina lóbulo principal de la señal sinc. La otra parte del espectro representa lo que se denominan lóbulos laterales. Si aumentamos τ el lóbulo principal se estrecha, y si τ disminuye, obtenemos una transformada de Fourier con un lóbulo principal más ancho.

Ejemplo 4.2.2 Consideremos el pulso triangular definido por la siguiente expresión

$$\Delta(t/\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau}, & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$$

Este pulso es de longitud unidad, está centrado en $t = 0$ y tiene de anchura 2τ . Su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t/\tau) \exp[-j\omega t] dt \\ &= \int_{-\tau}^0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \exp[-j\omega t] dt + \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \exp[-j\omega t] dt \\ &= \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \exp[j\omega t] dt + \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \exp[-j\omega t] dt \\ &= 2 \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \cos \omega t dt \end{aligned}$$

Tras realizar la integración y simplificar la expresión se obtiene

$$\Delta(t/\tau) \leftrightarrow \tau \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega\tau}{2\pi} = \tau \operatorname{Sa}^2 \frac{\omega\tau}{2}$$

Ejemplo 4.2.3

La transformada de Fourier de la señal exponencial unilateral

$$x(t) = \exp[-\alpha t]u(t), \quad \alpha > 0$$

se obtiene aplicando la Ecuación (4.2.6)

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\exp[-\alpha t]u(t) \exp[-j\omega t]) dt \\ &= \int_0^{\infty} \exp[-(\alpha + j\omega)t] dt \\ &= \frac{1}{\alpha + j\omega} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Ejemplo 4.2.4

En este ejemplo calculamos la transformada de Fourier de la señal exponencial bilateral

$$x(t) = \exp[-\alpha|t|], \quad \alpha > 0$$

Aplicando la Ecuación (4.2.6), la transformada es

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^0 \exp[\alpha t] \exp[-j\omega t] dt + \int_0^{\infty} \exp[-\alpha t] \exp[-j\omega t] dt \\ &= \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.5

La transformada de Fourier de una función impulso se puede obtener de forma inmediata aplicando la Ecuación (4.2.6) y haciendo uso de la Ecuación (1.6.7):

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp[-j\omega t] dt = 1$$

Por tanto, podemos definir la pareja de transformadas

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (4.2.10)$$

Utilizando la fórmula de inversión, debe cumplirse que

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega t] d\omega \quad (4.2.11)$$

La Ecuación (4.2.11) indica que la señal impulso consta teóricamente de infinitas sinusoides de igual amplitud en todas las frecuencias. Esta integral carece de sentido, a menos que interpretemos $\delta(t)$ como una función especificada por sus propiedades, en lugar de utilizar la definición ordinaria de función dando sus valores para cada t , como vimos en el Capítulo 1. La Ecuación (4.2.11) se puede escribir también en forma de límite

$$\delta(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin xt}{\pi t} \quad (4.2.12)$$

Este resultado se puede comprobar si escribimos la Ecuación (4.2.11) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \exp[j\omega t] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sin xt}{t} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin xt}{\pi t} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.6

Se puede demostrar fácilmente que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega t] d\omega/2\pi$ «se comporta» como la función impulso unidad si la sustituimos dentro de una integral. Es decir, si calculamos una integral de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega t] d\omega \right] g(t) dt$$

donde $g(t)$ es cualquier señal arbitraria sin comportamientos anómalos que sea continua en $t = 0$ y que tenga transformada de Fourier $G(\omega)$. Intercambiando el orden de integración tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp[j\omega t] dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(-\omega) d\omega$$

Aplicando la fórmula de inversión vemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = g(0)$$

Es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega t] d\omega/2\pi$ «se comporta» como el impulso unidad en $t = 0$.

Intercambiando los papeles de t y ω de en la Ecuación (4.2.11) se puede obtener otra pareja de transformadas. El resultado es

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega t] dt$$

o

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (4.2.13)$$

Es decir, la transformada de Fourier de una constante es un impulso en el dominio de la frecuencia. El factor 2π es debido a que estamos utilizando frecuencia angular. Si escribiéramos la transformada con la frecuencia medida en hertzios, el factor 2π desaparecería ($\delta(\omega) = \delta(f)/2\pi$).

Ejemplo 4.2.7

En este ejemplo, utilizaremos la Ecuación (4.2.12) y el Ejemplo 4.2.1 para demostrar la Ecuación (4.2.13). Haciendo tender τ a infinito en el Ejemplo 4.2.1, encontramos que la señal $x(t)$ se aproxima a 1 para todos los valores de t . Por otra parte, usando la Ecuación (4.2.12), el límite de la transformada de $\text{rect}(t/\tau)$ es

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{2}{\omega} \frac{\sin \omega \tau}{2} = 2\pi \delta(\omega)$$

Ejemplo 4.2.8

Consideremos la señal exponencial $x(t) = \exp[j\omega_0 t]$. La transformada de Fourier de esta señal es

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega_0 t] \exp[-j\omega t] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt \end{aligned}$$

Utilizando el resultado expresado en la Ecuación (4.2.13) obtenemos

$$\exp[j\omega_0 t] \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (4.2.14)$$

como era de esperar, ya que la señal $\exp[j\omega_0 t]$ tiene toda su energía concentrada en ω_0 .

Las señales periódicas son señales de potencia media finita, y debemos esperar, de acuerdo con la discusión efectuada en la Sección 4.2.2, que su transformada de Fourier contenga impulsos. En el Capítulo 3 examinamos el espectro de señales periódicas calculando los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier. Encontramos que el espectro consiste en una serie de líneas localizadas en $\pm n\omega_0$, siendo ω_0 la frecuencia fundamental de la señal periódica. En el siguiente ejemplo, encontraremos la transformada de Fourier de señales periódicas y demostraremos que el espectro de señales periódicas está formado por trenes de impulsos.

Ejemplo 4.2.9

Consideremos la señal periódica $x(t)$ de período T . Por lo tanto, $\omega_0 = 2\pi/T$. Supongamos que el desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$ es

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[jn\omega_0 t]$$

Tomando la transformada de Fourier de ambos miembros resulta

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}\{\exp[jn\omega_0 t]\}$$

Utilizando la Ecuación (4.2.14) obtenemos

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (4.2.15)$$

Por tanto, la transformada de Fourier de una señal periódica es simplemente un tren de impulsos localizados en $\omega = n\omega_0$. Cada impulso tiene un peso de $2\pi c_n$, y todos ellos están separados entre sí ω_0 . Nótese que debido a que la señal $x(t)$ es periódica, el módulo del espectro $|X(\omega)|$ es un tren de impulsos de peso $2\pi|c_n|$, mientras que el espectro que se obtiene mediante el desarrollo en serie de Fourier es un espectro de líneas de amplitud finita $|c_n|$. Nótese también que la transformada de Fourier no es una función periódica. Incluso aunque los impulsos están separados la misma cantidad, sus pesos son todos diferentes.

Ejemplo 4.2.10 Consideremos la señal periódica

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

que tiene período T . Para encontrar su transformada de Fourier, tenemos que calcular primero los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier. Aplicando la Ecuación (3.3.4):

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) \exp\left[-\frac{j2\pi nt}{T}\right] dt = \frac{1}{T}$$

ya que $x(t) = \delta(t)$ en cualquier intervalo de longitud T . Por tanto, el tren de impulsos tiene el siguiente desarrollo en serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \exp\left[\frac{j2\pi nt}{T}\right]$$

Utilizando la Ecuación (4.2.14), encontramos que la transformada de Fourier del tren de impulsos es

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) \quad (4.2.16)$$

Es decir, la transformada de Fourier de una secuencia de impulsos en el dominio del tiempo es otra secuencia de impulsos en el dominio de la frecuencia.

La Tabla 4.1 contiene algunas otras parejas de transformadas de Fourier.

4.3. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Existen varias propiedades de la transformada de Fourier que permiten resolver algunos problemas por simple inspección. En esta sección, incluiremos muchas de estas propiedades, aunque algunas de ellas puedan resultar más o menos obvias al lector.

Tabla 4.1. Algunas parejas seleccionadas de transformadas de Fourier

$x(t)$	$x(\omega)$
1. 1	$2\pi\delta(\omega)$
2. $u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
3. $\delta(t)$	1
4. $\delta(t - t_0)$	$\exp[-j\omega t_0]$
5. $\text{rect}(t/\tau)$	$\tau \text{sinc} \frac{\omega\tau}{2\pi} = \frac{2 \text{sen } \omega\tau/2}{\omega}$
6. $\frac{\omega_B}{\pi} \text{sinc} \frac{\omega_B t}{\pi} = \frac{\text{sen } \omega_B t}{\pi t}$	$\text{rect}(\omega/2\omega_B)$
7. $\text{sgn } t$	$\frac{2}{j\omega}$
8. $\exp[j\omega_0 t]$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp[jn\omega_0 t]$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(\omega - n\omega_0)$
10. $\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
11. $\text{sen } \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
12. $(\cos \omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
13. $(\text{sen } \omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
14. $\cos \omega_0 t \text{ rect}(t/\tau)$	$\tau \text{sinc} \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2\pi}$
15. $\exp[-at]u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
16. $t \exp[-at]u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\left(\frac{1}{a + j\omega}\right)^2$
17. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp[-at]u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$
18. $\exp[-a t], \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
19. $ t \exp[-a t], \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{4aj\omega}{a^2 + \omega^2}$
20. $\frac{1}{a^2 + t^2}, \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{\pi}{a} \exp[-a \omega]$

Tabla 4.1. Algunas parejas seleccionadas de transformadas de Fourier (*continuación*)

$x(t)$	$x(\omega)$
21. $\frac{t}{a^2 + t^2}, \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{-j\pi\omega \exp[-a \omega]}{2a}$
22. $\exp[-at^2], \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4a}\right]$
23. $\Delta(t/\tau)$	$\tau \text{sinc}^2 \frac{\omega\tau}{2\pi}$
24. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$

4.3.1. Linealidad

Si

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$$

entonces

$$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega) \quad (4.3.1)$$

siendo a y b constantes arbitrarias. Esta propiedad es consecuencia directa de la linealidad de la operación de integración. La propiedad de linealidad se puede extender fácilmente a la combinación lineal de un número arbitrario de componentes y simplemente quiere decir que la transformada de Fourier de una combinación lineal de un número arbitrario de señales es la misma combinación lineal de las transformadas de Fourier de cada una de las señales.

Ejemplo 4.3.1

Supongamos que deseamos calcular la transformada de Fourier de la señal $\cos \omega_0 t$. Esta señal se puede expresar como la suma de dos exponenciales complejas:

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [\exp[j\omega_0 t] + \exp[-j\omega_0 t]]$$

Aplicando la Ecuación (4.2.14) y la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Análogamente, la transformada de Fourier de $\sin \omega_0 t$ es

$$\mathcal{F}\{\sin \omega_0 t\} = \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

4.3.2. Simetría

Sea $x(t)$ una señal real. Se cumple entonces que

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \quad (4.3.2)$$

donde * indica el complejo conjugado. Esta propiedad, denominada de simetría conjugada, se puede demostrar tomando el conjugado de los dos miembros de la Ecuación (4.2.6) y utilizando el hecho de que $x(t)$ es real.

Si expresamos $X(\omega)$ en forma polar tenemos

$$X(\omega) = |X(\omega)| \exp[j\phi(\omega)] \quad (4.3.3)$$

Tomando el complejo conjugado en los dos miembros de la Ecuación (4.3.3) resulta

$$X^*(\omega) = |X(\omega)| \exp[-j\phi(\omega)]$$

Sustituyendo ω por $-\omega$ en la Ecuación (4.3.3) obtenemos

$$X(-\omega) = |X(-\omega)| \exp[j\phi(-\omega)]$$

Aplicando la Ecuación (4.3.2) vemos que los lados izquierdos de las dos Ecuaciones son iguales. Se sigue por tanto que

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \quad (4.3.4)$$

$$\phi(\omega) = -\phi(-\omega) \quad (4.3.5)$$

Es decir, la amplitud del espectro es una función par de la frecuencia, y la fase del espectro, una función impar de la frecuencia.

Ejemplo 4.3.2

Aplicando las Ecuaciones (4.3.4) y (4.3.5) a la fórmula de inversión presentada en la Ecuación (4.2.5) expresada mediante exponenciales complejas, se puede obtener una expresión en función de señales trigonométricas reales. Concretamente, si $x(t)$ es real

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp[j\omega t] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 X(\omega) \exp[j\omega t] d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \exp[j\omega t] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)| (\exp[j(\omega t + \phi(\omega))] + \exp[-j(\omega t + \phi(\omega))]) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2|X(\omega)| \cos[\omega t + \phi(\omega)] d\omega \end{aligned}$$

Las Ecuaciones (4.3.4) y (4.3.5) aseguran que las exponenciales complejas de la forma $\exp[j\omega t]$ se combinan adecuadamente con las de la forma $\exp[-j\omega t]$ para producir sinusoides reales de frecuencia ω . Estas sinusoides son las que se utilizan en la expansión de las señales reales. Por lo tanto, una señal real $x(t)$ se puede escribir en función de las amplitudes y fases de las sinusoides reales que la constituyen.

Ejemplo 4.3.3 Consideremos una señal $x(t)$ real y par. Su transformada $X(\omega)$ es

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j\omega t] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \end{aligned}$$

Como $x(t) \cos \omega t$ es una función par de t y $x(t) \sin \omega t$ es una función impar de t tenemos

$$X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos \omega t dt$$

Que es una función real y par de ω . Por lo tanto, la transformada de Fourier de una señal real y par en el dominio del tiempo es una señal real y par en el dominio de la frecuencia.

4.3.3. Desplazamiento temporal

Si

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

entonces

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega) \exp[-j\omega t_0] \quad (4.3.6a)$$

Análogamente

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \quad (4.3.6b)$$

Las demostraciones de estas propiedades se pueden realizar partiendo de la Ecuación (4.2.6) y haciendo una sustitución adecuada de variables. Utilizando la forma polar de la Ecuación (4.3.3), la Ecuación (4.3.6a) queda

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = |X(\omega)| \exp[j(\phi(\omega) - \omega t_0)]$$

Esta última ecuación indica que un desplazamiento en el tiempo no altera la amplitud del espectro de la señal. Su único efecto es que introduce un desplazamiento de fase en la transformada que es lineal con la frecuencia ω . Este resultado es razonable ya que hemos visto que al adelantar o retrasar una sinusoides, lo que hacemos es ajustar su fase. Además, el contenido de energía de la señal no depende de su posición en el tiempo.

4.3.4. Escalado temporal

Si

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

entonces

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (4.3.7)$$

donde α es una constante real. La demostración se desprende directamente de la definición de transformada de Fourier mediante la sustitución apropiada de variables. Además del factor en amplitud $1/|\alpha|$, el escalado lineal en el dominio del tiempo por un factor α produce un escalado lineal en el dominio de la frecuencia por un factor $1/\alpha$. Este resultado se puede interpretar físicamente. Consideremos una señal $x(t)$ y su transformada de Fourier $X(\omega)$ como muestra en la Figura 4.3.1. Si $|\alpha| < 1$, $x(\alpha t)$ está expandida en el tiempo y varía más lentamente (es más suave) que la señal original. Estas variaciones más lentas atenúan las componentes de alta frecuencia y se manifiestan como componentes sinusoidales de baja frecuencia más apreciables. Es decir, la expansión en el dominio del tiempo implica una compresión en el dominio de la frecuencia y viceversa. Si $|\alpha| > 1$, $x(\alpha t)$ está comprimida en el dominio del tiempo y varía más rápidamente que $x(t)$. Estas variaciones más rápidas en el dominio del tiempo se manifiestan por la presencia de componentes de frecuencia más alta.

La noción de expansión en el dominio del tiempo y compresión en el dominio de la frecuencia ha encontrado aplicaciones en áreas como la transmisión de datos desde las sondas espaciales a las estaciones receptoras en La Tierra. Para reducir la cantidad de rui-

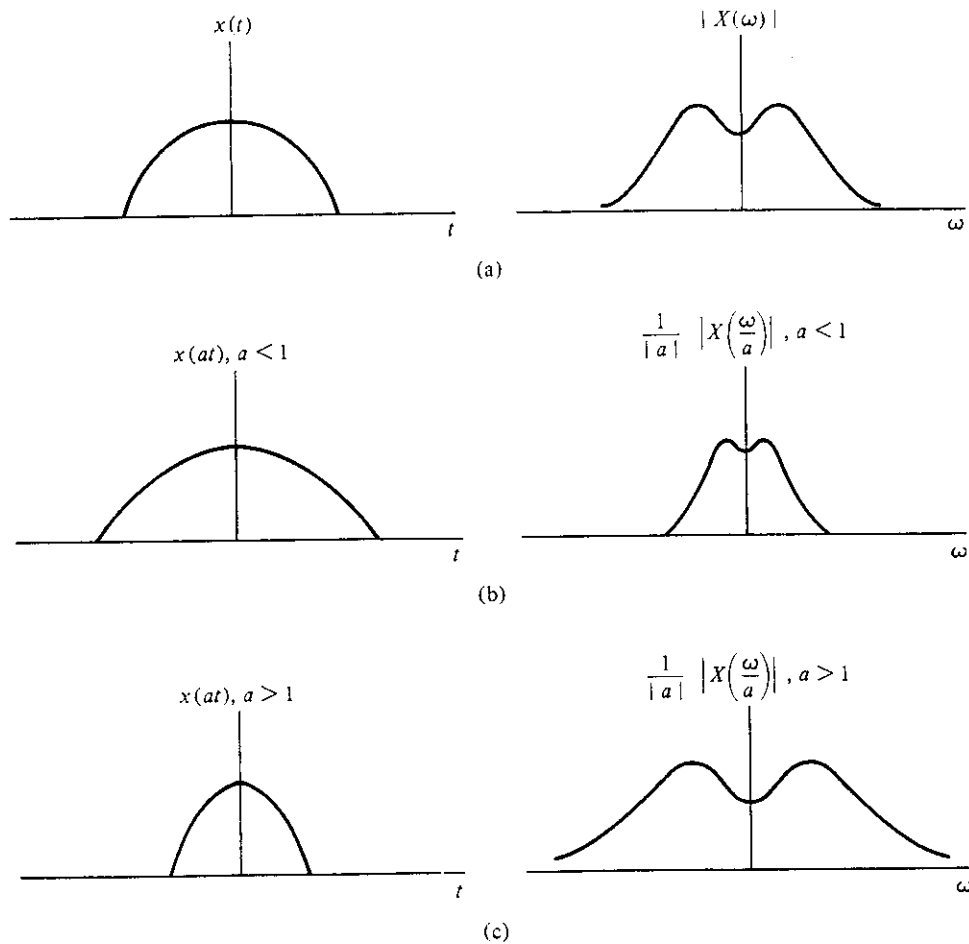


Figura 4.3.1. Ejemplos de la propiedad de escalado temporal: (a) La señal original y la amplitud de su espectro, (b) la señal expandida en el dominio del tiempo y la amplitud de su espectro y (c) la señal comprimida en el dominio del tiempo y la amplitud de su espectro.

do que se superpone a la señal deseada, es necesario mantener el ancho de banda del receptor tan pequeño como sea posible. Una forma de conseguirlo es reduciendo el ancho de banda de la señal. Para ello se almacenan los datos recogidos por la sonda y se reproducen posteriormente a una velocidad más baja. Como el factor de escala en el dominio del tiempo es conocido, la señal se puede reproducir adecuadamente en el receptor.

Ejemplo 4.3.4 Supongamos que deseamos determinar la transformada de Fourier del pulso $x(t) = \alpha \text{rect}(\alpha t/\tau)$ con $\alpha > 0$. La transformada de Fourier de $\text{rect}(t/\tau)$ se calculó en el Ejemplo 4.2.1,

$$\mathcal{F}\{\text{rect}(t/\tau)\} = \tau \text{sinc} \frac{\omega\tau}{2\pi}$$

Aplicando la Ecuación (4.3.7), la transformada de Fourier de $\alpha \text{rect}(\alpha t/\tau)$ es

$$\mathcal{F}\{\alpha \text{rect}(\alpha t/\tau)\} = \tau \text{sinc} \frac{\omega\tau}{2\alpha\pi}$$

Nótese que al aumentar el valor del parámetro α , el pulso rectangular se hace más estrecho y alto hasta convertirse en un impulso cuando $\alpha \rightarrow \infty$. De acuerdo con esto, el lóbulo principal de la transformada de Fourier se va haciendo más ancho, y en el límite $X(\omega)$ se convierte en una constante para todo ω . Cuando α tiende a cero, la señal rectangular tiende a valer 1 para todo t , y la transformada tiende a una señal δ (véase Ejemplo 4.2.7).

Esta relación inversa entre el tiempo y la frecuencia aparece en una amplia variedad de aplicaciones en ciencia e ingeniería. En la Sección 4.5 hablaremos de una aplicación de esta relación: el principio de incertidumbre.

4.3.5. Diferenciación

Si

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

entonces

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega) \quad (4.3.8)$$

Esta propiedad se puede demostrar derivando los dos miembros de la Ecuación (4.2.5) con respecto a t , y se puede extender de la siguiente forma

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega) \quad (4.3.9)$$

Debemos tener cuidado al aplicar la propiedad de diferenciación. En primer lugar, esta propiedad no asegura la existencia de $\mathcal{F}\{dx(t)/dt\}$. No obstante, si existe $\mathcal{F}$, su expresión es $j\omega X(\omega)$. En segundo lugar, esto no quiere decir siempre que $X(\omega) = \mathcal{F}\{dx(t)/dt\}/j\omega$.

Como la diferenciación en el dominio del tiempo equivale a multiplicar por $j\omega$ en el dominio de la frecuencia, podría parecer que la integración en el dominio del tiempo equivaldrá a una división por $j\omega$ en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, esto

sólo es cierto para cierta clase de señales. Para demostrarlo, consideremos la señal $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$. Si $Y(\omega)$ es su transformada, teniendo en cuenta que $dy(t)/dt = x(t)$ y aplicando la Ecuación (4.3.8) concluimos que $j\omega Y(\omega) = X(\omega)$. Para que exista $Y(\omega)$, $y(t)$ debe cumplir las condiciones indicadas en la Sección 4.2.2. Esto es equivalente a que $y(\infty) = 0$, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau = X(0) = 0$. En este caso,

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) \quad (4.3.10)$$

Esta ecuación implica que la integración en el dominio del tiempo atenúa (desenfatisa) la amplitud de las componentes de alta frecuencia de la señal. Por tanto, la señal integrada será más suave que la señal original. Por esto la operación de integración se denomina a veces operación de suavizado.

Si $X(0) \neq 0$, la señal $x(t)$ tiene componente continua, con lo que de acuerdo con la Ecuación (4.2.13), su transformada tendrá un impulso. En este caso, como demostraremos posteriormente (véase Ejemplo 4.3.10),

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \quad (4.3.11)$$

Ejemplo 4.3.5

Consideremos la función escalón unidad. Como vimos en la Sección 1.6, esta función se puede escribir así:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} + \left[u(t) - \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t \end{aligned}$$

La transformada del primer término es $\pi\delta(\omega)$. Aunque la función no posee derivada en sentido regular, en la Sección 1.6 definimos las derivadas de señales discontinuas mediante la función delta. En consecuencia

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t \right\} = \delta(t)$$

Como la función $\operatorname{sgn} t$ no tiene componente continua (ya que se trata de una función impar), aplicando la Ecuación (4.3.10) obtenemos

$$j\omega \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t \right\} = 1$$

o

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t \right\} = \frac{1}{j\omega} \quad (4.3.12)$$

Por la linealidad de la transformada de Fourier resulta

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (4.3.13)$$

Es decir, $|X(\omega)|^2$ no sólo nos permite calcular la energía total de $x(t)$ utilizando la relación de Parseval, sino que nos permite calcular también la energía en cualquier banda de frecuencia dada. Para señales reales, $|X(\omega)|^2$ es una función par, y la Ecuación (4.3.14) se puede reducir a

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.3.16)$$

Las señales periódicas, como se dijo en el Capítulo 1, tienen energía infinita pero potencia media finita. La densidad espectral de potencia es una función que describe la distribución de la potencia media de una señal en función de la frecuencia. A continuación desarrollaremos una expresión para obtener la densidad espectral de potencia de señales de potencia media finita, y en la Sección 4.3.9 daremos un ejemplo para ilustrar cómo se calcula la densidad espectral de potencia de señales periódicas. Sea $x(t)$ una señal de potencia media finita. Definamos $x_\tau(t)$ como

$$\begin{aligned} x_\tau(t) &= \begin{cases} x(t) & -\tau < t < \tau \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \\ &= x(t) \text{rect}(t/2\tau) \end{aligned}$$

Supondremos también que

$$x_\tau(t) \leftrightarrow X_\tau(\omega)$$

La potencia media de la señal $x(t)$ es

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt \right] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} |x_\tau(t)|^2 dt \right] \quad (4.3.17)$$

en donde la última igualdad se desprende de la definición de $x_\tau(t)$. Utilizando la relación de Parseval, podemos escribir la Ecuación (4.3.17) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} |X_\tau(\omega)|^2 d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{|X_\tau(\omega)|^2}{2\tau} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

donde

$$S(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{|X_\tau(\omega)|^2}{2\tau} \right] \quad (4.3.19)$$

$S(\omega)$ se denomina densidad espectral de potencia de la señal $x(t)$ y representa la distribución o la densidad de la potencia de la señal en función de la frecuencia ω . Análogamente a la densidad espectral de energía, la densidad espectral de potencia depende sólo del módulo del espectro y no de la fase.

Ejemplo 4.3.6 Consideremos la señal exponencial unilateral

$$x(t) = \exp[-t]u(t)$$

Aplicando la Ecuación (4.2.9):

$$|X(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

La energía total de esta señal es de 1/2 y se puede calcular utilizando la Ecuación (1.4.2) o la Ecuación (4.3.14). La energía en la banda de frecuencia $-4 < \omega < 4$ es

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{\pi} \int_0^4 \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \omega \Big|_0^4 \simeq 0,422 \end{aligned}$$

Es decir, aproximadamente el 84 % de la energía total de la señal está contenido en la banda de frecuencia $-4 < \omega < 4$. Es importante notar que este dato no se puede obtener simplemente de la observación de $x(t)$.

4.3.7. Convolución

La convolución desempeña un papel importante en el estudio de los sistemas LTI y sus aplicaciones. La propiedad se expresa de la siguiente forma: si

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

y

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

entonces

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow X(\omega)H(\omega) \quad (4.3.20)$$

La demostración se basa en la definición de convolución. Concretamente:

$$\mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \right] \exp[-j\omega t] dt$$

Intercambiando el orden de integración y teniendo en cuenta que $x(\tau)$ no depende de t , tenemos

$$\mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \exp[j\omega t] dt \right] d\tau$$

Recordando la propiedad de desplazamiento, vemos que el término entre corchetes es simplemente $H(\omega) \exp[-j\omega\tau]$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp[-j\omega\tau] H(\omega) d\tau \\ &= H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp[-j\omega\tau] d\tau \\ &= H(\omega)X(\omega) \end{aligned}$$

Vemos, por tanto, que la convolución en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio de la frecuencia. La ventaja es que en muchos casos esta última operación es más sencilla de interpretar y puede ser realizada por simple inspección. La Figura 4.3.2 muestra el uso de la propiedad de convolución en sistemas LTI. La amplitud y fase del espectro de la salida $y(t)$ se relacionan con los de la entrada $x(t)$ y los de la respuesta al impulso $h(t)$ de la siguiente forma:

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| |H(\omega)|$$

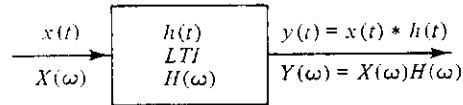
$$\angle Y(\omega) = \angle X(\omega) + \angle H(\omega)$$


Figura 4.3.2. La propiedad de convolución de la respuesta de sistemas LTI.

Por lo tanto, la amplitud espectral de la entrada resulta modificada por $|H(\omega)|$ para producir la amplitud espectral de la señal de salida, y la fase de la entrada resulta modificado por $\angle H(\omega)$ para producir la fase de la salida.

$H(\omega)$, la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema se denomina habitualmente respuesta en frecuencia del sistema.

Como hemos visto en la Sección 4.2.2, para que exista $H(\omega)$, $h(t)$ debe satisfacer dos condiciones. La primera condición es que la respuesta al impulso sea absolutamente integrable. Esto, a su vez, implica que el sistema LTI tiene que ser estable. Suponiendo que $h(t)$ es una función sin comportamientos anómalos, como ocurre esencialmente con todas las señales de importancia práctica, llegamos a la conclusión de que la respuesta en frecuencia de los sistemas LTI estables existe en la mayoría de los casos de interés. Sin embargo, si el sistema LTI es inestable, es decir, si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$$

entonces la respuesta del sistema a las exponenciales complejas puede ser infinita, y la transformada de Fourier puede no existir. El análisis de Fourier se utiliza para estudiar sistemas LTI con respuesta al impulso que tenga transformada de Fourier. Para estudiar sistemas inestables con respuestas en frecuencia no acotadas existen otras técnicas de transformadas más generales. En el Capítulo 5 presentaremos la transformada de Laplace que es una generalización de la transformada de Fourier en tiempo continuo.

Ejemplo 4.3.7

En este ejemplo demostramos cómo utilizar la propiedad de convolución de la transformada de Fourier. Consideremos un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = \exp[-at]u(t)$$

cuya entrada es la función escalón unidad $u(t)$. La transformada de Fourier de la salida es

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\} \mathcal{F}\{\exp[-at]u(t)\}$$

$$= \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \left(\frac{1}{a + j\omega} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{a} \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega(a + j\omega)} \\
&= \frac{1}{a} \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] - \frac{1}{a} \frac{1}{a + j\omega}
\end{aligned}$$

Tomando la transformada inversa de Fourier de ambos miembros obtenemos

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{a} u(t) - \frac{1}{a} \exp[-at] u(t) \\
&= \frac{1}{a} [1 - \exp[-at]] u(t)
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.8

Se puede obtener la transformada de Fourier de la señal triangular $\Delta(t/\tau)$ si tenemos en cuenta que esta señal es la convolución del pulso rectangular $(1/\sqrt{\tau}) \text{rect}(t/\tau)$ consigo mismo. Es decir,

$$\Delta(t/\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \text{rect}(t/\tau) * \frac{1}{\sqrt{\tau}} \text{rect}(t/\tau)$$

Utilizando el ejemplo de la Ecuación (4.3.20) obtenemos que

$$\mathcal{F}\{\Delta(t/\tau)\} = \left(\mathcal{F}\left\{ \frac{1}{\sqrt{\tau}} \text{rect}(t/\tau) \right\} \right)^2 = \tau \left(\text{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \right)^2$$

Ejemplo 4.3.9

Un sistema LTI tiene como respuesta al impulso

$$h(t) = \exp[-at] u(t)$$

y como salida

$$y(t) = [\exp[-bt] - \exp[-ct]] u(t)$$

Utilizando la propiedad de convolución, encontramos que la transformada de la entrada es

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} \\
&= \frac{(c - b)(j\omega + a)}{(j\omega + b)(j\omega + c)} \\
&= \frac{D}{j\omega + b} + \frac{E}{j\omega + c}
\end{aligned}$$

donde

$$D = a - b \quad \text{y} \quad E = c - a$$

Por lo tanto,

$$x(t) = [(a - b) \exp[-bt] + (c - a) \exp[-ct]] u(t)$$

Ejemplo 4.3.10 En este ejemplo utilizaremos la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

y la transformada de $u(t)$ para demostrar la propiedad de integración que se indica en la Ecuación (4.3.11). Partiendo de la Ecuación (4.3.13) y utilizando la propiedad de convolución tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau\right\} &= \mathcal{F}\{x(t) * u(t)\} = X(\omega)\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \\ &= \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega} \end{aligned}$$

La última igualdad se desprende de la propiedad de muestreo de la función delta.

Utilizando la propiedad de convolución para representar el espectro de salida de un sistema LTI surge otra importante relación:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Tenemos entonces que

$$|Y(\omega)|^2 = |X(\omega)H(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \quad (4.3.21)$$

Esta ecuación indica que la densidad espectral de energía de la respuesta de un sistema LTI es el producto de la densidad espectral de energía de la señal de entrada por el módulo al cuadrado de la función de transferencia del sistema. La característica de fase del sistema no afecta a la densidad espectral de energía de la salida a pesar de que, en general, $H(\omega)$ es una función compleja.

4.3.8. Dualidad

A veces tenemos que encontrar la transformada de Fourier de una señal que es similar a alguna de las funciones de la frecuencia en la tabla de las transformadas de Fourier. Podemos encontrar la transformada deseada utilizando la tabla en sentido inverso. Para ver cómo, escribiremos la fórmula de inversión de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp[+j\omega t] d\omega = 2\pi x(t)$$

Nótese que hay una simetría entre esta ecuación y la Ecuación (4.2.6). Las dos ecuaciones son idénticas excepto por un cambio de signo en la exponencial, un factor de 2π y un intercambio de las variables. Este tipo de simetría nos lleva a la propiedad de dualidad de la transformada de Fourier. Esta propiedad dice que si $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$, entonces

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \quad (4.3.22)$$

Demostraremos la Ecuación (4.3.22) sustituyendo t por $-t$ en la Ecuación (4.2.5), con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} 2\pi x(-t) &= \int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp[-j\omega t] d\omega \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} X(\tau) \exp[-j\tau t] d\tau \end{aligned}$$

ya que ω es simplemente la variable de integración. Si ahora sustituimos t por ω y τ por t obtenemos la Ecuación (4.3.22).

Ejemplo 4.3.11 Consideremos la señal

$$x(t) = \text{Sa} \frac{\omega_B t}{2} = \text{sinc} \frac{\omega_B t}{2\pi}$$

Utilizando la Ecuación (4.2.6),

$$\mathcal{F} \left\{ \text{Sa} \frac{\omega_B t}{2} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa} \frac{\omega_B t}{2} \exp[-j\omega t] dt$$

Esta integral es muy difícil de realizar directamente. Sin embargo, vimos en el Ejemplo 4.2.1 que

$$\text{rect}(t/\tau) \leftrightarrow \tau \text{Sa} \frac{\omega\tau}{2}$$

Entonces de acuerdo con la Ecuación (4.3.22),

$$\mathcal{F} \left\{ \text{Sa} \frac{\omega_B t}{2} \right\} = \frac{2\pi}{\omega_B} \text{rect}(-\omega/\omega_B) = \frac{2\pi}{\omega_B} \text{rect}(\omega/\omega_B)$$

ya que el pulso rectangular es una señal par. Nótese que la transformada $X(\omega)$ es cero fuera del intervalo $-\omega_B/2 \leq \omega \leq \omega_B/2$, pero que la señal $x(t)$ no está limitada en el tiempo. Las señales cuya transformada de Fourier se anula fuera de una determinada banda de frecuencia se denominan señales de banda limitada (señales que no tienen contenido espectral por encima de una determinada frecuencia, en este caso $\omega_B/2$). Se puede demostrar que la limitación en el tiempo y la limitación en frecuencia son fenómenos mutuamente exclusivos. Es decir, que una señal $x(t)$ limitada en el tiempo tiene una transformada de Fourier que no está limitada en frecuencia. De forma equivalente, si $X(\omega)$ está limitada en banda, la correspondiente señal temporal no estará limitada en el tiempo.

Ejemplo 4.3.12 Diferenciando n veces la Ecuación (4.2.6) con respecto a ω , obtenemos

$$(-jt)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n} \quad (4.3.23)$$

Es decir, la multiplicación de una señal temporal por t es equivalente a la diferenciación del espectro de frecuencia. Esta propiedad es dual de la de diferenciación en el dominio del tiempo.

Los dos ejemplos anteriores demuestran que, además de sus aplicaciones para reducir la complejidad de los cálculos necesarios para el cómputo de algunas transformadas de Fourier, la dualidad implica también que todas las propiedades de la transformada de Fourier poseen su propiedad dual.

4.3.9. Modulación

Si

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$m(t) \leftrightarrow M(\omega)$$

entonces

$$x(t)m(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * M(\omega)] \quad (4.3.24)$$

La convolución en el dominio de la frecuencia se realiza exactamente igual que en el dominio del tiempo. Es decir,

$$X(\omega) * H(\omega) = \int_{\sigma=-\infty}^{\infty} X(\sigma)H(\omega - \sigma) d\sigma = \int_{\sigma=-\infty}^{\infty} H(\sigma)X(\omega - \sigma) d\sigma$$

Esta propiedad es el resultado directo de la combinación de dos propiedades, la propiedad de dualidad y la propiedad de convolución, y postula que la multiplicación en el dominio del tiempo es equivalente a una convolución en el dominio de la frecuencia. La multiplicación de la señal $x(t)$ por la señal $m(t)$ es equivalente a alterar o modular la amplitud de $x(t)$ según las variaciones de $m(t)$. Por esta razón, la multiplicación de dos señales se denomina a veces modulación. La naturaleza simétrica de la transformada de Fourier está claramente reflejada en las Ecuaciones (4.3.20) y (4.3.24). La convolución en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicación en el dominio de la frecuencia, y la multiplicación en el dominio del tiempo es equivalente a la convolución en el dominio de la frecuencia. La importancia de esta propiedad es que el espectro de una señal como $x(t)\cos\omega_0 t$ se puede calcular de forma muy sencilla. Este tipo de señales se utiliza en muchos sistemas de comunicaciones. Como

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2} [\exp[j\omega_0 t] + \exp[-j\omega_0 t]]$$

se desprende que

$$\mathcal{F}\{x(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

Este resultado es la propiedad fundamental de modulación y es útil en el análisis espectral de las señales procedentes de multiplicadores y moduladores.

Ejemplo 4.3.13 Consideremos la señal

$$x_s(t) = x(t)p(t)$$

donde $p(t)$ es un tren periódico de impulsos de igual peso como se muestra en la Figura 4.3.3. Analíticamente, $p(t)$ se puede escribir como

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

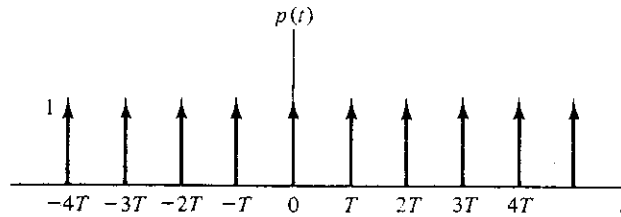


Figura 4.3.3. El tren periódico de impulsos utilizado en el Ejemplo 4.3.13.

Utilizando la propiedad de muestreo de la función delta obtenemos

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

Es decir, $x_s(t)$ es un tren de impulsos separados T segundos entre sí, y con pesos iguales a los valores de las muestras de $x(t)$. Recordemos (Ejemplo 4.2.10) que la transformada de Fourier de un tren periódico de impulsos es otro tren periódico de impulsos. Concretamente,

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

En consecuencia, aplicando la propiedad de modulación,

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * P(\omega)] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) \end{aligned}$$

Es decir, $X_s(\omega)$ está formado por réplicas de $X(\omega)$ repetidas periódicamente.

Ejemplo 4.3.14 Consideremos el sistema que se muestra en la Figura 4.3.4, donde

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\text{sen}(\omega_B t/2)}{\pi t} \\ p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n\pi}{\omega_B}\right) \\ h(t) &= \frac{\text{sen}(3\omega_B t/2)}{\pi t} \end{aligned}$$

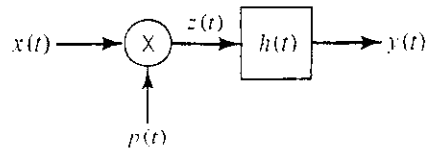


Figura 4.3.4. El sistema del Ejemplo 4.3.14.

La transformada de Fourier de $x(t)$ es un pulso rectangular de anchura ω_B , y la transformada de Fourier del producto $x(t)p(t)$ consiste en réplicas periódicamente repetidas de $X(\omega)$, como muestra la Figura 4.3.5. Análogamente, la transformada de Fourier de $h(t)$ es un pulso rectangular de anchura $3\omega_B$. Aplicando la propiedad de convolución, la transformada de la salida del sistema es

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X_s(\omega)H(\omega) \\ &= X(\omega) \end{aligned}$$

o

$$y(t) = x(t)$$

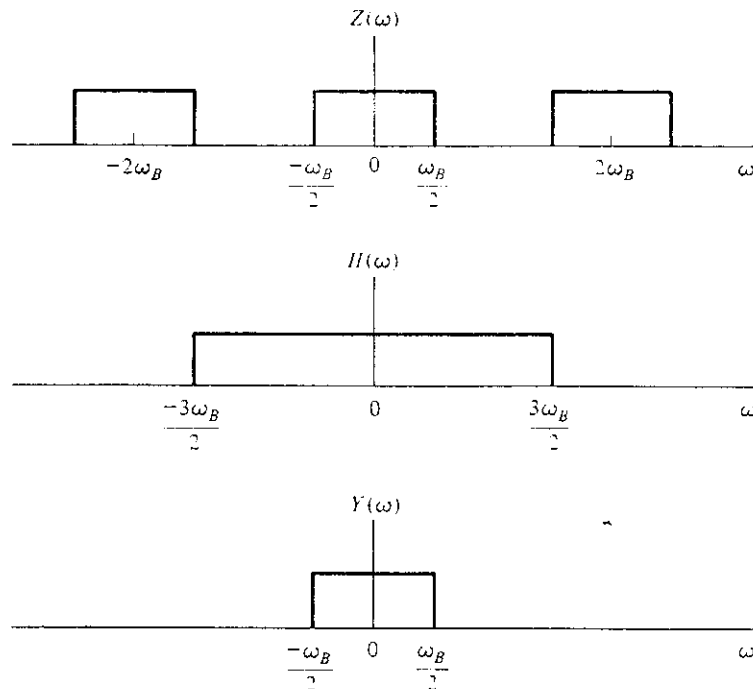


Figura 4.3.5. Espectros asociados con las señales del ejemplo 4.3.14.

Nótese que como el sistema $h(t)$ bloquea (elimina por filtrado) todas las componentes indeseadas de $x_s(t)$, obteniendo una versión escalada de $x(t)$, se dice que este sistema es un filtro. Los filtros son componentes muy importantes de cualquier sistema de comunicaciones o de control. En el Capítulo 10 estudiaremos el diseño de filtros analógicos y digitales.

Ejemplo 4.3.15 En este ejemplo, utilizaremos la propiedad de modulación para demostrar que el espectro de potencia de una señal periódica $x(t)$ de período T es

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0)$$

siendo c_n los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$ y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Empezaremos por definir la señal truncada $x_\tau(t)$ como el producto $x(t) \text{rect}(t/2\tau)$. Utilizando la propiedad de modulación, encontramos que

$$\begin{aligned} X_\tau(\omega) &= \frac{1}{2\pi} [2\tau \text{Sa } \omega\tau * X(\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\tau \text{Sa } \mu\tau X(\omega - \mu) d\mu \end{aligned}$$

Sustituyendo $X(\omega)$ de la Ecuación (4.2.15) y formando la función $|X_\tau(\omega)|^2$ tenemos

$$\frac{|X_\tau(\omega)|^2}{2\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\tau c_n c_m^* \text{Sa}[(\omega - n\omega_0)\tau] \text{Sa}[(\omega - m\omega_0)\tau]$$

El espectro de densidad de potencia de la señal $x(t)$ se obtiene tomando el límite de la última expresión cuando $\tau \rightarrow \infty$. Ya se ha visto anteriormente que cuando $\tau \rightarrow \infty$, la transformada de la señal rectangular tiende a $\delta(\omega)$. Por tanto, las dos funciones Sa de la expresión anterior tenderán a $\delta(\omega - k\omega_0)$ con $k = m$ y n . Si observamos además que

$$\delta(\omega - n\omega_0)\delta(\omega - m\omega_0) = \begin{cases} \delta(\omega - n\omega_0), & m = n \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

podemos calcular finalmente la densidad espectral de potencia de la señal periódica:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{|X_\tau(\omega)|^2}{2\tau} \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

La tabla 4.2 muestra un resumen de las propiedades de la transformada de Fourier. En este capítulo utilizaremos repetidamente estas propiedades, por lo que deben ser adecuadamente asimiladas.

Tabla 4.2. Algunas propiedades seleccionadas de la transformada de Fourier

1. Linealidad	$\sum_{n=1}^N z_n x_n(t)$	$\sum_{n=1}^N z_n X_n(\omega)$	(4.3.1)
2. Conjugación compleja	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$	(4.2.6)
3. Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$X(\omega) \exp[-j\omega t_0]$	(4.3.6a)
4. Desplazamiento en frecuencia	$x(t) \exp[j\omega_0 t]$	$X(\omega - \omega_0)$	(4.3.6b)
5. Escalado temporal	$x(at)$	$1/ a X(\omega/a)$	(4.3.7)
6. Diferenciación	$d^n x(t)/dt^n$	$(j\omega)^n X(\omega)$	(4.3.9)
7. Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(\omega)}{j(\omega)} + \pi X(0)\delta(\omega)$	(4.3.11)
8. Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$	(4.3.14)
9. Convolución	$x(t) * h(t)$	$X(\omega)H(\omega)$	(4.3.20)
10. Dualidad	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$	(4.3.22)
11. Multiplicación por t	$(-jt)^n x(t)$	$\frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}$	(4.3.23)
12. Modulación	$x(t)m(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * M(\omega)$	(4.3.24)

4.4. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier en tiempo continuo y la transformada de Fourier en tiempo discreto que estudiaremos en el Capítulo 7, son herramientas con extensas aplicaciones en sistemas de comunicaciones, de tratamiento de señal, de control, y en muchas otras variedades de disciplinas en el campo de la física y de la ingeniería. Los importantes procesos de modulación de amplitud y de multiplexación en frecuencia son ejemplos del uso de la teoría de la transformada de Fourier en el análisis y diseño de sistemas de comunicaciones. El teorema de muestreo ha tenido un efecto muy profundo en la transmisión de información y en el tratamiento de señal, especialmente en el área digital. El diseño de filtros y de compensadores, que se utiliza en sistemas de control, no se puede realizar sin la ayuda de la transformada de Fourier. En esta sección comentaremos algunas de estas aplicaciones con mayor detalle.

4.4.1. Modulación de amplitud

El objetivo de los sistemas de comunicaciones es transmitir información de un punto a otro. Antes de enviar la información por el canal de transmisión, hay que transformar las señales en formas más útiles mediante un proceso que se conoce como modulación. Existen muchas razones para realizar este tipo de conversión, entre las que podemos destacar las siguientes:

1. Transmitir la información más eficientemente.
2. Evitar las limitaciones del hardware.
3. Reducir el ruido y las interferencias.
4. Utilizar eficientemente el espectro electromagnético.

Consideremos el multiplicador de señales que se muestra en la Figura 4.4.1. La salida es el producto de la señal que transporta la información $x(t)$ y la señal $m(t)$ que se denomina señal portadora. Este esquema se conoce como modulación de amplitud, y existen muchas variantes, dependiendo de $m(t)$. Nos centraremos sólo en el caso de $m(t) = \cos \omega_0 t$, que representa una forma de modulación de uso práctico conocida como modulación de amplitud en doble banda lateral (DSB —double-sideband). Examinaremos a continuación el espectro de salida (señal modulada) en función de los espectros de $x(t)$ y de $m(t)$.

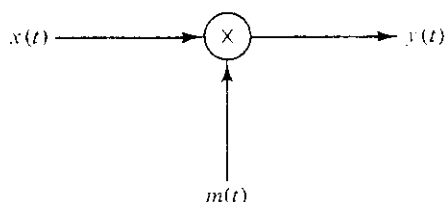


Figura 4.4.1. Multiplicador de señales.

La salida del multiplicador es

$$y(t) = x(t) \cos \omega_0 t$$

Como $y(t)$ es el producto de dos señales, se puede utilizar convolución en el dominio de la frecuencia para obtener su espectro. El resultado es

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

La Figura 4.4.2 muestra el módulo del espectro de $x(t)$ y de $y(t)$. La parte del espectro $Y(\omega)$ centrada en $+\omega_0$ es el resultado de convolucionar $X(\omega)$ con $\delta(\omega - \omega_0)$, y la parte centrada en $-\omega_0$ es el resultado de convolucionar $X(\omega)$ con $\delta(\omega + \omega_0)$. Este proceso de desplazar el espectro de la señal en la cantidad ω_0 es una operación necesaria en muchos

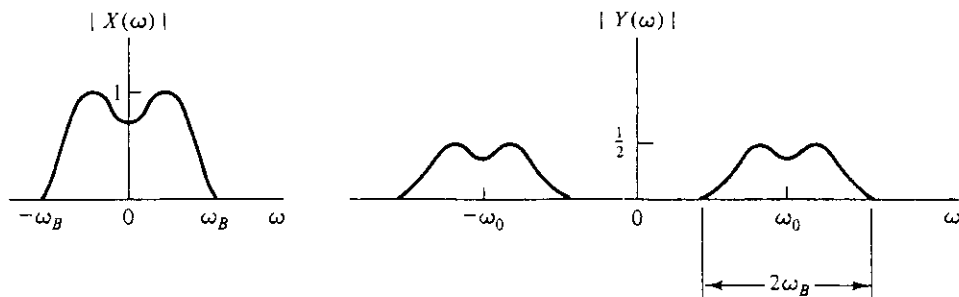


Figura 4.4.2. Amplitud del espectro de la señal de información y de la señal modulada.

sistemas de comunicaciones, ya que las frecuencias bajas (banda base) de las señales de información no se propagan fácilmente mediante ondas de radio.

El proceso de extracción de información de la señal modulada se denomina demodulación. En efecto, la demodulación devuelve el espectro del mensaje a su posición original, en las bajas frecuencias. La demodulación coherente es una de las diversas técnicas existentes para realizar la demodulación de amplitud. El demodulador coherente utiliza otro multiplicador de señales cuyas entradas son la señal modulada y $\cos \omega_0 t$. La salida del multiplicador es

$$z(t) = y(t) \cos \omega_0 t$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{1}{2} [Y(\omega - \omega_0) + Y(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{4} X(\omega - 2\omega_0) + \frac{1}{4} X(\omega + 2\omega_0) \end{aligned}$$

El resultado se muestra en la Figura 4.4.3(a). Para extraer la señal de información original $x(t)$, la señal $z(t)$ se pasa por un sistema cuya respuesta en frecuencia $H(\omega)$ se muestra

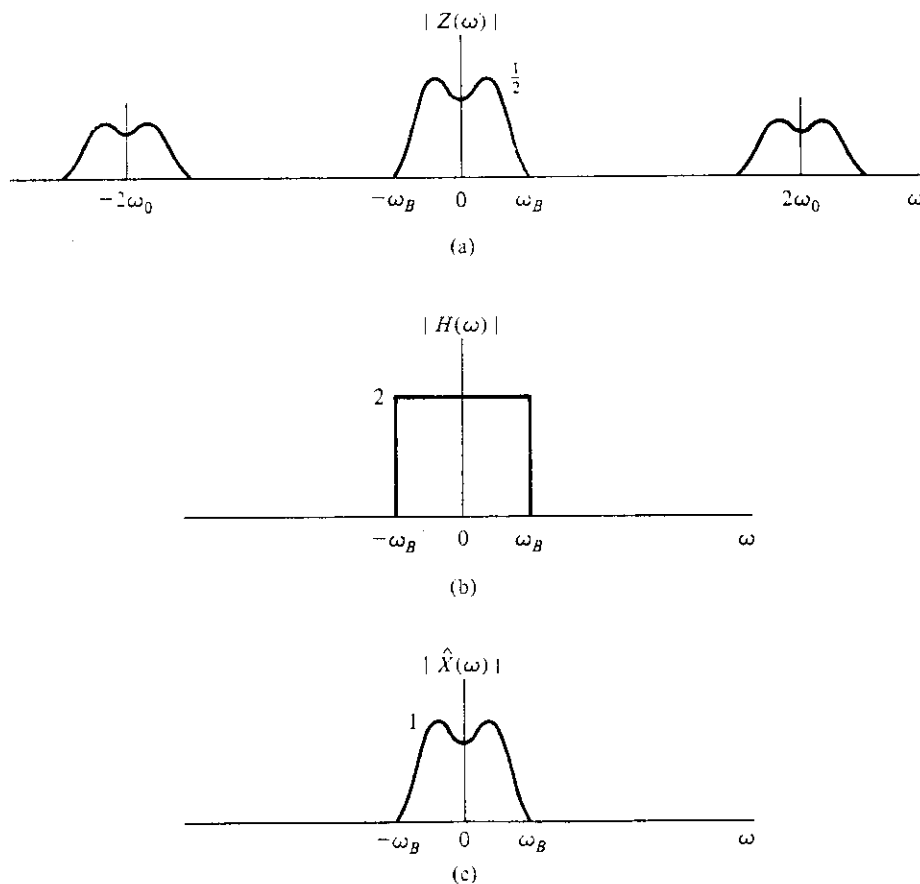


Figura 4.4.3. Proceso de demodulación: (a) Módulo del espectro de $z(t)$; (b) respuesta en frecuencia del filtro paso bajo y (c) el espectro de la información extraída.

en la Figura 4.4.3(b). Este sistema se denomina filtro paso bajo, ya que sólo permite pasar a las componentes de baja frecuencia de la señal de entrada, y elimina aquellas frecuencias que están por encima de ω_B , la frecuencia de corte del filtro. La Figura 4.4.3(c) muestra la salida del filtro paso bajo. Nótese que si $|H(\omega)| = 1$, $|\omega| < \omega_B$ y no consideramos pérdidas de transmisión, la energía de la señal final es la cuarta parte de la energía de la señal original, ya que toda la parte de la señal demodulada que contiene energía alrededor de $\omega = 2\omega_0$ es eliminada por el receptor.

4.4.2. Multiplexación

Una técnica muy útil para transmitir simultáneamente varias señales de información consiste en asignar a cada señal una parte de la banda final de frecuencias que se vaya a utilizar. Esta técnica se conoce como múltiplex por división en frecuencia (FDM—frequency-division multiplexing), y la encontraremos casi de forma cotidiana, aunque no nos demos cuenta. En las grandes ciudades existen generalmente varias estaciones de radio y de televisión, de bomberos, de policía, de radiotaxi, de teléfonos móviles, de radioaficionados y otras muchas fuentes de ondas de radio. Todas esas fuentes se encuentran multiplexadas en el espectro radioeléctrico, de forma que cada señal tiene asignada su propia banda de frecuencia. La FDM es muy semejante a la modulación de amplitud. Consideremos tres señales de banda limitada cuyas transformadas de Fourier (en módulo) se muestran en la Figura 4.4.4 (la extensión de estas ideas a n señales es inmediata).

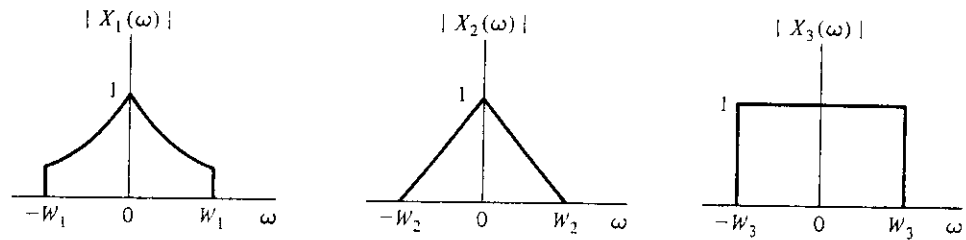


Figura 4.4.4. Módulo del espectro de las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ en el sistema FDM.

Si modulamos $x_1(t)$ con $\cos \omega_1 t$, $x_2(t)$ con $\cos \omega_2 t$, y $x_3(t)$ con $\cos \omega_3 t$ y sumamos las tres señales moduladas obtenemos

$$y(t) = x_1(t) \cos \omega_1 t + x_2(t) \cos \omega_2 t + x_3(t) \cos \omega_3 t$$

El espectro de frecuencia de $y(t)$ es

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2} [X_1(\omega - \omega_1) + X_1(\omega + \omega_1)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [X_2(\omega - \omega_2) + X_2(\omega + \omega_2)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [X_3(\omega - \omega_3) + X_3(\omega + \omega_3)] \end{aligned}$$

que es similar al de la Figura 4.4.5. Es importante asegurarse de que los espectros no se solapan, es decir que $\omega_1 + W_1 < \omega_2 - W_2$ y que $\omega_2 + W_2 < \omega_3 - W_3$. Para recuperar cada uno de los espectros hay que realizar una serie de operaciones en el receptor.

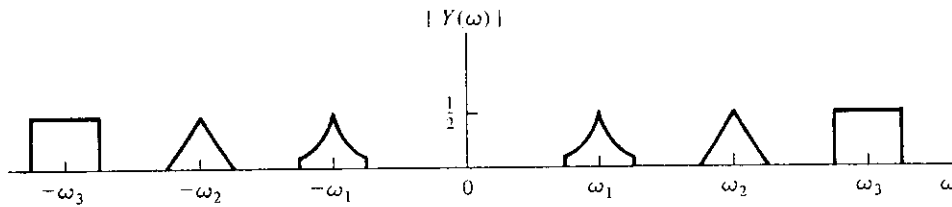


Figura 4.4.5. Módulo del espectro de $y(t)$ en el sistema FDM.

Debido a la forma que tiene $|Y(\omega)|$, para recuperar el espectro de $x_1(t)$ es necesario un sistema cuya respuesta en frecuencia sea igual a 1 para $\omega_1 - W_1 \leq \omega \leq \omega_1 + W_1$, y valga cero en el resto de las frecuencias. Este sistema se denomina filtro paso banda, ya que deja pasar solamente las frecuencias en la banda $\omega_1 - W_1 \leq \omega \leq \omega_1 + W_1$ y suprime todas las frecuencias restantes.

La salida de este filtro se procesa con un demodulador coherente. Se utiliza un procedimiento similar para extraer $x_2(t)$ y $x_3(t)$. La Figura 4.4.6 ilustra el sistema completo con las fases de modulación, multiplexación, transmisión, demultiplexación y demodulación.

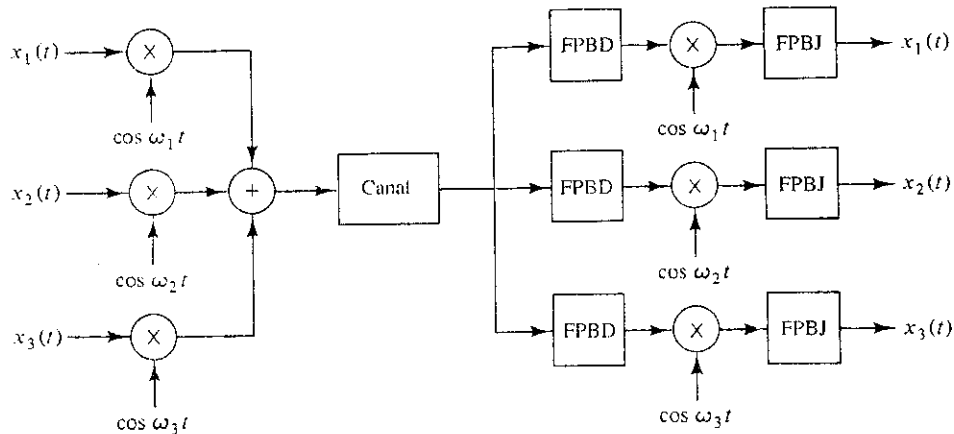


Figura 4.4.6. Múltiplex por división en frecuencia (FDM). FPBD = filtro paso banda, FPBJ = filtro paso bajo.

4.4.3. El teorema de muestreo

De todos los teoremas y técnicas relacionados con la transformada de Fourier, el que ha tenido más impacto en la transmisión y el procesamiento de la información ha sido el teorema de muestreo. Dada una señal paso bajo $x(t)$ de banda limitada, de forma que no tiene componentes de frecuencia por encima de ω_B rad/s, el teorema de muestreo dice que $x(t)$ queda completamente determinada por sus valores en instantes tomados cada T segundos, si se cumple que $T < \pi/\omega_B$. Este teorema nos permite reconstruir completamente una señal de banda limitada a partir de sus muestras tomadas con una frecuencia de $\omega_s = 2\pi/T$, suponiendo que se cumple que ω_s es mayor o igual que $2\omega_B$, es decir, dos veces la frecuencia más alta presente en la señal de banda limitada $x(t)$. La mínima frecuencia de muestreo $2\omega_B$ se denomina frecuencia de Nyquist.

El proceso de obtener un conjunto de muestras de una función del tiempo continua $x(t)$ se denomina muestreo. Se puede considerar que las muestras se obtienen pasando $x(t)$

por un dispositivo de muestreo, que puede imaginarse como un interruptor que se cierra y se abre instantáneamente en los instantes de muestreo nT . Cuando el interruptor se cierra, obtenemos la muestra $x(nT)$. En los demás instantes, la salida del dispositivo de muestreo es cero. El dispositivo de muestreo ideal es ficticio, ya que en la práctica es imposible obtener interruptores que se cierren y se abran de forma instantánea. Indicaremos por $x_s(t)$ la salida del dispositivo de muestreo.

Para obtener el teorema de muestreo, modelaremos la salida del dispositivo de muestreo de la siguiente forma

$$x_s(t) = x(t)p(t) \quad (4.4.1)$$

donde

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (4.4.2)$$

es un tren periódico de impulsos. En el Capítulo 8 daremos una justificación de este modelo, cuando consideremos con mayor detalle el muestreo de señales continuas. Como se puede observar en la ecuación anterior, la señal muestreada se puede considerar como el producto (modulación) de la señal continua $x(t)$ y el tren de impulsos $p(t)$. Por eso este modelo de la operación de muestreo se denomina modelo de modulación por impulsos. Se ilustra en la Figura 4.4.7.

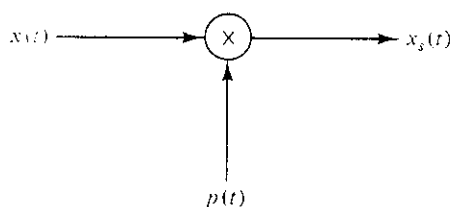


Figura 4.4.7. El proceso de muestreo ideal.

Recordando el Ejemplo 4.2.10, tenemos que

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad (4.4.3)$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma) P(\omega - \sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

La Figura 4.4.8 muestra las señales $x(t)$, $p(t)$ y $x_s(t)$, junto con sus espectros, considerando que $x(t)$ es una señal de banda limitada [es decir, que $X(\omega)$ es cero para $|\omega| > \omega_B$]. Como puede verse, $x_s(t)$, que es la versión muestreada de la señal en tiempo continuo $x(t)$,

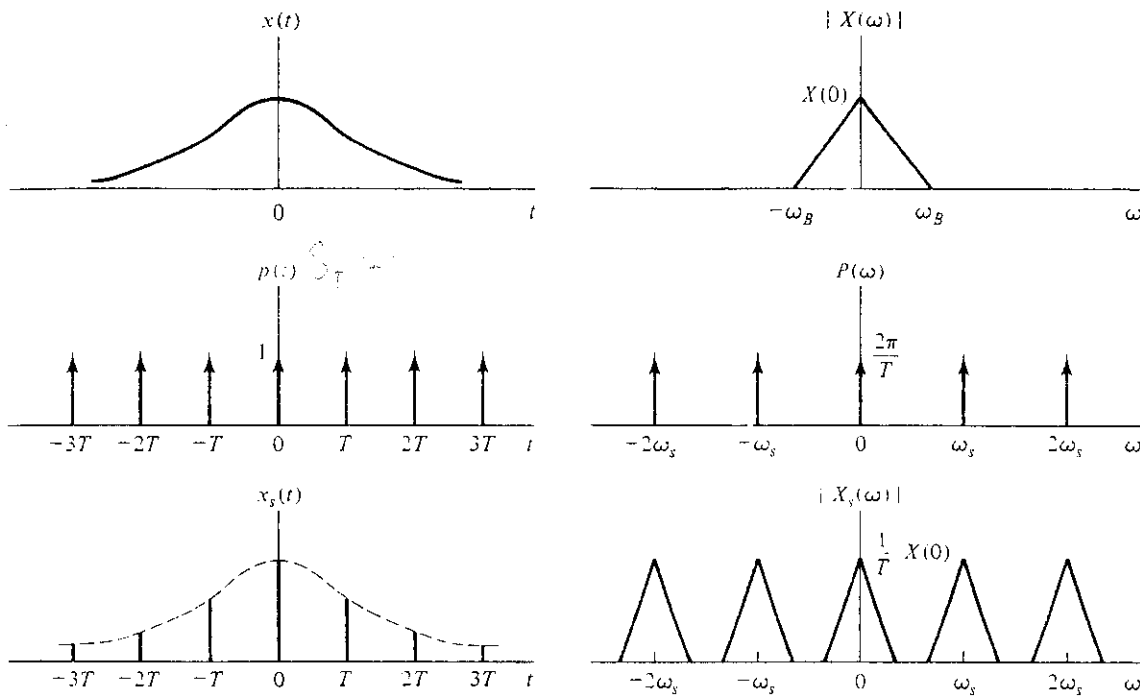


Figura 4.4.8. Señales en el dominio del tiempo y las respectivas amplitudes de sus espectros.

está formada por impulsos colocados cada T segundos, y cada impulso tiene un área que es igual que el valor de la muestra de $x(t)$ en el correspondiente instante de muestreo. El espectro de la señal muestreada $X_s(\omega)$ se obtiene como la convolución del espectro de la señal en tiempo continuo $X(\omega)$ con el espectro del tren de impulsos $P(\omega)$. Por tanto, consiste en la repetición periódica de $X(\omega)$ cada ω_s rad/s, como se muestra en la figura. En el ejemplo que se muestra, ω_s es lo suficientemente grande como para que las diferentes componentes de $X_s(\omega)$ no se solapen. Resulta claro que si pasamos la señal muestreada $x_s(t)$ por un filtro paso bajo ideal, que deje pasar solamente las frecuencias contenidas en $x(t)$, el espectro de la salida del filtro será idéntico a $X(\omega)$ excepto por el factor de escala en la amplitud de $1/T$ introducido por la operación de muestreo. Por tanto, para recuperar $x(t)$, pasaremos $x_s(t)$ por un filtro cuya respuesta en frecuencia sea

$$H(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_B \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$= T \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_B}\right) \quad (4.4.5)$$

Este filtro se denomina filtro de reconstrucción ideal.

Si la frecuencia de muestreo se reduce, las diferentes componentes del espectro de $X_s(\omega)$ se van acercando entre sí hasta que llegan a solaparse. Como indica la Figura 4.4.9(a), si $\omega_s - \omega_B > \omega_B$, las componentes no se solaparán, y la señal $x(t)$ podrá ser recuperada a partir de $x_s(t)$ como se ha indicado anteriormente. Si $\omega_s - \omega_B = \omega_B$, las componentes justamente se tocan, como se muestra en la Figura 4.4.9(b). Si $\omega_s - \omega_B < \omega_B$, las componentes se solapan, como se muestra en la Figura 4.4.9(c). En este último caso, el espectro resul-

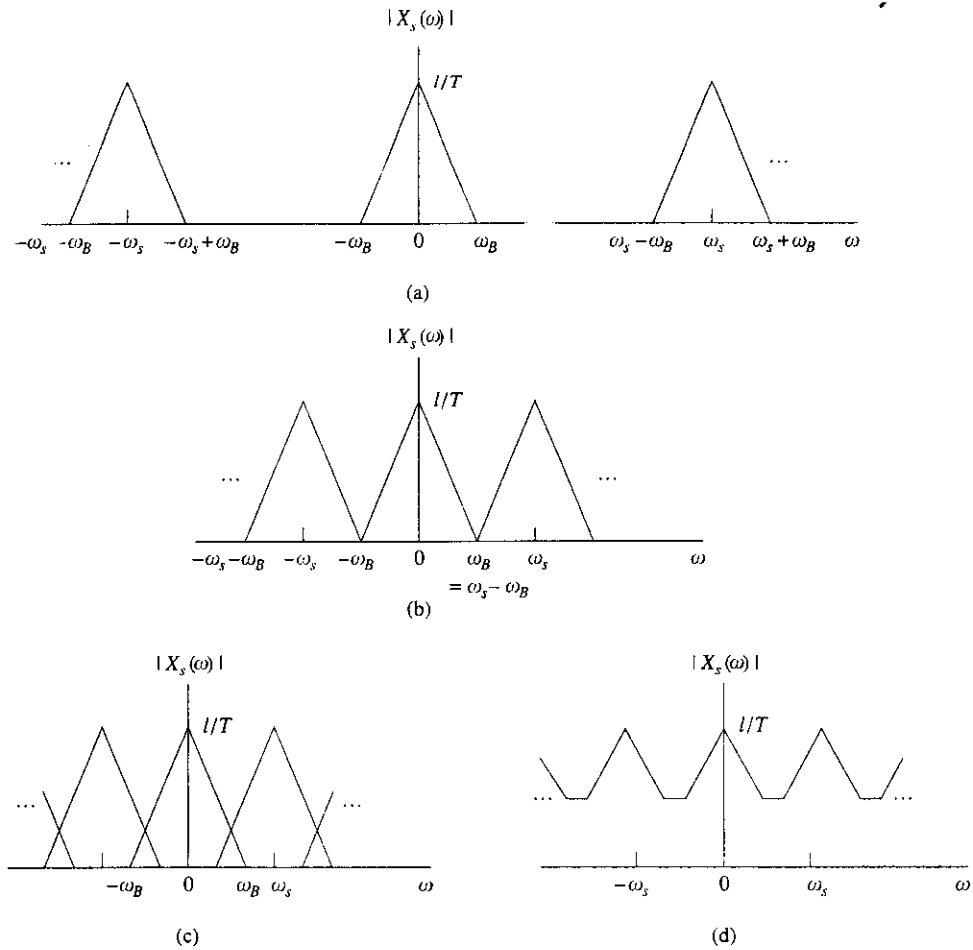


Figura 4.4.9. Efectos sobre $X_s(\omega)$ al reducir la frecuencia de muestreo.

tante de sumar las componentes solapadas no se parecerá a $X(\omega)$ [véase Figura 4.4.9(d)], y por tanto no se podrá recuperar $x(t)$ a partir de la señal muestreada. Por tanto, para recuperar $x(t)$ a partir de la señal muestreada, es claro que la frecuencia de muestreo debe cumplir

$$\omega_s - \omega_B > \omega_B$$

Y la señal $x(t)$ se puede recuperar a partir de sus muestras sólo si

$$\omega_s > 2\omega_B \quad (4.4.6)$$

Esto es el teorema de muestreo (habitualmente denominado teorema de Nyquist) al que nos referimos anteriormente. El mínimo valor permisible de ω_s se denomina frecuencia de Nyquist.

La máxima separación temporal entre muestras que se puede usar es

$$T = \frac{\pi}{\omega_B} \quad (4.4.7)$$

Si T es mayor que el valor de la Ecuación (4.4.7), las diferentes componentes de $X_s(\omega)$ se solaparán, y no podremos recuperar de forma exacta $x(t)$. Este efecto se denomina solapamiento (*aliasing*). Si $x(t)$ no es una señal de banda limitada, siempre habrá solapamiento, independientemente de la frecuencia de muestreo elegida.

Ejemplo 4.4.1

El espectro de una señal (por ejemplo, una señal de voz) es prácticamente nulo a frecuencias por encima de 5 kHz. La frecuencia de Nyquist para estas señales es

$$\begin{aligned}\omega_s &= 2\omega_B = 2(2\pi \times 5 \times 10^3) \\ &= 2\pi \times 10^4 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

El período de muestreo T es igual a $2\pi/\omega_s = 0,1$ ms.

Ejemplo 4.4.2

En lugar de muestrear la señal anterior a la frecuencia de Nyquist de 10 kHz, la muestrearemos a 8 kHz. Es decir,

$$\omega_s = 2\pi \times 8 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

El intervalo de muestreo T es igual a $2\pi/\omega_s = 0,125$ ms. Si filtramos la señal muestreada $x_s(t)$ utilizando un filtro paso bajo de frecuencia de corte 4 kHz, el espectro de salida contiene componentes de alta frecuencia de $x(t)$ superpuestas a las componentes de baja frecuencia. Es decir, tenemos solapamiento y la señal $x(t)$ no se puede recuperar.

En teoría, si una señal $x(t)$ no es de banda limitada, podemos eliminar el solapamiento filtrando previamente la señal con un filtro paso bajo antes de muestrearla. Lógicamente, tendremos que utilizar una frecuencia de muestreo de al menos el doble del ancho de banda del filtro, ω_B . Sin embargo, en la práctica, no es posible eliminar completamente el solapamiento, primero porque no es posible diseñar un filtro paso bajo que elimine completamente las componentes de frecuencia que están por encima de un cierto valor, y segundo, porque en muchas aplicaciones, no es posible filtrar paso bajo $x(t)$ sin eliminar parte de la información que transporta. En estos casos, será al menos posible reducir el efecto del solapamiento muestreando la señal con una frecuencia suficientemente alta como para que las componentes que se solapan no distorsionen seriamente la señal reconstruida. En algunos casos, la frecuencia de muestreo puede llegar a ser hasta 8 ó 10 veces el ancho de banda de la señal.

Ejemplo 4.4.3

Una señal analógica paso banda, $x_a(t)$ cuyas frecuencias están comprendidas en el intervalo $800 \leq f \leq 1.200$ Hz se aplica a la entrada del sistema que se muestra en la Figura 4.4.10(a), donde $H(\omega)$ es un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte 200 Hz. Supongamos que el espectro de $x_a(t)$ tiene forma triangular simétrica alrededor de la frecuencia central, como muestra la Figura 4.4.10(b).

La Figura 4.4.10(c) muestra $X_m(\omega)$, el espectro de la señal modulada $x_m(t)$, y la Figura 4.4.10(d) muestra $X_b(\omega)$, el espectro de $x_b(t)$, señal de salida del filtro paso bajo. Si ahora muestreamos la señal $x_b(t)$ con un período $T < 1/400$ s, como ya vimos anteriormente el espectro resultante $X_s(\omega)$ es una versión solapada de $X_b(\omega)$, y consistirá en una serie de pulsos de forma triangular centrados en las frecuencias $\omega = 2\pi k/T$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$, etc. Si uno de los pulsos está centrado en $2\pi \times 1.000$ rad/s, será posible recuperar $X_a(\omega)$ y por

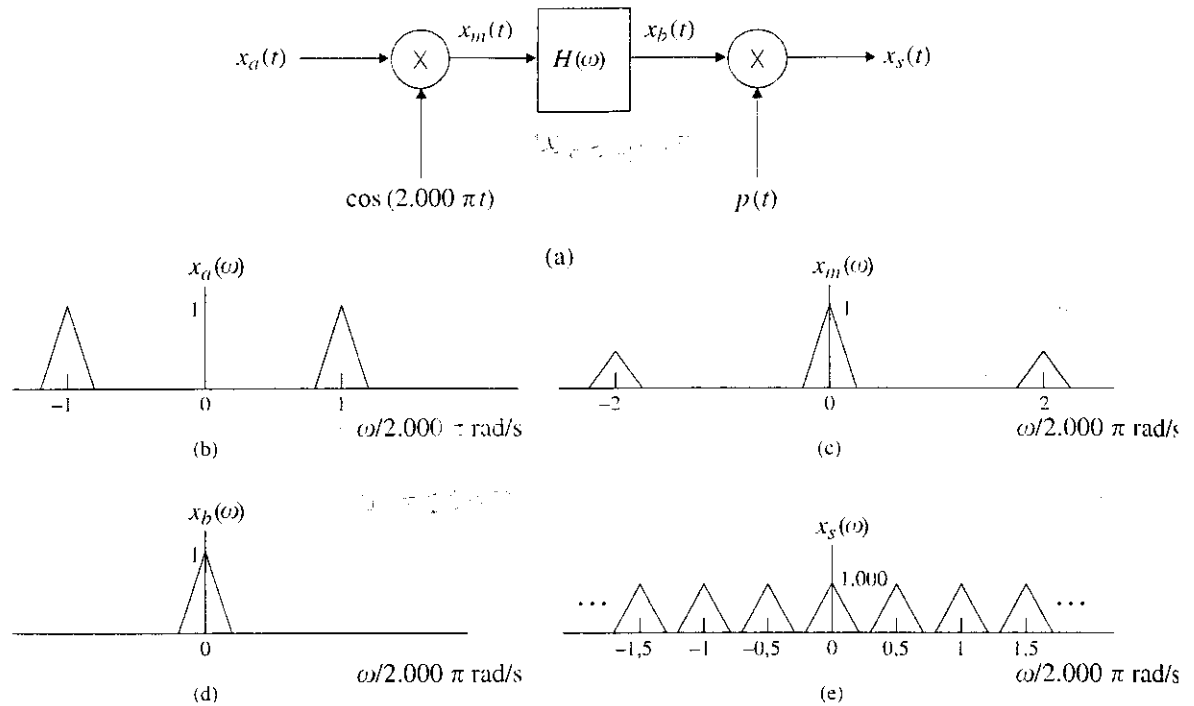


Figura 4.4.10. Los espectros de las señales del Ejemplo 4.4.3.

tanto $x_a(t)$ pasando la señal muestreada por un filtro paso banda ideal con frecuencia central de 2000π rad/s y ancho de banda 800π rad/s. La Figura 4.4.10(c) muestra el espectro de la señal muestreada para $T = 1$ ms.

En general, será posible recuperar $x_a(t)$ a partir de la señal muestreada utilizando un filtro paso banda si $2\pi k/T = \omega_s$, es decir, si $1/T$ es un submúltiplo entero de la frecuencia central en Hz.

La posibilidad de reconstruir una señal muestreada a partir de sus muestras se puede ilustrar también en el dominio del tiempo mediante el concepto de interpolación. En nuestra exposición anterior hemos visto que $x(t)$ se puede obtener pasando $x_s(t)$ a través del filtro de reconstrucción ideal indicado en la Ecuación (4.4.5). Por tanto, podremos escribir,

$$X(\omega) = H(\omega)X_s(\omega) \quad (4.4.8)$$

La respuesta el impulso correspondiente a $H(\omega)$ es

$$h(t) = T \frac{\text{sen } \omega_B t}{\pi t}$$

Tomando la transformada inversa de Fourier de ambos miembros de la Ecuación (4.4.8), obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= x_s(t) * h(t) \\ &= \left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] * T \frac{\text{sen } \omega_B t}{\pi t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T x(nT) \frac{\text{sen } \omega_B(t - nT)}{\pi(t - nT)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\omega_B}{\omega_s} x(nT) \frac{\text{sen } \omega_B(t - nT)}{\omega_B(t - nT)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\omega_B}{\omega_s} x(nT) \text{Sa}(\omega_B(t - nT)) \quad (4.4.9)
\end{aligned}$$

La Ecuación (4.4.9) se puede interpretar como una reconstrucción de $x(t)$ mediante interpolación de sus muestras $x(nT)$. Las funciones $\text{Sa}[\omega_B(t - kT)]$ se denominan funciones de interpolación o de muestreo. La interpolación utilizando funciones de muestreo, como la que se indica en la Ecuación (4.4.9) se denomina comúnmente interpolación de banda limitada.

4.4.4. Filtrado de señales

El filtrado es el proceso por el que la parte esencial o útil de una señal se separa de otras componentes extrañas o indeseadas que se denominan generalmente ruido. El término «ruido» que utilizamos aquí se refiere a cualquier parte no deseada de la señal, como en el caso de la modulación de amplitud, o a interferencias generadas por los propios dispositivos electrónicos.

La idea de realizar filtrados utilizando sistemas LTI se basa en la propiedad de convolución de la transformada de Fourier presentada en la Sección 4.3. Para sistemas LTI, la transformada de Fourier de la salida es el producto de la transformada de Fourier de la entrada por la respuesta en frecuencia del sistema. Un filtro ideal selectivo en frecuencia es aquel que deja pasar ciertas frecuencias inalteradas y elimina el resto. El intervalo de frecuencias que pasan se denomina banda de paso del filtro, y el intervalo de frecuencias que se eliminan se denomina banda eliminada. En el caso ideal, $|H(\omega)| = 1$ en la banda de paso, y $|H(\omega)| = 0$ en la banda eliminada. Los filtros selectivos en frecuencia se clasifican de acuerdo con la función que realizan. Los tipos de filtros más comunes son los siguientes:

1. Los filtros paso bajo se caracterizan por tener una banda de paso que ocupa desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \omega_c$, que se denomina frecuencia de corte del filtro [véase Figura 4.4.11(a)].
2. Los filtros paso alto se caracterizan por tener una banda de paso que ocupa desde $\omega = \omega_c$ hasta el infinito [véase Figura 4.4.11(b)].
3. Los filtros paso banda se caracterizan por tener una banda de paso que ocupa desde $\omega = \omega_1$ hasta $\omega = \omega_2$. Las restantes frecuencias se eliminan [véase Figura 4.4.11(c)].
4. Los filtros de banda eliminada eliminan las frecuencias comprendidas entre ω_1 y ω_2 y dejan pasar las restantes frecuencias [véase Figura 4.4.11(d)].

Como es habitual con los espectros de señales reales, en la Figura 4.4.11 mostramos $H(\omega)$ sólo para los valores de $\omega \geq 0$, ya que para estas señales, $H(\omega) = H(-\omega)$.

Ejemplo 4.4.4 Consideremos un filtro paso bajo ideal cuya respuesta en frecuencia es

$$H_{lp}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

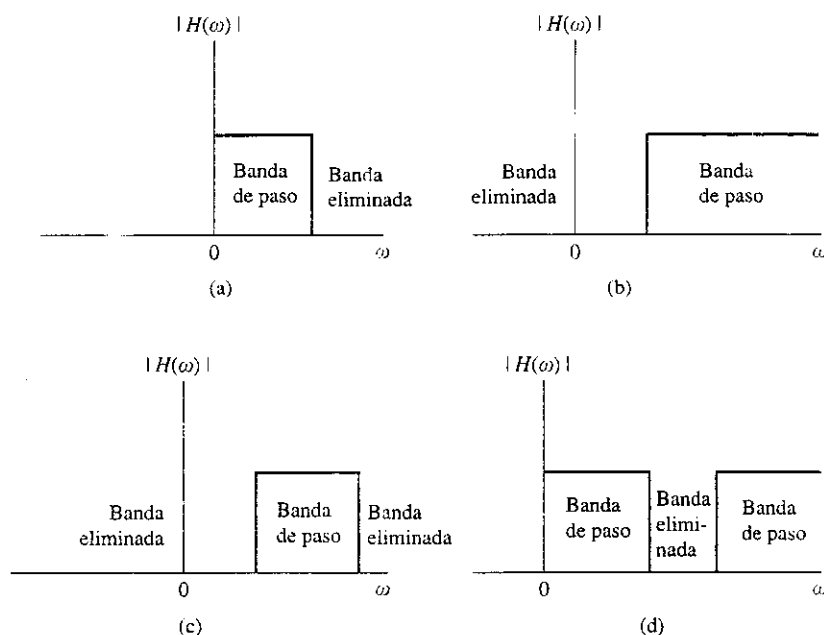


Figura 4.4.11. Clases más comunes de filtros.

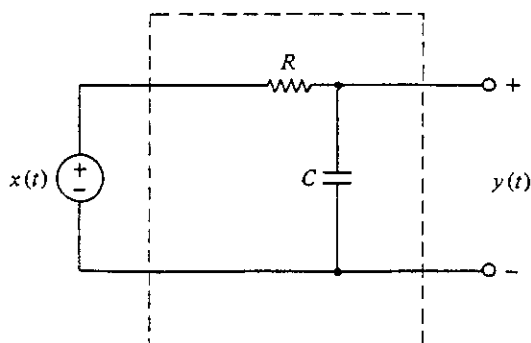
La respuesta al impulso de este filtro es la transformada inversa de Fourier de $H_{lp}(\omega)$, y su expresión es

$$h_{lp}(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc} \frac{\omega_c t}{\pi}$$

Es inmediato ver que este filtro es no causal y, por tanto, no realizable.

Los filtros descritos hasta el momento se denominan filtros ideales debido a que dejan pasar, sin cambio alguno, las frecuencias comprendidas en una determinada banda y eliminan completamente otras. Como es imposible realizar filtros con características como las que se muestran en la Figura 4.4.11, con cambios abruptos de la banda de paso a la banda eliminada y viceversa, la mayor parte de los filtros que se utilizan en la práctica tienen una banda de transición como se indica en la Figura 4.4.12.

Ejemplo 4.4.5 Consideremos el siguiente circuito RC



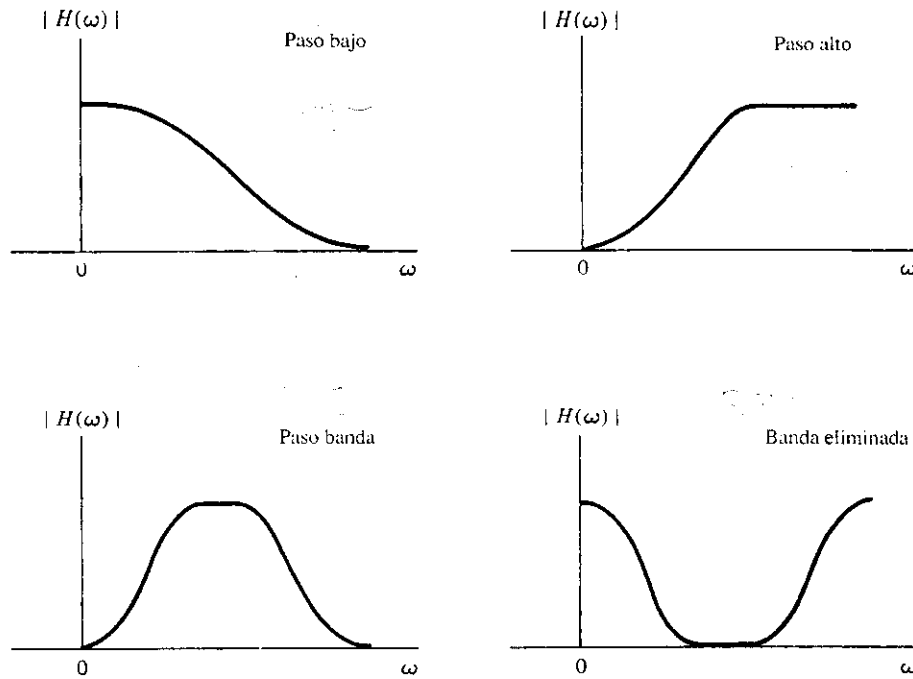


Figura 4.4.12. Filtros prácticos.

La respuesta al impulso de este circuito es (véase Problema 2.17)

$$h(t) = \frac{1}{RC} \exp \left[\frac{-t}{RC} \right] u(t)$$

y la respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

La expresión del espectro de amplitud es

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

que se muestra en la Figura 4.4.13. Resulta claro que el circuito RC en el que la salida es la tensión entre los extremos del condensador es un filtro paso bajo. La frecuencia ω_c a la que el módulo del espectro $|H(\omega)| = H(0)/\sqrt{2}$ [3 dB por debajo de $H(0)$] se denomina límite de la banda de paso o frecuencia de corte a 3 dB del filtro (la transición entre la banda de paso y la banda eliminada está cerca de ω_c). Haciendo $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$ obtenemos

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Si intercambiamos las posiciones del condensador y la resistencia obtenemos un sistema con respuesta al impulso (véase Problema 2.18):

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} \exp \left[\frac{-t}{RC} \right] u(t)$$

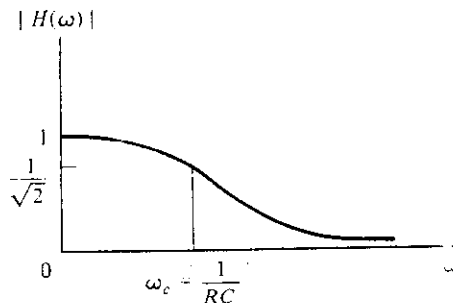


Figura 4.4.13. Módulo del espectro de un circuito RC paso bajo.

y respuesta en frecuencia:

$$H(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

La expresión del espectro de amplitud es

$$|H(\omega)|^2 = \frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}$$

y se muestra en la Figura 4.4.14. En este caso, el circuito RC en el que la salida es la tensión entre los extremos de la resistencia es un filtro paso alto. Haciendo de nuevo $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$ se puede obtener el valor de la frecuencia de corte del filtro paso alto:

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

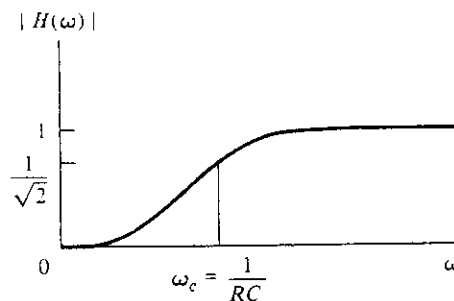


Figura 4.4.14. Módulo del espectro de un circuito RC paso alto.

Los filtros se pueden clasificar en pasivos y activos. Los filtros pasivos se realizan con elementos pasivos (resistencias, condensadores y bobinas), y los filtros activos utilizan amplificadores operacionales, condensadores y resistencias. La selección entre un filtro pasivo o uno activo en una determinada aplicación depende de diversos factores, entre los que podemos mencionar:

1. *El rango de frecuencias de trabajo del filtro.* Los filtros pasivos pueden trabajar a frecuencias superiores, mientras que los filtros activos trabajan a frecuencias más bajas.

2. *El peso y el tamaño de la realización del filtro.* Los filtros activos se pueden realizar mediante circuitos integrados, e incluirse en un chip. Por tanto, son ventajosos si las consideraciones de peso y tamaño son importantes. Este factor debe tenerse en cuenta en el diseño de filtros para aplicaciones de baja frecuencia que requieren bobinas grandes.
3. *La sensibilidad del filtro a cambios en los parámetros, o estabilidad.* Los valores de los componentes que se utilizan en la realización de circuitos se desvían de los valores nominales debido a tolerancias de los procesos de fabricación o a cambios químicos debidos a procesos térmicos o de envejecimiento. Los filtros pasivos son siempre superiores a los activos en cuanto a estabilidad.
4. *La disponibilidad de fuentes de tensión para los amplificadores operacionales.* Los amplificadores operacionales necesitan fuentes de tensión entre 1 y 12 voltios para que puedan funcionar adecuadamente. Una consideración importante es si esas fuentes están disponibles y si necesitan mantenimiento.

4.5. RELACIONES ENTRE DURACIÓN Y ANCHO DE BANDA

En la Sección 4.3 presentamos la propiedad de escalado temporal de la transformada de Fourier. Vimos que la expansión en el dominio del tiempo implica compresión en el dominio de la frecuencia, y viceversa. En esta Sección daremos una medida cuantitativa de esta observación. La anchura de una señal, tanto en el tiempo como en la frecuencia se puede definir formalmente de muchas maneras. Ninguna de ellas es la mejor para todos los casos. Si utilizamos la misma definición al trabajar con varias señales, podremos comparar sus duraciones y sus anchuras espectrales. Si cambiamos las definiciones, serán necesarios «factores de conversión» para comparar las duraciones y las anchuras espectrales. El propósito principal de esta sección es demostrar que la anchura temporal de una señal medida en segundos (duración) está inversamente relacionada con la anchura de la transformada de Fourier de la señal medida en hertzios (ancho de banda). La anchura espectral de las señales es un concepto muy importante en sistemas de comunicaciones y de tratamiento de señales, principalmente por dos razones. La primera, porque se están asignando cada vez más usuarios a bandas de radio frecuencia (RF) cada vez más saturadas, por lo que la anchura espectral necesaria para cada banda debe ser cuidadosamente considerada. La segunda, porque la anchura espectral de las señales es importante desde el punto de vista del diseño de equipos, ya que los circuitos deben tener suficiente ancho de banda para acomodar las señales rechazando el ruido. Una observación importante es que hay un límite inferior al producto duración por ancho de banda para una señal dada que es independiente de la forma de la misma. Esta relación se conoce como principio de incertidumbre.

4.5.1. Definiciones de duración y ancho de banda

Como mencionamos anteriormente, la representación espectral es un método conveniente y eficiente para la representación de señales físicas. No sólo simplifica algunas operaciones, sino que también pone de manifiesto el contenido en frecuencia de las señales. Una caracterización de las señales es su anchura en el dominio de la frecuencia, denominado simplemente ancho de banda.

Daremos algunas definiciones de ancho de banda de señales reales arbitrarias que serán útiles en ingeniería. Algunas de estas definiciones son ampliamente aplicables, mientras que otras están restringidas a aplicaciones particulares. El lector debe tener presente que existen otras definiciones que pueden resultar útiles en función de las aplicaciones.

Una señal $x(t)$ se denomina señal en banda base (o señal paso bajo) si $|X(\omega)| = 0$ para $|\omega| \geq \omega_B$, y se denomina señal paso banda centrada en ω_0 si $|X(\omega)| = 0$ para $|\omega - \omega_0| \geq \omega_B$ (véase Figura 4.5.1). Para señales en banda base mediremos el ancho de banda considerando únicamente las frecuencias positivas.

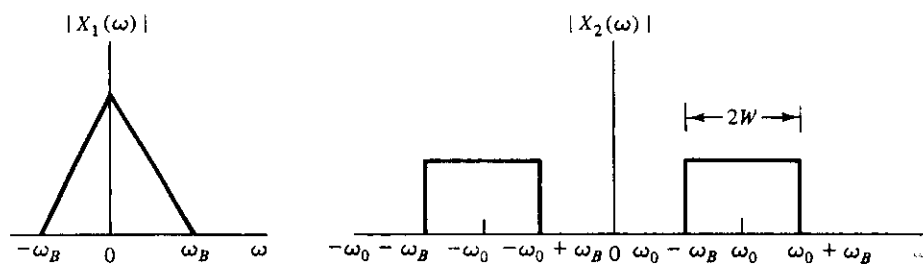


Figura 4.5.1. Amplitud del espectro para señales paso bajo y paso banda.

Ancho de banda absoluto. Este concepto se utiliza para señales de banda limitada y se define como la región fuera de la cual el espectro es cero. Es decir, si $x(t)$ es una señal en banda base y $|X(\omega)|$ es cero fuera del intervalo $|\omega| < \omega_B$, entonces

$$B = \omega_B \quad (4.5.1)$$

Pero si $x(t)$ es una señal paso banda y $|X(\omega)|$ es cero fuera del intervalo $\omega_1 < \omega < \omega_2$, entonces,

$$B = \omega_2 - \omega_1 \quad (4.5.2)$$

Ejemplo 4.5.1

La señal $x(t) = \sin \omega_B t / \pi t$ es una señal en banda base y su transformada de Fourier es $\text{rect}(\omega/2\omega_B)$. El ancho de banda de la señal es, por tanto, ω_B .

Ancho de banda a 3 dB (potencia mitad). Esta definición se utiliza con señales en banda base que tienen sólo un máximo localizado en el origen. El ancho de banda a 3 dB se define como la frecuencia ω_1 que cumple que

$$\frac{|X(\omega_1)|}{|X(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.5.3)$$

Nótese que en la banda de frecuencias $0 < \omega < \omega_1$ el módulo del espectro $|X(\omega)|$ no es nunca inferior a $1/\sqrt{2}$ del valor que tiene en $\omega = 0$. El ancho de banda a 3 dB se denomina también ancho de banda de potencia mitad debido a que una atenuación de la tensión o la corriente de 3 dB es equivalente a una reducción de la potencia a la mitad.

Ejemplo 4.5.2

La señal $x(t) = \exp[-t/T]u(t)$ es una señal en banda base y su transformada de Fourier es

$$X(\omega) = \frac{1}{1/T + j\omega}$$

La Figura 4.5.2 muestra el módulo del espectro de esta señal. Puede verse que $X(0) = T$, por lo que el ancho de banda a 3 dB es

$$B = \frac{1}{T}$$

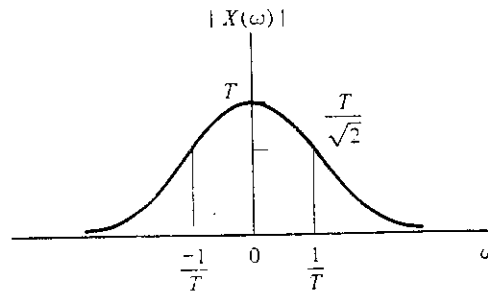


Figura 4.5.2. Módulo del espectro de la señal del Ejemplo 4.5.2.

Ancho de banda equivalente. Esta definición se aplica para señales paso banda cuyo espectro es unimodal con un máximo en el centro de la banda de frecuencia. Se define como el ancho de un espectro rectangular ficticio que tuviera la misma energía que el espectro de la señal. En la Sección 4.3.6 vimos que la densidad de energía es proporcional al cuadrado del módulo del espectro de la señal. Si ω_m es la frecuencia del máximo del módulo del espectro, definimos la energía de la banda rectangular equivalente como

$$\text{Energía equivalente} = \frac{2B_{\text{eq}}|X(\omega_m)|^2}{2\pi} \quad (4.5.4)$$

La energía real de la señal vale

$$\text{Energía real} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.5.5)$$

Igualando las Ecuaciones (4.5.4) y (4.5.5) obtenemos la fórmula del ancho de banda equivalente en hertzios:

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{|X(\omega_m)|^2} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.5.6)$$

Ejemplo 4.5.3 El ancho de banda equivalente de la señal del Ejemplo 4.5.2 es

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{T^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1/T)^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2T}$$

Ancho de banda entre nulos (cruces por cero). Este concepto se aplica a señales que no son de banda limitada y se define como la distancia entre el primer nulo de la envolvente

del módulo del espectro que esté por encima de ω_m y el primer nulo de la envolvente que esté por debajo de ω_m donde ω_m es el valor de frecuencia angular a la que el módulo del espectro tiene un máximo. Para señales en banda base, el máximo del espectro se presenta en $\omega = 0$, y el ancho de banda es la distancia del origen al primer nulo.

Ejemplo 4.5.4 En el Ejemplo 4.2.1 demostramos que la señal $x(t) = \text{rect}(t/T)$ tiene como transformada de Fourier

$$X(\omega) = T \text{ sinc } \frac{\omega T}{2\pi}$$

La Figura 4.5.3 muestra el módulo del espectro de esta señal. Observando la figura, vemos que el ancho de banda entre nulos es

$$B = \frac{2\pi}{T}$$

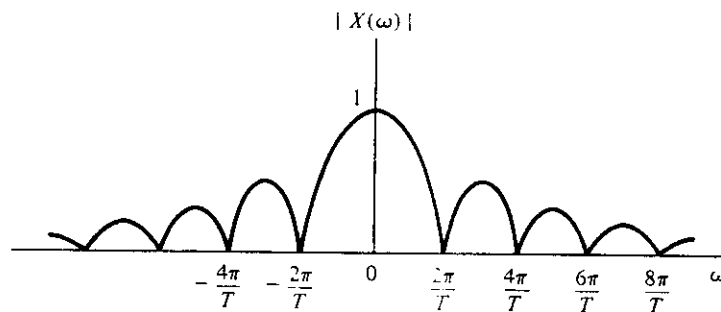


Figura 4.5.3. Módulo del espectro de la señal del Ejemplo 4.5.4.

Ancho de banda al z %. Se define así:

$$\int_{-B_z}^{B_z} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{z}{100} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.5.7)$$

Por ejemplo, $z = 99$ define la banda de frecuencias en la que reside el 99 % de la energía total. Esta definición es similar a la definición de ancho de banda ocupado de la Comisión Federal de Comunicaciones (FCC—Federal Communications Commission), que indica que la energía por encima del límite superior de la banda ω_2 es del 0,5 % y la energía por debajo del límite inferior de la banda ω_1 es del 0,5 %, lo que deja un 99 % de la energía dentro de la banda ocupada. El ancho de banda al z % se define implícitamente.

Ancho de banda RMS (de Gabor). Probablemente las definiciones analíticamente más útiles de ancho de banda son las que están dadas en función de los momentos de $X(\omega)$, o mejor aún, de $|X(\omega)|^2$. El ancho de banda rms de una determinada señal se define así:

$$B_{\text{rms}}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega} \quad (4.5.8)$$

Se puede dar una caracterización dual de una señal $x(t)$ en función de su duración T , que es una medida de la extensión de $x(t)$ en el dominio del tiempo. Análogamente al ancho de banda, la duración se puede definir de varias maneras. La definición concreta a utilizar depende de la aplicación. A continuación incluimos tres de las definiciones más utilizadas:

1. *Distancia entre ceros sucesivos.* Como ejemplo, la señal

$$x(t) = \frac{\sin 2\pi Wt}{\pi t}$$

tiene una duración de $T = 1/W$.

2. *Tiempo en el que la amplitud de $x(t)$ desciende hasta un determinado valor.* Por ejemplo, la señal exponencial

$$x(t) = \exp[-t/\Delta]u(t)$$

tiene una duración de $T = \Delta$, medida como el tiempo en el que $x(t)$ desciende hasta un valor de $1/e$ veces su valor en el origen $t = 0$.

3. *Radio de giro.* Esta medida se utiliza con señales que están concentradas alrededor de $t = 0$, y se define así:

$$T = 2 \times \text{radio de giro}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}} \quad (4.5.9)$$

Por ejemplo, la señal

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\Delta^2}\right]$$

tiene una duración de

$$\begin{aligned} T &= 2 \sqrt{\left[\frac{\Delta^2}{4\sqrt{2\pi\Delta^2}} \right] \left[\frac{1}{2\sqrt{2\pi\Delta^2}} \right]} \\ &= \sqrt{2} \Delta \end{aligned}$$

4.5.2. El principio de incertidumbre

El principio de incertidumbre dice que para cualquier señal $x(t)$ real que tienda a cero más rápido que $1/\sqrt{t}$ cuando t tiende a infinito, es decir, que

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \sqrt{t} x(t) = 0 \quad (4.5.10)$$

y para la que la duración se define como indica la Ecuación (4.5.9), y su ancho de banda como indica la Ecuación (4.5.8), el producto TB satisface la inecuación

$$TB \geq 1 \quad (4.5.11)$$

Dicho con palabras, T y B no pueden ser arbitrariamente pequeños de forma simultánea. Una duración corta implica un ancho de banda grande, y un ancho de banda pequeño implica que la señal durará mucho tiempo. Esta restricción tiene un amplio ámbito de aplicación en sistemas de comunicaciones, radar, y tratamiento de señal y voz.

La demostración de la Ecuación (4.5.11) se desprende de la fórmula de Parseval Ecuación (4.3.14), y de la desigualdad de Schwarz,

$$\left| \int_a^b y_1(t)y_2(t) dt \right|^2 \leq \int_a^b |y_1(t)|^2 dt \int_a^b |y_2(t)|^2 dt \quad (4.5.12)$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si $y_1(t)$ es proporcional a $y_2(t)$, es decir,

$$y_2(t) = ky_1(t) \quad (4.5.13)$$

La desigualdad de Schwarz se puede obtener fácilmente de la relación

$$0 \leq \int_a^b |\theta y_1(t) - y_2(t)|^2 dt = \theta^2 \int_a^b |y_1(t)|^2 dt - 2\theta \int_a^b y_1(t)y_2^*(t) dt + \int_a^b |y_2(t)|^2 dt$$

Esta ecuación es una forma cuadrática no negativa en la variable θ . Para que sea no negativa para cualquier valor de θ , su discriminante debe ser no negativo. Imponiendo esta condición se obtiene la Ecuación (4.5.12). Si el discriminante es igual a cero, para algún valor de $\theta = k$ la forma cuadrática se hace cero. Esto sólo es posible si $ky_1(t) - y_2(t) = 0$, de donde se obtiene la Ecuación (4.5.13).

Utilizando la fórmula de Parseval, podemos volver a escribir la expresión del ancho de banda de una señal de la siguiente forma,

$$B^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \quad (4.5.14)$$

Combinando la Ecuación (4.5.14) con la Ecuación (4.5.9) obtenemos

$$(TB)^2 = \frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |x'(t)|^2 dt}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right]^2} \quad (4.5.15)$$

Si aplicamos la desigualdad de Schwarz al numerador de la Ecuación (4.5.15) resulta

$$TB \geq 2 \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} tx(t)x'(t) dt \right|}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \quad (4.5.16)$$

Pero la fracción del lado derecho de la Ecuación (4.5.16) es igual a $1/2$, como puede verse si integramos el numerador por partes y tenemos en cuenta que $x(t)$ tiende a cero más rápido que $1/\sqrt{t}$ cuando $t \rightarrow \pm \infty$. Obtenemos así el resultado deseado.

Para que la desigualdad de Schwarz se cumpla con igualdad, debemos tener:

$$kt x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

o

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = kt$$

Integrando, tenemos

$$\ln [x(t)] = \frac{kt^2}{2} + \text{constante}$$

o

$$x(t) = c \exp [kt^2] \quad (4.5.17)$$

Si k es un número negativo, $x(t)$ es una señal con aspecto de pulso que se denomina pulso gaussiano. Por lo tanto, entre todas las señales, el pulso gaussiano es la que posee un menor producto duración-ancho de banda en el sentido de las Ecuaciones (4.5.8) y (4.5.9).

Ejemplo 4.5.5 Si escribimos la transformada de Fourier en forma polar

$$X(\omega) = A(\omega) \exp [j\phi(\omega)]$$

se puede demostrar que entre todas las señales con la misma amplitud $A(\omega)$ la que tiene duración mínima es la que tiene fase cero (lineal). Aplicando la Ecuación (4.3.23), obtenemos

$$(-jt)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} = \left[\frac{dA(\omega)}{d\omega} + jA(\omega) \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \right] \exp [j\phi(\omega)] \quad (4.5.18)$$

Aplicando ahora las Ecuaciones (4.3.14) y (4.5.18) resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{dA(\omega)}{d\omega} \right]^2 + A^2(\omega) \left[\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \right]^2 \right\} d\omega \quad (4.5.19)$$

Como el lado izquierdo de la Ecuación (4.5.19) mide la duración de $x(t)$, podemos concluir que un rizado alto en el espectro de amplitud o en el ángulo de fase de $X(\omega)$ implicará que la señal es de mucha duración. Un rizado alto produce valores altos de las derivadas de los espectros de amplitud y de fase, y entre todas las señales con la misma amplitud $A(\omega)$, la que minimiza el lado izquierdo de la Ecuación (4.5.19) es la que tiene fase cero (lineal).

Ejemplo 4.5.6 Una medida conveniente para la duración de una señal $x(t)$ es

$$T = \frac{1}{x(0)} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

En esta fórmula, la duración T se puede interpretar como la razón entre el área de $x(t)$ y su altura. Nótese que si $x(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema LTI, T es una medida del tiempo de elevación del sistema, que se defina como la razón entre el valor final de la respuesta al escalón y la pendiente de la respuesta al escalón en algún punto apropiado t_0 de la subida ($t_0 = 0$ en este caso). Si definimos el ancho de banda de $x(t)$ como

$$B = \frac{1}{X(0)} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$$

es fácil demostrar que

$$BT = 2\pi$$

4.6. RESUMEN

- La transformada de Fourier de $x(t)$ se define como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j\omega t] dt$$

- La transformada inversa de Fourier de $X(\omega)$ se define como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp[j\omega t] d\omega$$

- $X(\omega)$ existe si $x(t)$ es una señal «sin comportamientos anómalos» y es integrable en valor absoluto. Estas condiciones son suficientes, pero no necesarias.
- La gráfica del módulo de $X(\omega)$ en función de ω se denomina amplitud del espectro de $x(t)$, y $|X(\omega)|^2$ se denomina densidad espectral de energía.
- La gráfica de la fase de $X(\omega)$ en función de ω se denomina fase del espectro.
- El teorema de Parseval dice que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- La energía de $x(t)$ dentro de la banda de frecuencias $\omega_1 < \omega < \omega_2$ se expresa:

$$\Delta E = \frac{2}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- La energía total de una señal no periódica $x(t)$ es

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- La densidad espectral de potencia de $x(t)$ se define:

$$S(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{|X_{\tau}(\omega)|^2}{2\tau} \right]$$

donde

$$x_{\tau}(t) \leftrightarrow X_{\tau}(\omega)$$

y

$$x_{\tau}(t) = x(t) \text{rect}(t/2\tau)$$

- La propiedad de convolución de la transformada de Fourier dice que

$$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

- Si $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$, la propiedad de dualidad expresa que

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

- Entre las aplicaciones importantes de la transformada de Fourier podemos citar la modulación de amplitud, la multiplexación, el filtrado y el muestreo.
- Si $x(t)$ es una señal de banda limitada que cumple

$$X(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_B$$

entonces $x(t)$ queda completamente determinada por sus valores (muestras) tomadas a intervalos iguales en el tiempo, suponiendo que $T < \pi/\omega_B$. La frecuencia angular $\omega_s = 2\pi/T$ se denomina frecuencia de muestreo. La frecuencia de muestreo mínima es $2\omega_B$ y se denomina frecuencia de Nyquist.

- El ancho de banda B de $x(t)$ es una medida de la extensión en frecuencia de la señal.
- Existen varias definiciones de ancho de banda de la señal $x(t)$, útiles en diferentes aplicaciones.
- La duración T de $x(t)$ es una medida de la extensión en el tiempo de la señal.
- El producto del ancho de banda por la duración de una señal $x(t)$ es mayor o igual que una constante que depende de las definiciones de B y de T .

4.7. LISTA DE TÉRMINOS IMPORTANTES

Amplitud del espectro	Filtro paso banda
Ancho de banda	Frecuencia de muestreo
Ancho de banda a 3 dB (potencia mitad)	Frecuencia de Nyquist
Ancho de banda equivalente	Función de muestreo
Ancho de banda RMS	Función sinc
Densidad espectral de energía	Modulación de amplitud
Densidad espectral de potencia	Multiplexación
Dualidad	Principio de incertidumbre
Duración	Pulso rectangular
Exponencial bilateral	Pulso triangular
Fase del espectro	Solapamiento
Filtrado de señal	Teorema de muestreo
Filtro paso alto	Teorema de Parseval
Filtro paso bajo	Tren periódico de impulsos

4.8. PROBLEMAS

- 4.1. Obtener la transformada de Fourier de las siguientes señales en función de $X(\omega)$, la transformada de Fourier de $x(t)$.

(a) $x(-t)$

(b) $x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$

(c) $x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$

(d) $x^*(t)$

(e) $\operatorname{Re}\{x(t)\} = \frac{x(t) + x^*(t)}{2}$

(f) $\operatorname{Im}\{x(t)\} = \frac{x(t) - x^*(t)}{2j}$

- 4.2. Determinar cuál de las siguientes señales tiene transformada de Fourier ¿por qué?

(a) $x(t) = \exp[-2t]u(t)$

(b) $x(t) = |t|u(t)$

(c) $x(t) = \cos(\pi/t)$

(d) $x(t) = \frac{1}{t}$

(e) $x(t) = t^2 \exp[-2t]u(t)$

- 4.3. Demostrar que la transformada de Fourier de $x(t)$ se puede escribir así:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n m_n \frac{\omega^n}{n!}$$

siendo

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n x(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(Ayuda: Desarrollar $\exp[-j\omega t]$ en $t = 0$ e integrar término a término.)

- 4.4. Utilizando la Ecuación (4.2.12), demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t d\omega = 2\pi \delta(t)$$

Utilizar este resultado para demostrar la Ecuación (4.2.13).

- 4.5. Sea $X(\omega) = \operatorname{rect}[(\omega - 1)/2]$. Obtener la transformada de Fourier de las siguientes funciones, utilizando las propiedades de la transformada de Fourier:

(a) $x(-t)$

(b) $tx(t)$

- (c) $x(t + 1)$
- (d) $x(-2t + 4)$
- (e) $(t - 1)x(t + 1)$
- (f) $\frac{dx(t)}{dt}$
- (g) $t \frac{dx(t)}{dt}$
- (h) $x(2t - 1) \exp[-j2t]$
- (i) $x(t) \exp[-j2t]$
- (j) $tx(t) \exp[-j2t]$
- (k) $(t - 1)x(t - 1) \exp[-j2t]$
- (l) $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

4.6. Sea $x(t) = \exp[-2t]u(t)$, e $y(t) = x(t + 1) + x(t - 1)$. Obtener $Y(\omega)$.

4.7. Utilizando la fórmula de Euler,

$$\exp[j\omega t] = \cos \omega t + j \sen \omega t$$

interpretar la integral

$$\frac{1}{2\pi} \int \exp[j\omega t] d\omega = \delta(t)$$

(Ayuda: Pensar en la integral como una suma de cosenos y senos de diferentes frecuencias).

4.8. Consideremos las dos señales que se muestran en la Figura P4.8. Utilizando las propiedades de linealidad, desplazamiento temporal e integración, junto con la expresión de la transformada de una señal rectangular, calcular $X(\omega)$ e $Y(\omega)$.

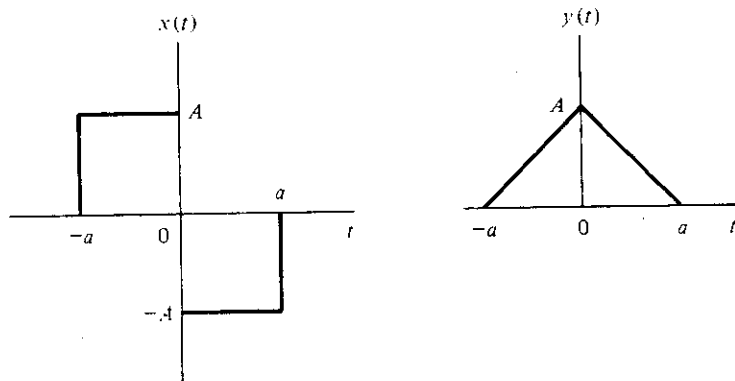


Figura P4.8.

4.9. Calcular la energía de las siguientes señales, utilizando el teorema de Parseval,

(a) $x(t) = \exp[-2t]u(t)$

(b) $x(t) = u(t) - u(t - 5)$

(c) $x(t) = \Delta(t/4)$

(d) $x(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$

4.10. Una señal con forma gaussiana,

$$x(t) = A \exp[-at^2]$$

se aplica a un sistema cuya relación entrada/salida es

$$y(t) = x^2(t)$$

(a) Obtener la transformada de Fourier de la salida $y(t)$.

(b) Si $y(t)$ se aplica a un segundo sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = B \exp[-bt^2]$$

encontrar la salida del segundo sistema.

(c) ¿Cómo cambia la salida si intercambiamos el orden de los dos sistemas?

4.11. Las dos fórmulas

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \quad \text{y} \quad x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$$

son casos especiales de parejas de transformadas de Fourier. Estas dos fórmulas se pueden utilizar para evaluar algunas integrales definidas. Escoger $x(t)$ y $X(\omega)$ de forma apropiada para verificar las siguientes igualdades:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \theta}{\pi \theta} d\theta = 1$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\pi \theta^2] d\theta = 1$

(c) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \theta^2} d\theta = 1$

(d) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T \frac{\text{sen}^2(\theta T/2)}{(\theta T/2)^2} d\theta = 1$

4.12. Utilizando la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega) d\omega$$

y una pareja de transformadas conocida demostrar que

(a) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(a^2 + t^2)^2} dt = \frac{\pi}{4a^3}$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sinc} t}{a^2 + t^2} dt = \frac{1 - \exp[-\pi a]}{2a^2} \\ \text{(c)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 t}{t^3} dt = \frac{3\pi}{4} \\ \text{(d)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 t}{t^4} dt = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

4.13. Consideremos la señal

$$x(t) = \exp[-\varepsilon t]u(t)$$

- (a) Obtener $X(\omega)$.
- (b) Escribir $X(\omega)$ en la forma $X(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$, donde $R(\omega)$ e $I(\omega)$ son las partes real e imaginaria de $X(\omega)$, respectivamente.
- (c) Tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ del resultado del Apartado (b), demostrar que

$$\mathcal{F}\{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp[-\varepsilon t]u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Ayuda: Nótese que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0 \\ \infty, & \omega = 0 \end{cases}$$

y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} d\omega = \pi$$

4.14. La señal $x(t) = \exp[-\alpha t]u(t)$ es la entrada a un sistema cuya respuesta al impulso es $h(t) = \operatorname{sen}(2\pi)/(\pi t)$.

- (a) Calcular la transformada de Fourier de la salida $Y(\omega)$.
- (b) ¿Para qué valor de α el valor de la energía de la señal de salida es igual a la mitad de la energía de la señal de entrada?

4.15. Una señal tiene como transformada de Fourier

$$X(\omega) = \frac{\omega^2 + j4\omega + 2}{-\omega^2 + j4\omega + 3}$$

Calcular las transformadas de las siguientes señales:

- (a) $x(-2t + 1)$
- (b) $x(t)\exp[-jt]$
- (c) $\frac{dx(t)}{dt}$
- (d) $x(t)\operatorname{sen}(\pi t)$
- (e) $x(t) * \delta(t - 1)$
- (f) $x(t) * x(t - 1)$

- 4.16. (a) Demostrar que si $x(t)$ es de banda limitada, es decir, si

$$X(\omega) = 0, \quad \text{para } |\omega| > \omega_c$$

entonces

$$x(t) * \frac{\sin \alpha t}{\pi t} = x(t), \quad \alpha > \omega_c$$

- (b) Utilizando el resultado del Apartado (a), demostrar que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha \tau}{\tau} \frac{\sin(t - \tau)}{t - \tau} d\tau = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \alpha \geq 1 \\ \frac{\sin \alpha t}{t}, & |\alpha| \leq 1 \end{cases}$$

- 4.17. Demostrar que, considerando la corriente como entrada y la tensión como salida, la respuesta en frecuencia de una bobina de inductancia L es $j\omega L$ y la de un condensador de capacidad C es $1/j\omega C$.
- 4.18. Consideremos el sistema que se muestra en la Figura P4.18 con $RC = 10$.
- (a) Calcular $H(\omega)$ si la salida es la tensión entre los extremos del condensador, y dibujar su módulo en función de ω .
- (b) Repetir el Apartado (a) si la salida es la tensión entre los extremos de la resistencia. Comentar los resultados.

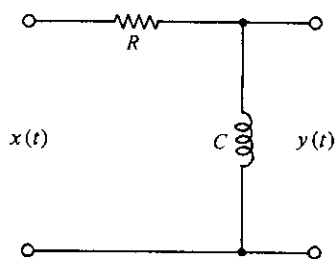


Figura P4.18.

- 4.19. La entrada al sistema que se muestra en la Figura P4.19 tiene el espectro que se muestra en dicha figura. Sea

$$p(t) = \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 \gg \omega_m$$

Obtener el espectro de la salida, $Y(\omega)$ si

$$h_2(t) = \frac{\sin \omega_B t}{\pi t}$$

Considerar los casos $\omega_m > \omega_B$ y $\omega_m \leq \omega_B$.

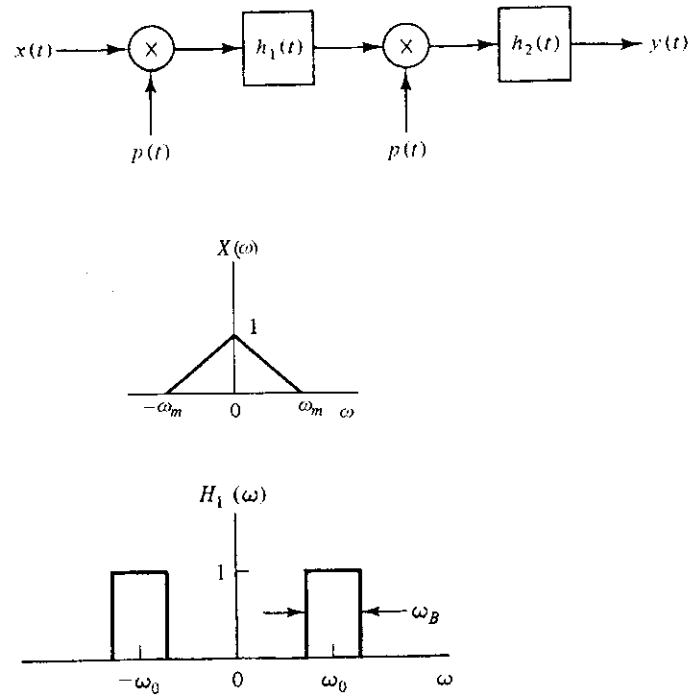


Figura P4.19.

4.20. Repetir el Problema 4.19 si

$$x(t) = \text{Sa} \frac{3\omega_B t}{2}$$

- 4.21. (a) La transformada de Hilbert de una señal $x(t)$ se obtiene pasando la señal por un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t) = 1/\pi t$. ¿Cómo es $H(\omega)$?
 (b) ¿Cuál es la transformada de Hilbert de la señal $x(t) = \cos \pi t$?
 4.22. La función de autocorrelación de una señal $x(t)$ se define:

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) x(\tau + t) d\tau$$

Demostrar que

$$R_x(t) \leftrightarrow |X(\omega)|^2$$

4.23. Supongamos que $x(t)$ es la entrada a un sistema lineal cuya respuesta al impulso es $h(t)$.

(a) Demostrar que

$$R_y(t) = R_x(t) * h(t) * h(-t)$$

donde $y(t)$ es la salida del sistema.

(b) Demostrar que

$$R_y(t) \leftrightarrow |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2$$

4.24. En el sistema que se muestra en la Figura P4.24, supongamos que

$$x(t) = \frac{\sin \omega_1 t}{t} + \frac{\sin \omega_2 t}{t}, \quad \omega_1 < \omega_2$$

- (a) Encontrar $y(t)$ si $0 < \omega_f < \omega_1$.
- (b) Encontrar $y(t)$ si $\omega_1 < \omega_f < \omega_2$.
- (c) Encontrar $y(t)$ si $\omega_2 < \omega_f$.

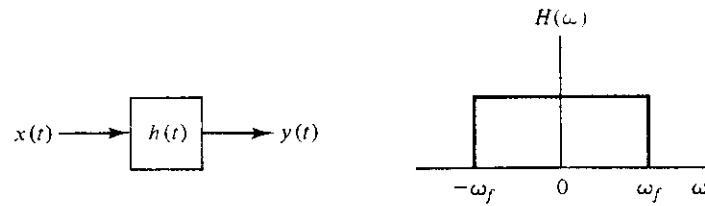


Figura P4.24.

4.25. Consideremos el sistema estándar de modulación de amplitud que se muestra en la Figura P4.25.

- (a) Dibujar el espectro de $x(t)$.
- (b) Dibujar el espectro de $y(t)$ en los siguientes casos:
 - (i) $0 \leq \omega_c < \omega_0 - \omega_m$
 - (ii) $\omega_0 - \omega_m \leq \omega_c < \omega_0$
 - (iii) $\omega_c > \omega_0 + \omega_m$
- (c) Dibujar el espectro de $z(t)$ en los siguientes casos:
 - (i) $0 \leq \omega_c < \omega_0 - \omega_m$
 - (ii) $\omega_0 - \omega_m \leq \omega_c < \omega_0$
 - (iii) $\omega_c > \omega_0 + \omega_m$

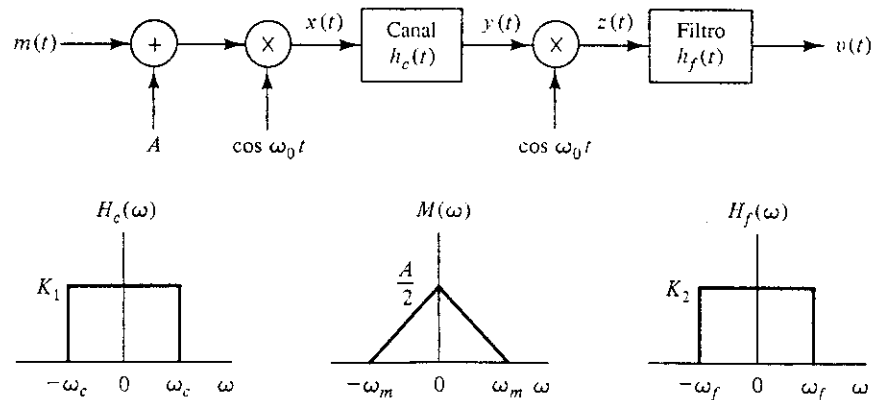


Figura P4.25.

(d) Dibujar el espectro de $v(t)$ si $\omega_c > \omega_0 + \omega_m$ y

- (i) $\omega_f < \omega_m$
- (ii) $\omega_f < 2\omega_0 - \omega_m$
- (iii) $\omega_f > 2\omega_0 + \omega_m$

4.26. Como se dijo en la Sección 4.4.1, la demodulación AM consiste en multiplicar la señal $y(t)$ recibida por una réplica $A \cos \omega_0 t$ de la portadora y filtrar paso bajo la señal resultante $z(t)$. Este esquema se denomina demodulación coherente y supone que el receptor conoce la fase de la portadora. Si la fase de la portadora no es conocida, $z(t)$ es entonces

$$z(t) = y(t)A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

siendo θ la fase supuesta de la portadora.

- (a) Supongamos que la señal $x(t)$ es de banda limitada a ω_m . Encontrar la salida $\hat{x}(t)$ del demodulador.
 - (b) Comparar $\hat{x}(t)$ con la salida deseada del demodulador, $x(t)$.
- 4.27. Una señal modulada en amplitud, en banda lateral única, se genera utilizando el sistema que se muestra en la Figura P4.27.
- (a) Dibujar el espectro de $y(t)$ para $\omega_f = \omega_m$.
 - (b) Escribir una expresión matemática de $h_f(t)$. ¿Es un filtro realizable?

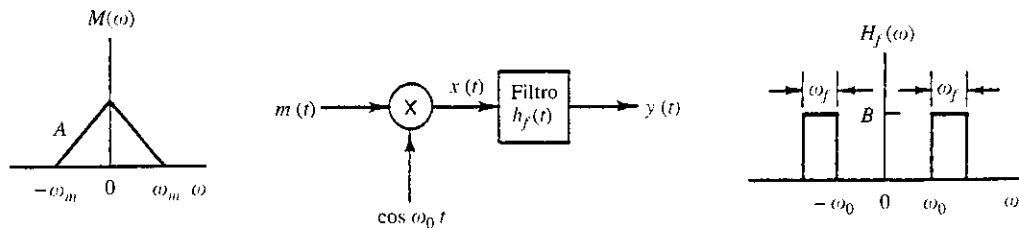
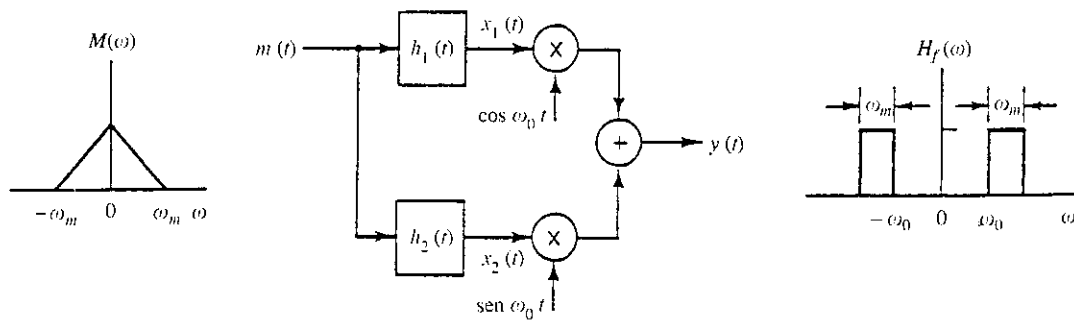


Figura P4.27.

4.28. Consideremos el sistema que se muestra en la Figura P4.28(a). Los sistemas $h_1(t)$ y $h_2(t)$ tienen como respuesta en frecuencia, respectivamente,



(a)

Figura P4.28(a).

$$H_1(\omega) = \frac{1}{2} [H_0(\omega - \omega_0) + H_0(\omega + \omega_0)]$$

y

$$H_2(\omega) = \frac{-1}{2j} [H_0(\omega - \omega_0) - H_0(\omega + \omega_0)]$$

- (a) Dibujar el espectro de $y(t)$.
 (b) Repetir el Apartado (a) para $H_0(\omega)$ como se muestra en la Figura P4.28(b).

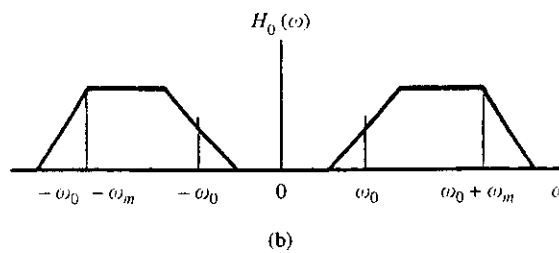


Figura P4.28(b).

- 4.29. Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales paso bajo con anchos de banda de 150 Hz. y 350 Hz., respectivamente. Sea $z(t) = x(t)y(t)$. La señal $z(t)$ se muestrea a intervalos de T_s segundos mediante un sistema de muestreo ideal.

- (a) ¿Cuál es el máximo valor que puede tener T_s para que no se produzca solapamiento?
 (b) Si

$$x(t) = \sin\left(\frac{300\pi t}{\pi t}\right), \quad y(t) = \sin\left(\frac{700\pi t}{\pi t}\right)$$

dibujar el espectro de la señal muestreada para (i) $T_s = 0,5$ ms. y (ii) $T_s = 2$ ms.

- 4.30. El muestreo natural consiste en multiplicar la señal $x(t)$ por un tren de pulsos rectangulares, como muestra la Figura P4.30.

- (a) Calcular y dibujar el espectro de $x_s(t)$.
 (b) ¿Se puede recuperar $x(t)$ sin distorsión?

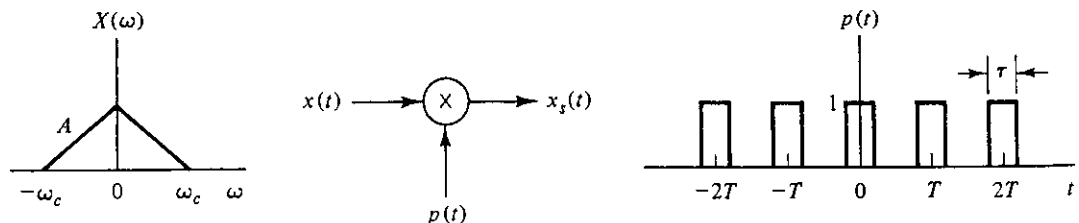


Figura P4.30.

4.31. En el muestreo instantáneo, la amplitud de cada pulso del tren de pulsos $x_s(t)$ es constante durante el intervalo que dura el pulso, y es igual a la amplitud de la muestra instantánea de $x(t)$, como se muestra en la Figura P4.31(a). Suponemos, por conveniencia, que la muestra instantánea de $x(t)$ se toma en el centro de cada pulso. En general, esta suposición no es necesaria.

- Escribir una expresión de $x_s(t)$.
- Calcular $X_s(\omega)$.
- ¿En qué se diferencia este resultado del Apartado (a) del Problema 4.30?
- Utilizando sólo un filtro paso bajo ¿Se puede recuperar $x(t)$ sin distorsión?
- Demostrar que es posible recuperar $x(t)$ sin distorsión si se añade otro filtro $H_{eq}(\omega)$, como se muestra en la Figura P4.31(b), donde

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$H_{eq}(\omega) = \frac{\omega\tau/2}{\sin(\omega\tau/2)}, \quad |\omega| < \omega_c$$

$$= \text{arbitrario}, \quad \text{en el resto}$$

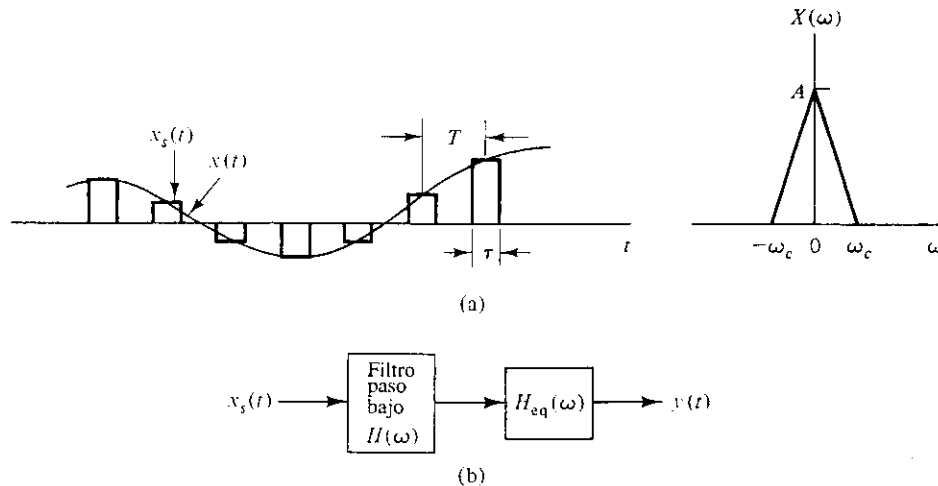


Figura P4.31. Muestreo instantáneo de $x(t)$.

4.32. La Figura P4.32 muestra un diagrama del sistema FDM que genera la señal en banda base para radiodifusión FM estéreo. Las señales del altavoz izquierdo y el altavoz derecho se procesan para obtener $x_L(t) + x_R(t)$ y $x_L(t) - x_R(t)$.

- Dibujar el espectro de $y(t)$.
- Dibujar los espectros de $z(t)$, $v(t)$ y $w(t)$.
- Encontrar la forma de recuperar $x_L(t)$ y $x_R(t)$.

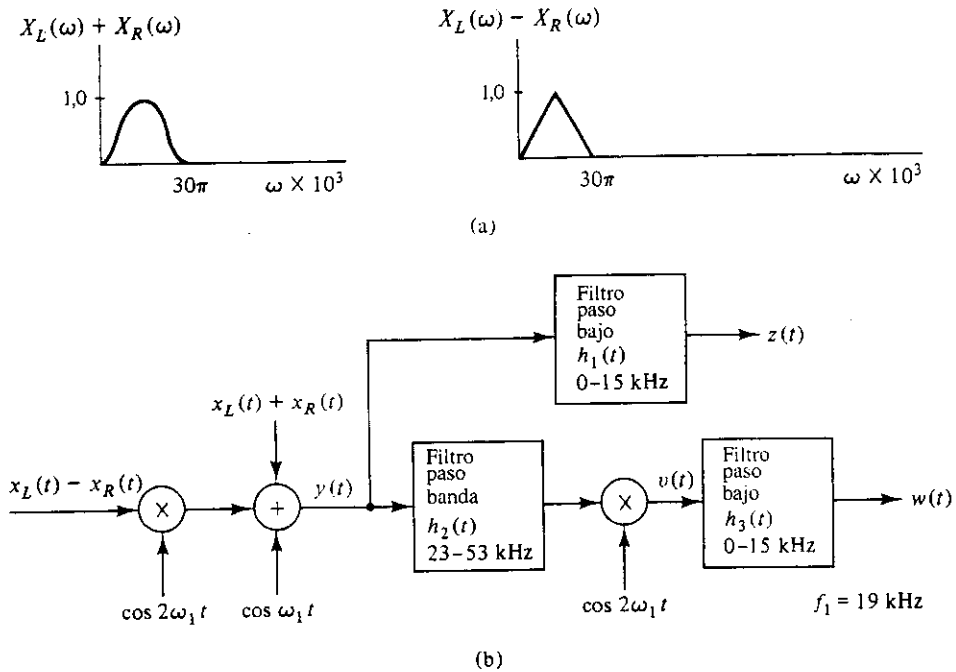


Figura P4.32.

- 4.33. Demostrar que la transformada de un tren de dobletes es un tren de impulsos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(t - nT) \leftrightarrow j\omega_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\delta(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- 4.34. Encontrar el ancho de banda indicado para cada una de estas señales:

- (a) $\text{sinc} \frac{3Wt}{2}$ (ancho de banda absoluto)
- (b) $\exp[-3t]u(t)$ (ancho de banda a 3 dB)
- (c) $\exp[-3t]u(t)$ (ancho de banda 95 %)
- (d) $\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp[-\alpha t^2]$ (ancho de banda rms)

- 4.35. La señal $X_s(\omega)$ que se muestra en la Figura 4.4.10(b) es periódica en ω .

- (a) Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de esta señal.
- (b) Demostrar que

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\omega_s} x(-nT) \exp \left[\frac{jn2\pi}{\omega_s} \omega \right]$$

- (c) Utilizando la Ecuación (4.4.1) junto con la propiedad de desplazamiento de la transformada de Fourier demostrar que

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2W_B}{\omega_s} x(nT) \frac{\text{sen}[W_B(t - nT)]}{W_B(t - nT)}$$

4.36. Calcular el producto duración-ancho de banda para las siguientes señales:

(a) $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\Delta^2}\right]$

(Utilizar para encontrar T la medida del radio de giro y para B la medida del ancho de banda equivalente).

(b) $x(t) = \frac{\sin 2\pi Wt}{\pi t}$

(Utilizar como medida de T la distancia entre ceros y como medida de B el ancho de banda absoluto.)

(c) $x(t) = A \exp[-\alpha t]u(t)$. [Utilizar como medida de T el tiempo en el que la entrada $x(t)$ cae a una fracción $1/e$ de su valor en $t = 0$, y como medida de B el ancho de banda a 3 dB.]

La transformada de Laplace

5.1. INTRODUCCIÓN

En los Capítulos 3 y 4 hemos visto cómo los métodos en el dominio de la frecuencia resultan extremadamente útiles para el estudio de las señales y los sistemas LTI. Demostramos que el análisis de Fourier reduce la operación de convolución necesaria para calcular la salida de los sistemas LTI al producto de la transformada de Fourier de la señal de entrada, por la respuesta en frecuencia del sistema. Uno de los problemas que pueden aparecer es que muchas de las señales de entrada que nos gustaría utilizar no tienen transformada de Fourier. Por ejemplo, las señales $\exp[\alpha t]u(t)$, $\alpha > 0$; $\exp[-\alpha t]$, $-\infty < t < \infty$; $tu(t)$ y muchas otras señales en el dominio del tiempo no son integrables en valor absoluto. Si nos encontramos, por ejemplo, con un sistema a cuya entrada se coloca una función rampa ¿existen métodos alternativos a las técnicas en el dominio del tiempo que presentamos en el Capítulo 2? Esta dificultad se puede resolver extendiendo el concepto de transformada de Fourier de forma que la señal $x(t)$ se exprese como una suma de exponenciales complejas de la forma $\exp[st]$ en las que la variable correspondiente a la frecuencia es ahora $s = \sigma + j\omega$, y ya no esté restringida a tomar únicamente valores imaginarios puros. Esto es equivalente a multiplicar la señal por un factor exponencial convergente. Por ejemplo, la señal $\exp[-\sigma t] \exp[\alpha t]u(t)$ satisface las condiciones de Dirichlet cuando $\sigma > \alpha$ y, por lo tanto, tendrá transformada de Fourier extendida o generalizada. Esta transformada extendida recibe el nombre de transformada bilateral de Laplace, en honor al matemático francés Pierre Simon de Laplace. En este capítulo definiremos la transformada bilateral de Laplace (Sección 5.2) y utilizaremos la definición para obtener una serie de parejas de transformadas bilaterales para algunas señales básicas.

Como dijimos en el Capítulo 2, cualquier señal $x(t)$ se puede escribir como suma de una señal causal y una señal anticausal. La parte causal de $x(t)$, $x(t)u(t)$, admite un tipo particular de transformada de Laplace que denominaremos transformada unilateral de Laplace, o simplemente transformada de Laplace. La transformada unilateral de Laplace se utiliza más frecuentemente que la bilateral, no sólo porque la mayoría de las señales que se encuentran en la práctica son señales causales, sino también porque la respuesta de un sistema LTI causal a una entrada causal es causal. En la Sección 5.3 definiremos la trans-

formada unilateral de Laplace y daremos algunos ejemplos de cómo se calcula. En la Sección 5.4 mostraremos cómo calcular la transformada bilateral de Laplace utilizando la transformada unilateral.

Como ocurre con otras transformadas, la transformada de Laplace posee un conjunto de valiosas propiedades que se utilizarán sistemáticamente en diversas aplicaciones. Debido a su importancia, dedicaremos la Sección 5.5 al desarrollo de estas propiedades y a dar ejemplos de su aplicación.

Encontrar la transformada inversa de Laplace es tan importante como la propia transformada. La transformada inversa de Laplace se define mediante una integral de contorno. En general, esta integral no es sencilla de resolver y requiere la utilización de teoremas pertenecientes al campo de la variable compleja que se salen de los objetivos de este texto. En la Sección 5.6 utilizaremos la técnica de descomposición en fracciones para encontrar la transformada inversa de Laplace del conjunto de señales con transformadas racionales (es decir, que se pueden expresar como el cociente de dos polinomios).

En la Sección 5.7, desarrollaremos algunas técnicas para determinar los diagramas de simulación de sistemas en tiempo continuo, y en la Sección 5.8 presentaremos algunas aplicaciones de la transformada de Laplace, como la solución de ecuaciones diferenciales y su uso en análisis de circuitos y en sistemas de control. En la Sección 5.9 consideraremos la solución de ecuaciones de estado en el dominio de la frecuencia y finalmente, en la Sección 5.10, hablaremos de la estabilidad de los sistemas LTI en el dominio s .

5.2. LA TRANSFORMADA BILATERAL DE LAPLACE

La transformada bilateral de Laplace de una señal real $x(t)$ se define así:

$$X_B(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-st] dt \quad (5.2.1)$$

donde la variable compleja s tiene en general la forma $s = \sigma + j\omega$, con σ y ω las partes real e imaginaria, respectivamente. Cuando $\sigma = 0$, $s = j\omega$ y la Ecuación (5.2.1) se convierte en la transformada de Fourier de $x(t)$. Cuando $\sigma \neq 0$, la transformada bilateral de Laplace es la transformada de Fourier de la señal $x(t) \exp[-\sigma t]$. A veces expresaremos la transformada bilateral de Laplace mediante el operador $\mathcal{L}_B\{x(t)\}$, e indicaremos la relación de transformación existente entre $x(t)$ y $X_B(s)$ de la forma:

$$x(t) \leftrightarrow X_B(s) \quad (5.2.2)$$

Vamos a calcular, a continuación, varias transformadas bilaterales de Laplace para ilustrar su relación con la transformada de Fourier.

Ejemplo 5.2.1

Consideremos la señal $x(t) = \exp[-at]u(t)$. Aplicando la definición de transformada bilateral de Laplace,

$$\begin{aligned} X_B(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-at] \exp[-st] u(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \exp[-(s+a)t] dt \\ &= \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

Como hemos dicho anteriormente, podemos ver la transformada bilateral de Laplace como si fuera la transformada de Fourier de la señal $\exp[-at] \exp[-\sigma t] u(t)$. Esta señal tiene transformada de Fourier sólo si $\sigma > -a$. Por tanto, $X_B(s)$ existirá sólo si $\text{Re}\{s\} > -a$.

En general, la transformada de Laplace bilateral convergerá para algunos valores de $\text{Re}\{s\}$ pero no para otros. Los valores de s para los que converge, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \exp[-\text{Re}\{s\}t] dt < \infty \quad (5.2.3)$$

se denominan región de convergencia absoluta o simplemente, región de convergencia (ROC – Region of Convergence). Hay que tener en cuenta que la región de convergencia depende de la señal $x(t)$. En el ejemplo anterior, la región de convergencia se define como para $\text{Re}\{s\} > -a$ para a positivo y negativo. Nótese que aunque la transformada bilateral de Laplace existe para todos los valores de a , la transformada de Fourier sólo existe para $a > 0$.

Si nos fijamos ahora en las señales en el dominio del tiempo cuya transformada de Laplace es una función racional de s , es decir, $X_B(s) = N(s)/D(s)$, resulta claro que $X_B(s)$ no convergerá en los ceros del polinomio $D(s)$ [los polos de $X_B(s)$]. Esto nos permite concluir que en el caso de transformadas de Laplace racionales, la región de convergencia no debe contener polos.

Ejemplo 5.2.2

En este ejemplo veremos dos señales con la misma expresión algebraica de sus transformadas bilaterales de Laplace, pero con diferentes regiones de convergencia. Consideremos la señal

$$x(t) = -\exp[-at]u(-t)$$

Su transformada bilateral de Laplace es

$$\begin{aligned} X_B(s) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(s+a)t]u(-t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^0 \exp[-(s+a)t] dt \end{aligned}$$

Para que esta integral converja, es necesario que $\text{Re}\{s+a\} < 0$ o que $\text{Re}\{s\} < -a$, y la transformada bilateral de Laplace es

$$X_B(s) = \frac{1}{s+a}$$

A pesar de que las expresiones algebraicas de las transformadas bilaterales de Laplace de las señales de los Ejemplos 5.2.1 y 5.2.2 son idénticas, las dos transformadas tienen diferentes regiones de convergencia. Con este ejemplo podemos concluir que para señales definidas sólo para valores positivos del tiempo, el comportamiento de la propia señal pone un límite inferior en los valores permitidos de $\text{Re}\{s\}$ y para señales definidas para valores negativos de tiempo, el comportamiento de la señal pone un límite superior en los valores permitidos de $\text{Re}\{s\}$. Por tanto, para una $X_B(s)$ dada, puede haber más de una señal $x(t)$ en función de la región de convergencia. En otras palabras, la correspondencia entre $x(t)$ y $X_B(s)$ no es única a menos que se especifique la región de convergencia.

Una forma conveniente de mostrar la región de convergencia es en el plano complejo de la variable s (plano s), como muestra la Figura 5.2.1. El eje horizontal se denomina generalmente eje σ y el eje vertical, eje $j\omega$. La región sombreada de la Figura 5.2.1(a) representa en conjunto de puntos de plano s que forman la región de convergencia para la señal del Ejemplo 5.2.1. La región sombreada en la Figura 5.2.1(b) representa la región de convergencia para la señal del Ejemplo 5.2.2.

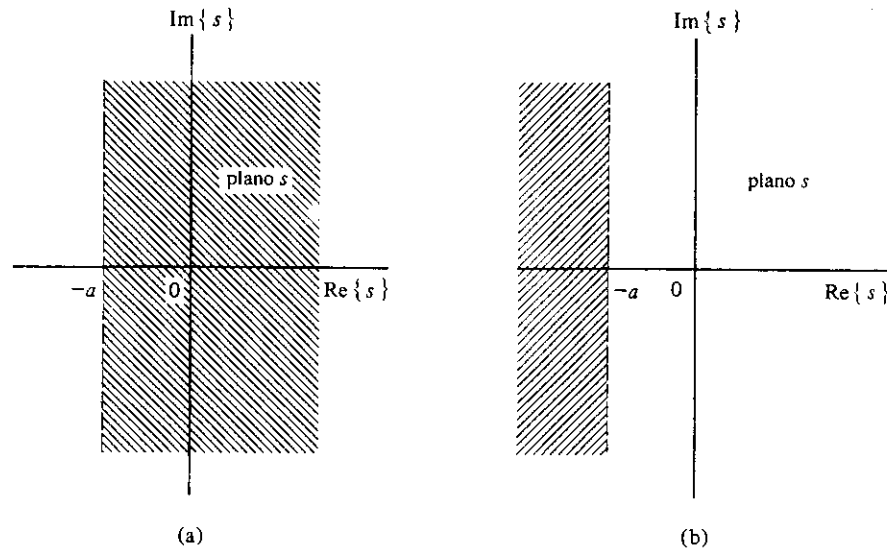


Figura 5.2.1. Representación en el plano s de la transformada bilateral de Laplace.

La región de convergencia nos proporciona también información acerca de si $x(t)$ posee transformada de Fourier o no. Como la transformada de Fourier se puede obtener a partir de la transformada bilateral de Laplace haciendo $\sigma = 0$, la región de convergencia en este caso es una sola línea (el eje $j\omega$). Por lo tanto, si la región de convergencia de $X_B(t)$ contiene al eje $j\omega$, $x(t)$ tendrá transformada de Fourier, y se podrá obtener $X_B(\omega)$ sustituyendo s por $j\omega$ en la expresión de $X_B(s)$.

Ejemplo 5.2.3 Consideremos la suma de dos exponenciales reales:

$$x(t) = 3 \exp[-2t]u(t) + 4 \exp[t]u(-t)$$

Nótese que para las señales que existen para tiempos positivos y negativos el comportamiento de la señal para tiempos negativos pone un límite superior en los valores permitidos de $\text{Re}\{s\}$ y su comportamiento para tiempos positivos pone un límite inferior en los valores permitidos de $\text{Re}\{s\}$. Para estas señales la región de convergencia será, por tanto, una banda. La transformada bilateral de Laplace de $x(t)$ es

$$X_B(t) = \int_0^{\infty} 3 \exp[-(s+2)t] dt + \int_{-\infty}^0 4 \exp[-(s-1)t] dt$$

La primera integral converge para $\text{Re}\{s\} > -2$, la segunda integral converge para $\text{Re}\{s\} < 1$, y la expresión algebraica de la transformada bilateral de Laplace es

$$\begin{aligned}
 X_B(s) &= \frac{3}{s+2} - \frac{4}{s-1} \\
 &= \frac{-s-11}{(s+2)(s-1)}, \quad -2 < \operatorname{Re}\{s\} < 1
 \end{aligned}$$

5.3. LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

De forma similar a la Ecuación (5.2.1), podemos definir la transformada unilateral de Laplace de una señal $x(t)$:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) \exp[-st] dt \quad (5.3.1)$$

En algunos textos se utiliza $t = 0^+$ o $t = 0$ como límite inferior. Ambos límites inferiores son equivalentes si $x(t)$ no tiene una singularidad en $t = 0$. Esto es porque entonces no hay contribución al área bajo la función $x(t) \exp[-st]$ en $t = 0$, incluso aunque $x(t)$ sea discontinua en el origen.

La transformada unilateral es de particular interés cuando manejamos señales causales. No olvidemos la definición del Capítulo 2: si una señal $x(t)$ es causal, entonces $x(t) = 0$ para $t < 0$. Por tanto, si una señal es causal, la transformada bilateral $X_B(s)$ y la unilateral coinciden. En la Sección 5.2 vimos que, dada la transformada $X_B(s)$, la correspondiente función $x(t)$ no está especificada de forma única, ya que depende de la región de convergencia. Sin embargo, para señales causales, existe una única correspondencia entre la señal $x(t)$ y la transformada unilateral $X(s)$. Esto simplifica considerablemente el análisis de señales y sistemas causales. En lo que sigue, omitiremos la palabra «unilateral» y diremos simplemente que $X(s)$ es la transformada de Laplace de $x(t)$, excepto cuando no esté claro por el contexto qué tipo de transformada se está utilizando.

Ejemplo 5.3.1

En este ejemplo calcularemos la transformada unilateral de Laplace de las siguientes señales:

$$x_1(t) = A, \quad x_2(t) = \delta(t), \quad x_3(t) = \exp[j2t], \quad x_4(t) = \cos 2t, \quad x_5(t) = \sin 2t$$

Aplicando la Ecuación (5.3.1)

$$\begin{aligned}
 X_1(s) &= \int_{0^-}^{\infty} A \exp[-st] dt = \frac{A}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0 \\
 X_2(s) &= \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) \exp[-st] dt = 1, \quad \text{para todo } s \\
 X_3(s) &= \int_{0^-}^{\infty} \exp[j2t] \exp[-st] dt \\
 &= \frac{1}{s - j2} \\
 &= \frac{s}{s^2 + 4} + j \frac{2}{s^2 + 4}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0
 \end{aligned}$$

Como $\cos 2t = \operatorname{Re}\{\exp[j2t]\}$ y $\operatorname{sen} 2t = \operatorname{Im}\{\exp[j2t]\}$, utilizando la linealidad de la operación de integración obtenemos

$$X_4(s) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{s-j2}\right\} = \frac{s}{s^2+4}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$X_5(s) = \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{s-j2}\right\} = \frac{2}{s^2+4}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

La Tabla 5.1. muestra algunas parejas importantes de transformadas unilaterales de Laplace. Se utilizan frecuentemente en muchas aplicaciones.

Tabla 5.1. Algunas parejas seleccionadas de transformadas unilaterales de Laplace

Señal	Transformada	Región de convergencia
1. $u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
2. $u(t) - u(t-a)$	$\frac{1 - \exp[-as]}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
3. $\delta(t)$	1	para todo s
4. $\delta(t-a)$	$\exp[-as]$	para todo s
5. $t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
6. $\exp[-at]u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
7. $t^n \exp[-at]u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
8. $\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
9. $\operatorname{sen} \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
10. $\cos^2 \omega_0 t u(t)$	$\frac{s^2 + 2\omega_0^2}{s(s^2 + 4\omega_0^2)}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
11. $\operatorname{sen}^2 \omega_0 t u(t)$	$\frac{2\omega_0^2}{s(s^2 + 4\omega_0^2)}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
12. $\exp[-at] \cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
13. $\exp[-at] \operatorname{sen} \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
14. $t \cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
15. $t \operatorname{sen} \omega_0 t u(t)$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$

5.4. CÁLCULO DE TRANSFORMADAS BILATERALES MEDIANTE TRANSFORMADAS UNILATERALES

La transformada bilateral de Laplace se puede evaluar utilizando la transformada unilateral de Laplace si expresamos $x(t)$ como la suma de dos señales. La primera señal representa el comportamiento de $x(t)$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y la segunda señal representa el comportamiento de $x(t)$ en el intervalo $[0, \infty)$. En general, cualquier señal que no tenga singularidades (funciones delta o sus derivadas) en $t = 0$ se puede escribir como la suma de una componente causal $x_+(t)$ y una componente no causal $x_-(t)$. Es decir,

$$x(t) = x_+(t)u(t) + x_-(t)u(-t) \quad (5.4.1)$$

Tomando la transformada bilateral de Laplace en ambos miembros tenemos:

$$X_B(s) = X_+(s) + \int_{-\infty}^{0^-} x_-(t) \exp[-st] dt$$

Realizando el cambio $t = -\tau$ resulta:

$$X_B(s) = X_+(s) + \int_{0^+}^{\infty} x_-(-\tau) \exp[s\tau] d\tau$$

Si $x(t)$ no tiene singularidades en $t = 0$, el límite inferior del segundo término se puede sustituir por 0^- , y la transformada bilateral de Laplace es

$$X_B(s) = X_+(s) + \mathcal{L}\{x_-(-t)u(t)\}_{s \rightarrow -s} \quad (5.4.2)$$

Donde $\mathcal{L}\{\cdot\}$ indica transformada unilateral de Laplace. Nótese que si $x_-(-t)u(t)$ tiene una región de convergencia definida por $\text{Re}\{s\} > \sigma$, entonces $x_-(t)u(-t)$ debe tener la región de convergencia definida por $\text{Re}\{s\} < -\sigma$.

Ejemplo 5.4.1 La transformada bilateral de Laplace de la señal $x(t) = \exp[at]u(-t)$, $a > 0$ es

$$\begin{aligned} X_B(s) &= \mathcal{L}\{\exp[-at]u(t)\}_{s \rightarrow -s} \\ &= \left(\frac{1}{s+a}\right)_{s \rightarrow -s} = \frac{-1}{s-a}, \quad \text{Re}\{s\} < a \end{aligned}$$

Nótese que la transformada unilateral de Laplace de $\exp[at]u(-t)$ es cero.

Ejemplo 5.4.2 De acuerdo a la Ecuación (5.4.2) la transformada bilateral de Laplace de

$$x(t) = A \exp[-at]u(t) + Bt^2 \exp[-bt]u(-t), \quad a, b > 0$$

o

$$\begin{aligned} X_B(s) &= \frac{A}{s+a} + \mathcal{L}\{B(-t)^2 \exp[bt]u(t)\}_{s \rightarrow -s} \\ &= \frac{A}{s+a} + \left(B \frac{2!}{(s-b)^3}\right)_{s \rightarrow -s}, \quad \text{Re}\{s\} > -a \cap \text{Re}\{s\} < -b \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{s+a} - \frac{2B}{(s+b)^3}, \quad -a < \operatorname{Re}\{s\} < -b$$

donde $\mathcal{L}\{B(-t)^2 \exp[bt]u(t)\}$ está en la fila 7 de la Tabla 5.1.

No todas las señales tienen transformada bilateral de Laplace. Por ejemplo, la exponencial periódica $\exp[j\omega_0 t]$ no tiene transformada bilateral de Laplace ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B\{\exp[j\omega_0 t]\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(s - j\omega_0)t] dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \exp[-(s - j\omega_0)t] dt + \int_0^{\infty} \exp[-(s - j\omega_0)t] dt \end{aligned}$$

Para que la primera integral converja, es necesario que $\operatorname{Re}\{s\} < 0$, y para que la segunda integral converja es necesario que $\operatorname{Re}\{s\} > 0$. Las dos restricciones son contradictorias, por lo que la transformada no converge para ningún valor de s .

En el resto de este capítulo, centraremos nuestra atención en la transformada unilateral de Laplace, que denominaremos simplemente transformada de Laplace.

5.5. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Hay varias propiedades útiles de la transformada unilateral de Laplace que permiten resolver algunos problemas por simple inspección. En esta sección resumiremos muchas de estas propiedades, que pueden ser más o menos obvias para el lector. Utilizando estas propiedades se pueden obtener muchas de las parejas de transformadas que se presentan en la Tabla 5.1. Presentaremos algunas de estas propiedades y daremos ideas sobre sus demostraciones.

5.5.1. Linealidad

Si

$$\begin{aligned} x_1(t) &\leftrightarrow X_1(s) \\ x_2(t) &\leftrightarrow X_2(s) \end{aligned}$$

entonces

$$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s) \quad (5.5.1)$$

donde a y b son constantes arbitrarias. Esta propiedad es el resultado directo de la linealidad de la operación de integración y se puede extender fácilmente a cualquier número de componentes. Simplemente indica que la transformada de Laplace de una combinación lineal de un número arbitrario de señales es la misma combinación lineal de las transformadas de cada una de las señales. La región de convergencia asociada a una combinación lineal de términos es la intersección de las regiones de convergencia de cada uno de los términos.

Ejemplo 5.5.1 Supongamos que deseamos encontrar la transformada de Laplace de

$$(A + B \exp[-bt])u(t)$$

Observando la Tabla 5.1 encontramos la pareja de transformadas

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \text{y} \quad \exp[-bt]u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+b}$$

Por tanto, aplicando la propiedad de linealidad, obtenemos la pareja de transformadas:

$$Au(t) + B \exp[-bt]u(t) \leftrightarrow \frac{A}{s} + \frac{B}{s+b} = \frac{(A+B)s + Ab}{s(s+b)}$$

La región de convergencia es la intersección de $\operatorname{Re}\{s\} > -b$ y $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, por lo que está definida por $\operatorname{Re}\{s\} > \max(-b, 0)$.

5.5.2. Desplazamiento temporal

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$, entonces, para cualquier número real positivo t_0 ,

$$x(t - t_0)u(t - t_0) \leftrightarrow \exp[-t_0s]X(s) \quad (5.5.2)$$

La señal $x(t - t_0)u(t - t_0)$ corresponde a un desplazamiento a la derecha de t_0 de la señal $x(t)u(t)$. Por lo tanto, un desplazamiento temporal a la derecha corresponde a una multiplicación por $\exp[-t_0s]$ en el dominio de la transformada de Laplace. La demostración se sigue de la Ecuación (5.3.1), sustituyendo $x(t)$ por $x(t - t_0)u(t - t_0)$, con lo que se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t - t_0)u(t - t_0)\} &= \int_{0^-}^{\infty} x(t - t_0)u(t - t_0) \exp[-st] dt \\ &= \int_{t_0^-}^{\infty} x(t - t_0) \exp[-st] dt \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variables $t = \tau + t_0$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t - t_0)u(t - t_0)\} &= \int_{0^-}^{\infty} x(\tau) \exp[-s(\tau + t_0)] d\tau \\ &= \exp[-t_0s] \int_{0^-}^{\infty} x(\tau) \exp[-s\tau] d\tau \\ &= \exp[-t_0s]X(s) \end{aligned}$$

Nótese que todos los valores de la región de convergencia de $x(t)$ pertenecen también a la región de convergencia de $x(t - t_0)$. Por tanto, la región de convergencia asociada a $x(t - t_0)$ es la misma que la región de convergencia asociada a $x(t)$.

Ejemplo 5.5.2 Consideremos el pulso rectangular $x(t) = \text{rect}((t - a)/2a)$. Esta señal se puede escribir también así:

$$\text{rect}((t - a)/2a) = u(t) - u(t - 2a)$$

Utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal, podemos encontrar la transformada de Laplace de $x(t)$:

$$X(s) = \frac{1}{s} - \exp[-2as] \frac{1}{s} = \frac{1 - \exp[-2as]}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

Resulta claro que la propiedad de desplazamiento temporal sólo es válida para desplazamientos hacia la derecha. Por ejemplo, la transformada de Laplace de $x(t + t_0)$ con $t_0 > 0$ no se puede expresar en función de la transformada de Laplace de $x(t)$. ¿Por qué?

5.5.3. Desplazamiento en el dominio s

Si

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

entonces

$$\exp[s_0 t]x(t) \leftrightarrow X(s - s_0) \quad (5.5.3)$$

La demostración se desprende directamente de la definición de transformada de Laplace. Como la nueva transformada es una versión desplazada de $X(s)$, para cualquier valor de s que esté en la región de convergencia de $x(t)$, los valores $s + \text{Re}\{s_0\}$ están en la región de convergencia de $\exp[s_0 t]x(t)$.

Ejemplo 5.5.3 Utilizando la fila 8 de la Tabla 5.1 y la Ecuación (5.5.3), la transformada de Laplace de

$$x(t) = A \exp[-at] \cos(\omega_0 t + \theta) u(t)$$

es

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}\{A \exp[-at](\cos \omega_0 t \cos \theta - \sin \omega_0 t \sin \theta)u(t)\} \\ &= \mathcal{L}\{A \exp[-at] \cos \omega_0 t \cos \theta u(t)\} - \mathcal{L}\{A \exp[-at] \sin \omega_0 t \sin \theta u(t)\} \\ &= \frac{A(s + a) \cos \theta}{(s + a)^2 + \omega_0^2} - \frac{A \omega_0 \sin \theta}{(s + a)^2 + \omega_0^2} \\ &= \frac{A[(s + a) \cos \theta - \omega_0 \sin \theta]}{(s + a)^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}\{s\} > -a \end{aligned}$$

5.5.4. Escalado temporal

Si

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{Re}\{s\} > \sigma_1$$

entonces para cualquier número real positivo α ,

$$x(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{s}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re}\{s\} > \alpha\sigma_1 \quad (5.5.4)$$

La demostración es directa aplicando la definición de transformada de Laplace y realizando un cambio adecuado de variables.

Además del factor de amplitud de $1/\alpha$, el escalado lineal en el dominio del tiempo por un factor de α corresponde a un escalado lineal en el plano s por un factor de $1/\alpha$. Además, dado un valor de s en la región de convergencia de $x(t)$ el valor de s/α está en la región de convergencia de $x(\alpha t)$. Es decir, la región de convergencia de $x(\alpha t)$ es una versión comprimida ($\alpha > 1$) o expandida ($\alpha < 1$) de la región de convergencia de $x(t)$.

Ejemplo 5.5.4

Consideremos la versión escalada en el tiempo de la señal escalón unidad $u(\alpha t)$, donde α es un entero positivo arbitrario. La transformada de Laplace de $u(\alpha t)$ es

$$\mathcal{L}\{u(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{s/\alpha} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

El resultado era de esperar, ya que $u(\alpha t) = u(t)$ para $\alpha > 0$.

5.5.5. Diferenciación en el dominio del tiempo

Si

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

entonces

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0^-) \quad (5.5.5)$$

La demostración de esta propiedad se obtiene calculando la transformada de $dx(t)/dt$. Esta transformada es

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \exp[-st] dt$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \exp[-st]x(t) \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)(-s) \exp[-st] dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\exp[-st]x(t)] - x(0^-) + sX(s) \end{aligned}$$

La hipótesis de que $X(s)$ existe implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\exp[-st]x(t)] = 0$$

para valores de s en la región de convergencia. Por tanto,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-)$$

Así, la diferenciación en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación por s en el dominio s . Esta propiedad permite sustituir operaciones de cálculo por operaciones algebraicas sobre las transformadas.

La propiedad de diferenciación se puede extender:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - \dots - sx^{(n-2)}(0^-) - x^{(n-1)}(0^-) \quad (5.5.6)$$

Hablando en términos generales, la diferenciación en el dominio del tiempo es la propiedad más importante (junto con la linealidad) de la transformada de Laplace. Convierte a la transformada de Laplace en una herramienta útil en aplicaciones como la resolución de ecuaciones diferenciales. Se puede usar la transformada de Laplace para convertir cualquier ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes en una ecuación algebraica.

Como se dijo anteriormente, para el caso de transformadas de Laplace racionales, la región de convergencia no contiene polos. Si $X(s)$ tiene un polo de primer orden en $s = 0$, la multiplicación por s , como en la Ecuación (5.5.5), puede cancelar el polo produciendo una nueva región de convergencia que contiene a la de $x(t)$. Por tanto, en general, la región de convergencia de $dx(t)/dt$ normalmente contiene a la región de convergencia de $x(t)$, y puede ser mayor si $X(s)$ tiene un polo de primer orden en $s = 0$.

Ejemplo 5.5.5

La función escalón unidad $x(t) = u(t)$ tiene como transformada $X(s) = 1/s$, con región de convergencia $\text{Re}\{s\} > 0$. La derivada de $u(t)$ es la función impulso unidad, cuya transformada de Laplace es la unidad para todo s , con región de convergencia que se extiende por todo el plano s .

Ejemplo 5.5.6

Sea $x(t) = \sin^2 \omega t u(t)$, señal para la que $x(0^-) = 0$. Nótese que

$$x'(t) = 2\omega \sin \omega t \cos \omega t u(t) = \omega \sin 2\omega t u(t)$$

De la Tabla 5.1,

$$\mathcal{L}\{\sin 2\omega t u(t)\} = \frac{2\omega}{s^2 + 4\omega^2}$$

y, por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{\sin^2 \omega t u(t)\} = \frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$$

Ejemplo 5.5.7

Una de las aplicaciones importantes de la transformada de Laplace es la resolución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales especificadas. Como ejemplo, consideremos la ecuación diferencial

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0^-) = 3, \quad y'(0^-) = 1$$

Sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ la transformada de Laplace de la solución (desconocida) $y(t)$. Utilizando la propiedad de diferenciación en el dominio del tiempo tenemos,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'(t)\} &= sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 3 \\ \mathcal{L}\{y''(t)\} &= s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) = s^2Y(s) - 3s - 1\end{aligned}$$

Si tomamos la transformada de Fourier de los dos miembros de la ecuación diferencial y utilizamos las dos últimas expresiones obtenemos

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 3s + 10$$

Despejando $Y(s)$ resulta

$$Y(s) = \frac{3s + 10}{(s + 2)(s + 1)} = \frac{7}{s + 1} - \frac{4}{s + 2}$$

Utilizando la Tabla 5.1 vemos que

$$y(t) = 7 \exp[-t]u(t) - 4 \exp[-2t]u(t)$$

Ejemplo 5.5.8

Consideremos el circuito RC que se muestra en la Figura 5.5.1(a). La entrada es la señal rectangular que se muestra en la Figura 5.5.1(b). El circuito se supone inicialmente en reposo (condiciones iniciales nulas).

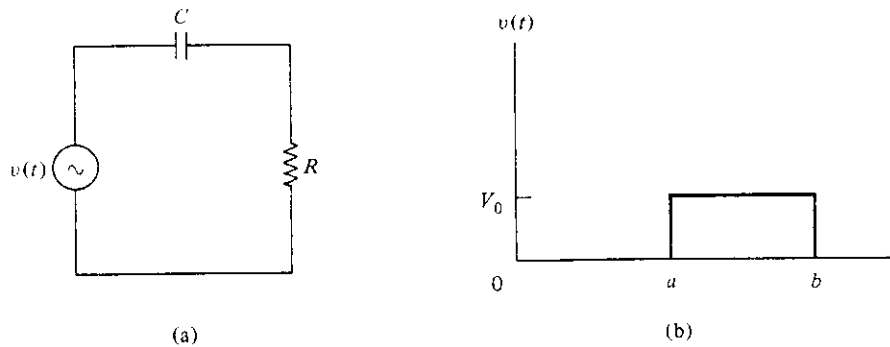


Figura 5.5.1. El circuito del Ejemplo 5.5.8.

La ecuación diferencial que gobierna el circuito es

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

La entrada $v(t)$ se puede representar mediante la función escalón unidad,

$$v(t) = V_0[u(t - a) - u(t - b)]$$

Tomando transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación diferencial obtenemos

$$RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} = \frac{V_0}{s} [\exp[-as] - \exp[-bs]]$$

Despejando $I(s)$:

$$I(s) = \frac{V_0/R}{s + 1/RC} [\exp[-as] - \exp[-sb]]$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento temporal obtenemos la corriente

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \left[\exp\left[\frac{-(t-a)}{RC}\right] u(t-a) - \exp\left[\frac{-(t-b)}{RC}\right] u(t-b) \right]$$

La Figura 5.5.2 muestra la solución.

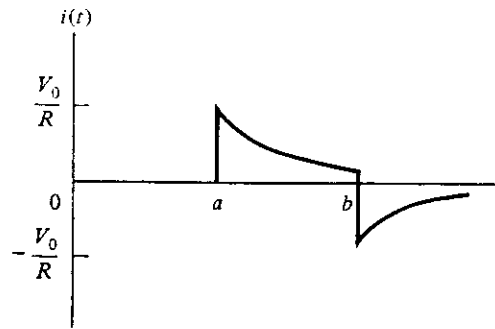


Figura 5.5.2. La señal de corriente en el Ejemplo 5.5.8.

5.5.6. Integración en el dominio del tiempo

Como la diferenciación en el dominio del tiempo corresponde a multiplicación por s en el dominio s , se podría concluir que la integración en el dominio del tiempo debería corresponder a división por s en el dominio transformado. Esto es siempre cierto si la integral de $x(t)$ no crece más rápido que una exponencial de la forma $A \exp[-at]$, es decir, si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp[-st] \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau = 0$$

para todo s tal que $\text{Re}\{s\} > a$.

La propiedad de integración se puede enunciar como sigue: dada una señal causal $x(t)$, si

$$y(t) = \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$$

entonces

$$Y(s) = \frac{1}{s} X(s) \quad (5.5.7)$$

Para demostrar este resultado, empezaremos con

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) \exp[-st] dt$$

Dividiendo ambos miembros por s obtenemos

$$\frac{X(s)}{s} = \int_{0^-}^{\infty} x(t) \frac{\exp[-st]}{s} dt$$

Integrando por partes el lado derecho resulta

$$\frac{X(s)}{s} = y(t) \frac{\exp[-st]}{s} \Big|_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} y(t) \exp[-st] dt$$

El primer término del lado derecho vale cero en ambos límites [en el límite superior por hipótesis, y en el límite inferior porque $y(0^-) = 0$], por tanto,

$$\frac{X(s)}{s} = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

La integración en el dominio del tiempo equivale entonces a dividir por s en el dominio de la frecuencia. Las propiedades de integración y diferenciación en el dominio del tiempo son dos de las más utilizadas en la transformada de Laplace. Se pueden emplear para convertir las operaciones de integración y de diferenciación en división y multiplicación por s , respectivamente, que son operaciones algebraicas y, por lo tanto, más sencillas de realizar.

5.5.7. Diferenciación en el dominio s

Si derivamos los dos miembros de la Ecuación (5.3.1) con respecto a s tenemos

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{0^-}^{\infty} (-t)x(t) \exp[-st] dt$$

En consecuencia,

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad (5.5.8)$$

Como la diferenciación de $X(s)$ no añade nuevos polos (aunque puede aumentar el orden de algunos polos existentes), la región de convergencia de $-tx(t)$ será la misma que la de $x(t)$.

Aplicando repetidamente la Ecuación (5.5.8) tenemos que

$$(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n} \quad (5.5.9)$$

Ejemplo 5.5.9 La transformada de Laplace de la función rampa unidad $r(t) = tu(t)$ se puede obtener utilizando la Ecuación (5.5.8)

$$\begin{aligned} R(s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{u(t)\} \\ &= -\frac{d}{ds} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Aplicando la Ecuación (5.5.9) tenemos, en general,

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (5.5.10)$$

5.5.8. Modulación

Si

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

entonces para cualquier número real ω_0 ,

$$x(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(s + j\omega_0) + X(s - j\omega_0)] \quad (5.5.11)$$

$$x(t) \sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{j}{2} [X(s + j\omega_0) - X(s - j\omega_0)] \quad (5.5.12)$$

La demostración utiliza la fórmula de Euler:

$$\exp[j\omega_0 t] = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

y la aplicación de la propiedad de desplazamiento en el dominio s .

Ejemplo 5.5.10 La transformada de Laplace de $(\cos \omega_0 t)u(t)$ se obtiene a partir de la transformada de Laplace de $u(t)$ utilizando la propiedad de modulación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(\cos \omega_0 t)u(t)\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s + j\omega_0} + \frac{1}{s - j\omega_0} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

Análogamente, la transformada de Laplace de $\exp[-at] \sin \omega_0 t u(t)$ se puede obtener a partir de la transformada de Laplace de $\exp[-at] u(t)$ aplicando la propiedad de modulación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\exp[-at](\sin \omega_0 t)u(t)\} &= \frac{j}{2} \left(\frac{1}{s + j\omega_0 + a} - \frac{1}{s - j\omega_0 + a} \right) \\ &= \frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

5.5.9. Convolución

Esta propiedad es una de las más ampliamente utilizadas en el estudio y análisis de sistemas lineales. Su uso simplifica la complejidad de la integral de convolución reduciéndola a una simple multiplicación. La propiedad de convolución dice:

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

$$h(t) \leftrightarrow H(s)$$

entonces

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow X(s)H(s) \quad (5.5.13)$$

donde la convolución de $x(t)$ y $h(t)$ es

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

Tanto $h(t)$ como $x(t)$ son señales causales, por lo que la convolución en este caso se puede reducir a

$$x(t) * h(t) = \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

Tomando transformada de Laplace en ambos miembros se obtiene la pareja de transformadas

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \right] \exp[-st] dt$$

Intercambiando el orden de las integrales obtenemos

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow \int_{0^-}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{0^-}^{\infty} h(t - \tau) \exp[-st] dt \right] d\tau$$

Realizando el cambio de variables $\mu = t - \tau$ en la segunda integral y teniendo en cuenta que $h(\mu) = 0$ para $\mu < 0$ resulta

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow \int_{0^-}^{\infty} x(\tau) \exp[-s\tau] \left[\int_{0^-}^{\infty} h(\mu) \exp[-s\mu] d\mu \right] d\tau$$

o

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow X(s)H(s)$$

La región de convergencia del producto $X(s)H(s)$ es la intersección de las regiones de convergencia de $X(s)$ y $H(s)$. Sin embargo, debido a la multiplicación, pueden suceder cancelaciones polo-cero, y la región de convergencia que resulta puede ser mayor que la intersección de ambas regiones. En general, la región de convergencia de $X(s)H(s)$ incluye a la intersección de las regiones de convergencia de $X(s)$ y $H(s)$, y puede ser mayor si en el proceso de multiplicación de las transformadas ocurren cancelaciones polo-cero.

Ejemplo 5.5.11 Se puede demostrar la propiedad de integración utilizando la propiedad de convolución, ya que

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

Por lo tanto, la transformada de la integral de $x(t)$ es el producto de $X(s)$ y la transformada de $u(t)$, que es $1/s$.

Ejemplo 5.5.12 Sea $x(t)$ el pulso rectangular $\text{rect}((t-a)/2a)$ centrado en $t=a$ con anchura $2a$. La convolución de este pulso consigo mismo se puede obtener fácilmente con la ayuda de la propiedad de convolución.

En el Ejemplo 5.5.2 la transformada de $x(t)$ es

$$X(s) = \frac{1 - \exp[-2as]}{s}$$

La transformada de la convolución es

$$\begin{aligned} Y(s) = X^2(s) &= \left[\frac{1 - \exp[-2as]}{s} \right]^2 \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{2 \exp[-2as]}{s^2} + \frac{\exp[-4as]}{s^2} \end{aligned}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de ambos miembros y teniendo en cuenta que $1/s^2$ es la transformada de $tu(t)$ resulta

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * x(t) &= tu(t) - 2(t-2a)u(t-2a) + (t-4a)u(t-4a) \\ &= r(t) - 2r(t-2a) + r(t-4a) \end{aligned}$$

La señal se muestra en la Figura 5.5.3 y es un pulso triangular, como era de esperar.

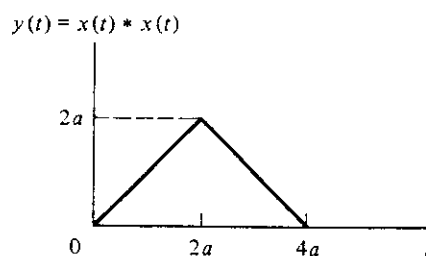


Figura 5.5.3. Convolución de dos señales rectangulares.

En la Ecuación (5.5.13), $H(s)$ se denomina función de transferencia del sistema cuya respuesta al impulso es $h(t)$. Esta función es la representación en el dominio s del sistema LTI y describe la «transferencia» en el dominio s desde la entrada $X(s)$ a la salida $Y(s)$, suponiendo que la energía inicial del sistema en $t = 0^-$ es cero. Dividiendo los dos miembros de la Ecuación (5.5.13) por $X(s)$, suponiendo que $X(s) \neq 0$ resulta

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (5.5.14)$$

Es decir, la función de transferencia es igual al cociente de la transformadas de la salida $Y(s)$ y de la entrada $X(s)$. La Ecuación (5.5.14) nos permite determinar la respuesta al impulso del sistema a partir del conocimiento de la respuesta $y(t)$ a una entrada $x(t)$ distinta de cero.

Ejemplo 5.5.13 Supongamos que se aplica la entrada $x(t) = \exp[-2t]u(t)$ se aplica a un sistema LTI en reposo (con condiciones iniciales nulas). La salida del sistema es

$$y(t) = \frac{2}{3} (\exp[-t] + \exp[-2t] - \exp[-3t])u(t)$$

Entonces

$$X(s) = \frac{1}{s+2}$$

y

$$Y(s) = \frac{2}{3(s+1)} + \frac{2}{3(s+2)} - \frac{2}{3(s+3)}$$

Utilizando la Ecuación (5.5.14) concluimos que la función de transferencia $H(s)$ del sistema es

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2}{3} + \frac{2(s+2)}{3(s+1)} - \frac{2(s+2)}{3(s+3)} \\ &= \frac{2(s^2 + 6s + 7)}{3(s+1)(s+3)} \\ &= \frac{2}{3} \left[1 + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} \right] \end{aligned}$$

de lo que se sigue que

$$h(t) = \frac{2}{3} \delta(t) + \frac{2}{3} [\exp[-t] + \exp[-3t]]u(t)$$

Ejemplo 5.5.14 Consideremos el sistema LTI definido por la ecuación diferencial

$$y'''(t) + 2y''(t) - y'(t) + 5y(t) = 3x'(t) + x(t)$$

Suponiendo que el sistema está inicialmente en estado de reposo, y tomando transformada de Laplace en ambos miembros, obtenemos

$$s^3 Y(s) + 2s^2 Y(s) - sY(s) + 5Y(s) = 3sX(s) + X(s)$$

Calculando $H(s) = Y(s)/X(s)$ resulta

$$H(s) = \frac{3s+1}{s^3 + 2s^2 - s + 5}$$

5.5.10. Teorema del valor inicial

Sea $x(t)$ una función infinitamente diferenciable en un intervalo alrededor de $x(0^+)$ (intervalo infinitesimal). Entonces:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (5.5.15)$$

La Ecuación (5.5.15) implica que el comportamiento de $x(t)$ para valores de t pequeños está determinado por el comportamiento de $X(s)$ cuando s es grande. Esto se puede ver como otro aspecto de la relación inversa existente entre los dominios del tiempo y de la frecuencia. Para establecer este resultado, desarrollamos $x(t)$ en serie de Maclaurin (serie de Taylor alrededor de $t = 0^+$), con lo que se obtiene:

$$x(t) = \left[x(0^+) + x'(0^+)t + \dots + x^{(n)}(0^+) \frac{t^n}{n!} + \dots \right] u(t)$$

siendo $x^{(n)}(0^+)$ la n -ésima derivada de $x(t)$ en $t = 0^+$. Tomando la transformada de Laplace de ambos miembros resulta

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{x(0^+)}{s} + \frac{x'(0^+)}{s^2} + \dots + \frac{x^{(n)}(0^+)}{s^{n+1}} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}(0^+) \frac{1}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

Si multiplicamos los dos miembros por s y tomamos el límite cuando $s \rightarrow \infty$ queda demostrado el teorema del valor inicial. Podemos hacer una generalización si multiplicamos por s^{n+1} y tomamos el límite cuando $s \rightarrow \infty$:

$$x^{(n)}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s^{n+1}X(s) - s^n x(0^+) - s^{n-1}x'(0^+) - \dots - sx^{(n-1)}(0^+)] \quad (5.5.16)$$

Esta forma más general del teorema del valor inicial se simplifica si $x^{(n)}(0^+) = 0$ para $n < N$. En este caso,

$$x^{(N)}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{N+1}X(s) \quad (5.5.17)$$

Esta propiedad es útil, ya que nos permite calcular el valor inicial de la señal $x(t)$ y de sus derivadas directamente a partir de la transformada de Laplace $X(s)$, sin necesidad de aplicar la transformada inversa de $x(t)$. Nótese que el lado derecho de la Ecuación (5.5.15) puede existir independientemente de la existencia de $x(0^+)$. Por lo tanto, el teorema del valor inicial sólo se debe aplicar cuando $x(0^+)$ existe. Nótese también que el teorema del valor inicial produce $x(0^+)$ y no $x(0^-)$.

Ejemplo 5.5.15 El valor inicial de una señal cuya transformada de Laplace viene dada por

$$X(s) = \frac{cs + d}{(s-a)(s-b)}, \quad a \neq b$$

es

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{cs + d}{(s-a)(s-b)} = c$$

Este resultado se puede verificar determinando en primer lugar $x(t)$ y sustituyendo después $t = 0^+$. En este ejemplo, la transformada inversa de Laplace es

$$x(t) = \frac{c}{a-b} [a \exp[at] - b \exp[bt]]u(t) + \frac{d}{a-b} [\exp[at] - \exp[bt]]u(t)$$

con lo que $x(0^+) = c$. Nótese que $x(0^-) = 0$.

5.5.11. Teorema del valor final

El teorema del valor final nos permite calcular el límite de la señal $x(t)$, cuando $t \rightarrow \infty$ a partir de su transformada de Laplace mediante la relación

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (5.5.18)$$

Este teorema es de utilidad en diversas aplicaciones, como en teoría de control, donde puede ser necesario encontrar el valor final (valor de estado estacionario) de la salida de un sistema sin conocer la función en el dominio del tiempo. La Ecuación (5.5.18) se puede demostrar utilizando la propiedad de diferenciación en el dominio del tiempo. Tenemos que

$$\int_{0^-}^{\infty} x'(t) \exp[-st] dt = sX(s) - x(0^-) \quad (5.5.19)$$

Si tomamos el límite cuando $s \rightarrow 0$ en ambos miembros de la Ecuación (5.5.19) resulta:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\infty} x'(t) \exp[-st] dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0^-)]$$

O

$$\int_{0^-}^{\infty} x'(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0^-)]$$

Suponiendo que existe $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0^-) = \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0^-)]$$

que, después de simplificar, se convierte en la Ecuación (5.5.18). Hay que tener cuidado con la utilización del teorema del valor final, ya que puede existir el $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ incluso aunque $x(t)$ no tenga límite cuando $t \rightarrow \infty$. Por tanto, es importante saber si existe $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ antes de aplicar el teorema del valor final. Por ejemplo, si

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

entonces

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} = 0$$

Pero $x(t) = \cos \omega t$, que no tiene límite cuando $t \rightarrow \infty$ (ya que oscila entre $+1$ y -1) ¿Por qué tenemos esta discrepancia? Para utilizar el teorema del valor final, es necesario que el punto $s = 0$ pertenezca a la región de convergencia de $sX(s)$ [si no, no podríamos sustituir $s = 0$ en $sX(s)$]. Hemos visto anteriormente que en el caso de transformadas de Laplace racionales, la región de convergencia no contiene polos. Por lo tanto, para utilizar el teorema del valor final, todos los polos de $sX(s)$ deben estar en el lado izquierdo del plano s . En nuestro ejemplo, $sX(s)$ tiene dos polos en el eje imaginario.

Ejemplo 5.5.16 La entrada $x(t) = Au(t)$ se aplica a un sistema de control automático de posición cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{c}{s(s+b)+c}$$

El valor final de la salida $y(t)$ se obtiene como

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)H(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{A}{s} \frac{c}{s(s+b)+c} \right] \\ &= A \end{aligned}$$

suponiendo que todos los ceros de $s^2 + bs + c$ están en el semiplano izquierdo. Por tanto, tras un intervalo de tiempo suficientemente grande, la salida sigue a la entrada $x(t)$.

Ejemplo 5.5.17 Supongamos que estamos interesados en el valor de la integral

$$\int_{0^-}^{\infty} t^n \exp[-at] dt$$

Consideremos la integral

$$y(t) = \int_{0^-}^t \tau^n \exp[-a\tau] d\tau = \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$$

Nótese que la cantidad de interés es el valor final de $y(t)$. Es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} X(s)$$

De la Tabla 5.1,

$$X(s) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

Por lo tanto,

$$\int_{0^-}^{\infty} t^n \exp[-at] dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

La Tabla 5.2 resume las propiedades de la transformada de Laplace. Estas propiedades, junto con las parejas de transformadas de la Tabla 5.1, se pueden utilizar para obtener nuevas parejas de transformadas.

Tabla 5.2. Algunas propiedades seleccionadas de la transformada de Laplace

1. Linealidad	$\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t)$	$\sum_{n=1}^N \alpha_n X_n(s)$	(5.5.1)
2. Desplazamiento	$x(t - t_0)u(t - t_0)$	$X(s)\exp(-st_0)$	(5.5.2)
3. Desplazamiento en frecuencia	$\exp(s_0 t)x(t)$	$X(s - s_0)$	(5.5.3)
4. Escalado temporal	$x(\alpha t), \alpha > 0$	$1/\alpha X(s/\alpha)$	(5.5.4)
5. Diferenciación	$dx(t)/dt$	$sX(s) - x(0^-)$	(5.5.5)
6. Integración	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	(5.5.7)
7. Multiplicación por t	$tx(t)$	$-\frac{dX(s)}{ds}$	(5.5.8)
8. Modulación	$x(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2} [X(s - j\omega_0) + X(s + j\omega_0)]$	(5.5.11)
	$x(t)\sin\omega_0 t$	$\frac{1}{2j} [X(s - j\omega_0) - X(s + j\omega_0)]$	(5.5.12)
9. Convolución	$x(t) * h(t)$	$X(s)H(s)$	(5.5.13)
10. Valor inicial	$x(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$	(5.5.15)
11. Valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$	(5.5.18)

5.6. LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Vimos en la Sección 5.2 que si la variable $s = \sigma + j\omega$ cumple que $\text{Re}\{s\}$ está en el interior de la región de convergencia, la transformada de Laplace de $x(t)$ se puede interpretar como la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ ponderada exponencialmente, es decir, $x(t)\exp[-\sigma t]$. Es decir,

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp[-\sigma t]\exp[-j\omega t] dt$$

Utilizando la transformada inversa de Fourier dada en la Ecuación (4.2.5) podemos obtener la señal $x(t)\exp[-\sigma t]$:

$$x(t)\exp[-\sigma t] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)\exp[j\omega t] d\omega$$

Multiplicando por $\exp[\sigma t]$ obtenemos,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)\exp[(\sigma + j\omega)t] d\omega$$

Utilizando el cambio de variables $s = \sigma + j\omega$, resulta la ecuación de la transformada inversa de Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) \exp[st] ds \quad (5.6.1)$$

La integral de la Ecuación (5.6.1) se evalúa en la recta del plano complejo $\sigma + j\omega$ desde $\sigma - j\infty$ hasta $\sigma + j\infty$, siendo σ un número real fijo que cumpla que $\text{Re}\{s\} = \sigma$ esté en el interior de la región de convergencia de $X(s)$. Por lo tanto, la integral se evalúa en una recta paralela al eje imaginario a una distancia σ del mismo.

Para realizar la integral de la Ecuación (5.6.1) es necesario utilizar integración de contorno en el plano complejo, lo que no sólo es difícil, sino que está fuera de los objetivos de este libro. Por tanto, evitaremos la utilización de la Ecuación (5.6.1) para calcular transformadas inversas de Laplace. En muchos casos de interés, la transformada de Laplace se puede expresar de la siguiente forma:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (5.6.2)$$

siendo $N(s)$ y $D(s)$ polinomios en s dados por

$$\begin{aligned} N(s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \\ D(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_n \neq 0 \end{aligned}$$

La función $X(s)$ definida en la Ecuación (5.6.2) es una función racional de s , ya que es un cociente de dos polinomios. Supondremos que $m < n$, es decir, que el grado de $N(s)$ es estrictamente menor que el grado de $D(s)$. En este caso, la función racional es propia en s . Si $m = n$, es decir, cuando la función racional es impropia, podemos dividir los polinomios para obtener una función racional propia. En el caso de funciones racionales propias, se puede determinar la transformada inversa de Laplace utilizando técnicas de descomposición en fracciones simples. Realmente, esto ya lo hemos hecho en casos simples sin dificultad. El apéndice D está dedicado a la descomposición en fracciones simples. Nuestra recomendación es que el lector que no esté familiarizado con este tipo de descomposición revise dicho apéndice antes de estudiar los ejemplos que siguen.

Ejemplo 5.6.1 Obtener la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{2s + 1}{(s^3 + 3s^2 - 4s)}$$

Factorizamos el polinomio $D(s) = s^3 + 3s^2 - 4s$ y utilizamos descomposición en fracciones simples:

$$X(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 4} + \frac{A_3}{s - 1}$$

Utilizando la Ecuación (D.2) podemos obtener los coeficientes A_i , $i = 1, 2, 3$:

$$A_1 = -\frac{1}{4}$$

$$A_2 = \frac{7}{20}$$

$$A_3 = \frac{3}{5}$$

y la transformada inversa de Laplace es

$$x(t) = -\frac{1}{4}u(t) + \frac{7}{20}\exp[-4t]u(t) + \frac{3}{5}\exp[t]u(t)$$

Ejemplo 5.6.2

En este ejemplo, consideraremos el caso de factores repetidos. Supongamos que la expresión de la transformada de Laplace es

$$X(s) = \frac{2s^2 - 3s}{s^3 - 4s^2 + 5s - 2}$$

El denominador $D(s) = s^3 - 4s^2 + 5s - 2$ se puede factorizar así:

$$D(s) = (s - 2)(s - 1)^2$$

Como tenemos un factor repetido de orden 2, la forma correspondiente de la descomposición en fracciones simples es

$$X(s) = \frac{B}{s - 2} + \frac{A_2}{(s - 1)^2} + \frac{A_1}{s - 1}$$

El coeficiente B se puede obtener aplicando la Ecuación (D.2),

$$B = 2$$

Los coeficientes A_i , $i = 1, 2$ se obtienen aplicando las Ecuaciones (D.3) y (D.4):

$$A_2 = 1$$

y

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{d}{ds} \left(\frac{2s^2 - 3s}{s - 2} \right) \Big|_{s=1} \\ &= \frac{(s - 2)(4s - 3) - (2s^2 - 3s)}{(s - 2)^2} \Big|_{s=1} = 0 \end{aligned}$$

de forma que

$$X(s) = \frac{2}{s - 2} + \frac{1}{(s - 1)^2}$$

Por tanto, la transformada inversa de Laplace es

$$x(t) = 2\exp[2t]u(t) + t\exp[t]u(t)$$

Ejemplo 5.6.3 En este ejemplo consideraremos el caso de polos complejos conjugados (factores de segundo grado irreducibles). Sea

$$X(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 4s + 13}$$

Como no podemos factorizar el denominador, completamos el cuadrado:

$$D(s) = (s + 2)^2 + 3^2$$

entonces

$$X(s) = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 3^2} + \frac{1}{(s + 2)^2 + 3^2}$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento de la transformada, o bien las filas 12 y 13 de la Tabla 5.1, podemos encontrar la transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = \exp[-2t](\cos 3t)u(t) + \frac{1}{3} \exp[-2t](\sin 3t)u(t)$$

Ejemplo 5.6.4 Consideremos otro ejemplo de polos complejos conjugados. Sea la función racional

$$X(s) = \frac{5s^3 - 3s^2 + 7s - 3}{(s^2 + 1)^2}$$

Si escribimos $X(s)$ mediante la descomposición en fracciones simples, tenemos que

$$X(s) = \frac{A_1 s + B_1}{s^2 + 1} + \frac{A_2 s + B_2}{(s^2 + 1)^2}$$

y, por lo tanto,

$$5s^3 - 3s^2 + 7s - 3 = (A_1 s + B_1)(s^2 + 1) + A_2 s + B_2$$

Comparando los coeficientes de las diferentes potencias de s obtenemos

$$A_1 = 5, \quad B_1 = -3, \quad A_2 = 2, \quad B_2 = 0$$

Por lo tanto,

$$X(s) = \frac{5s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1} + \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

y la transformada inversa de Laplace se puede determinar utilizando la Tabla 5.1:

$$x(t) = (5 \cos t - 3 \sin t + t \sin t)u(t)$$

5.7. DIAGRAMAS DE SIMULACIÓN PARA SISTEMAS EN TIEMPO CONTINUO

En la Sección 2.5.3, presentamos dos formas canónicas para simular (realizar) sistemas LTI y demostramos que como la simulación es básicamente un problema de síntesis, existen varias formas equivalentes de simular los sistemas LTI. Consideremos un sistema de orden N descrito por la ecuación diferencial

$$\left(D^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i D^i\right)y(t) = \left(\sum_{i=0}^M b_i D^i\right)x(t) \quad (5.7.1)$$

Suponiendo que el sistema está inicialmente en reposo, y tomando la transformada de Laplace de ambos miembros de la ecuación obtenemos

$$\left(s^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i s^i\right)Y(s) = \left(\sum_{i=0}^M b_i s^i\right)X(s) \quad (5.7.2)$$

Si despejamos $Y(s)/X(s)$, obtenemos la función de transferencia del sistema

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i s^i}{s^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i s^i} \quad (5.7.3)$$

Suponiendo que $N = M$, podemos expresar la Ecuación (5.7.2) de la siguiente forma:

$$s^N[Y(s) - b_N X(s)] + s^{N-1}[a_{N-1}Y(s) - b_{N-1}X(s)] + \dots + a_0 Y(s) - b_0 X(s) = 0$$

Dividiendo por s^N y despejando $Y(s)$:

$$\begin{aligned} Y(s) &= b_N X(s) + \frac{1}{s} [b_{N-1} X(s) - a_{N-1} Y(s)] + \dots + \\ &+ \frac{1}{s^{N-1}} [b_1 X(s) - a_1 Y(s)] + \frac{1}{s^N} [b_0 X(s) - a_0 Y(s)] \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

Por tanto, $Y(s)$ se puede generar sumando los componentes del lado derecho de la Ecuación (5.7.4). La Figura 5.7.1 muestra cómo se simula $H(s)$ mediante esta técnica. Nótese que esta figura es similar a la Figura 2.5.4, excepto por que los integradores han sido sustituidos por su función de transferencia $1/s$.

La función de transferencia de la Ecuación (5.7.3) se puede realizar también en segunda forma canónica si expresamos la Ecuación (5.7.2) así:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\sum_{i=0}^M b_i s^i}{s^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i s^i} X(s) \\ &= \left(\sum_{i=0}^M b_i s^i\right) V(s) \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

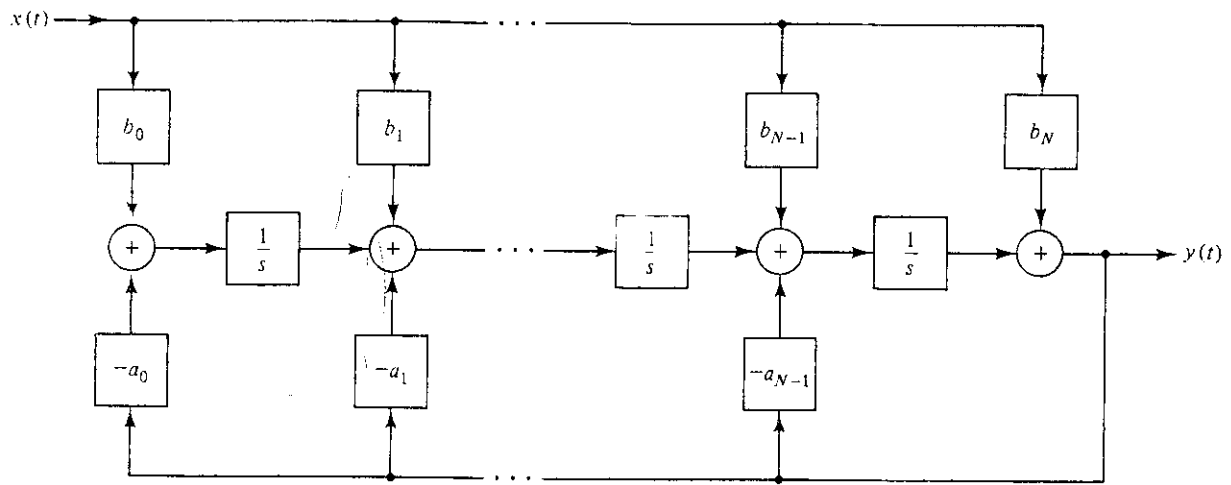


Figura 5.7.1. Diagrama de simulación utilizando la primera forma canónica.

donde

$$V(s) = \frac{1}{s^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i s^i} X(s) \quad (5.7.6)$$

o

$$\left(s^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i s^i \right) V(s) = X(s) \quad (5.7.7)$$

Por lo tanto, $Y(s)$ puede ser generada en dos pasos: primero, generamos $V(s)$ utilizando la Ecuación (5.7.7), y después, utilizando la Ecuación (5.7.5), generamos $Y(s)$ a partir de $V(s)$. El resultado se muestra en la Figura 5.7.2. Observamos que esta figura es similar a la Figura 2.5.5, excepto por que los integradores se han sustituido por su función de transferencia $1/s$.

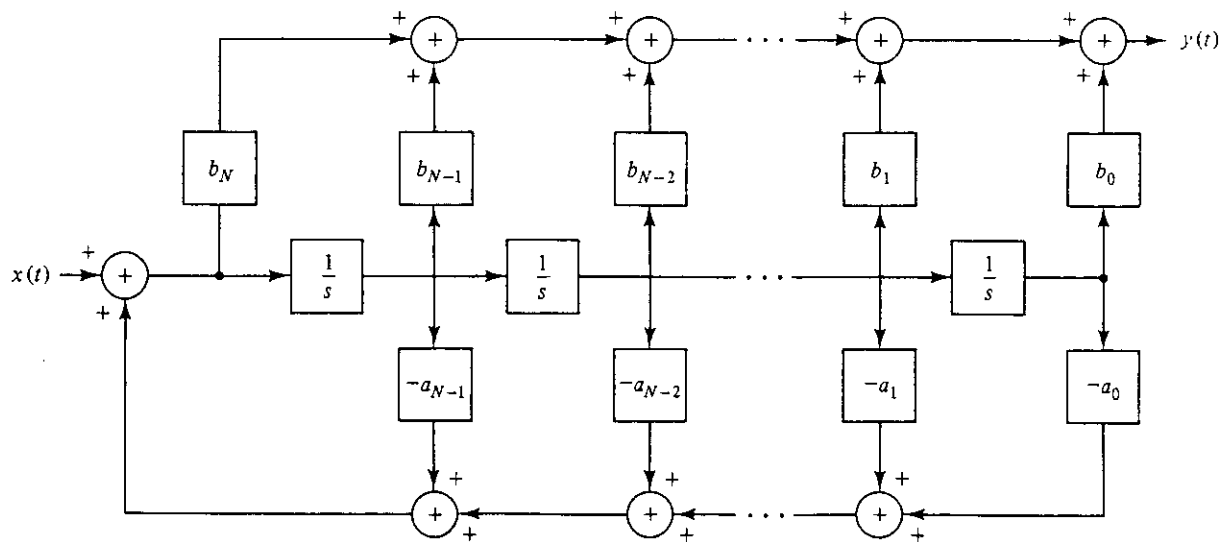


Figura 5.7.2. Diagrama de simulación utilizando la segunda forma canónica.

Ejemplo 5.7.1 Las dos realizaciones canónicas del sistema cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{s^2 - 3s + 2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

se muestran en las Figuras 5.7.3 y 5.7.4.

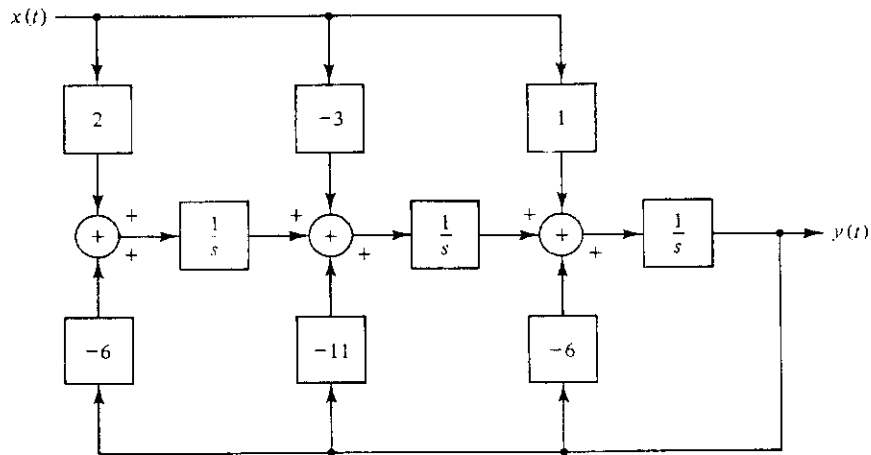


Figura 5.7.3. Diagrama de simulación del Ejemplo 5.7.1 utilizando la primera forma canónica.

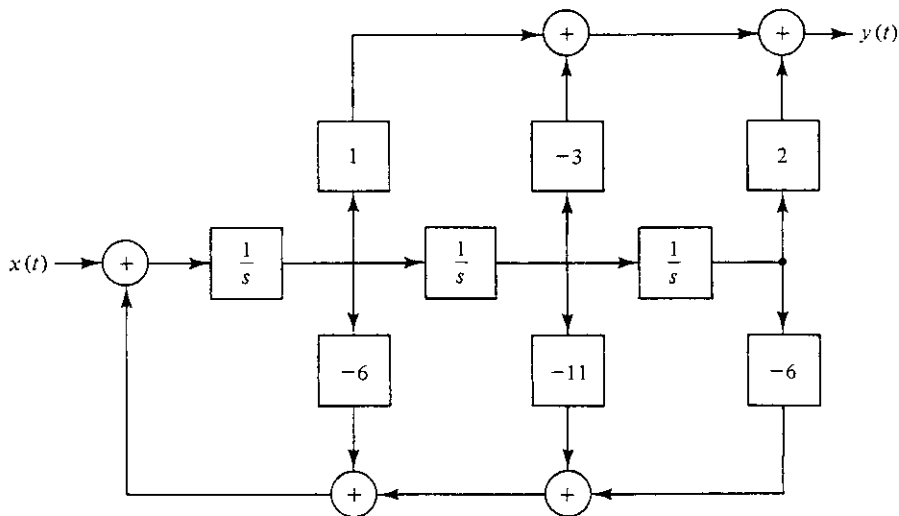


Figura 5.7.4. Diagrama de simulación del Ejemplo 5.7.1 utilizando la segunda forma canónica.

Como vimos anteriormente, la transformada de Laplace es una herramienta de utilidad para calcular la función de transferencia de los sistemas que se puedan describir me-

dianete ecuaciones diferenciales, o de los sistemas en los que la salida se puede expresar explícitamente en función de la entrada. La situación cambia considerablemente cuando un gran número de componentes o de elementos se interconectan para formar el sistema completo. En estos casos, es conveniente representar el sistema mediante subsistemas interconectados adecuadamente, y analizar cada uno de ellos por separado de forma más sencilla. Tres de los subsistemas más sencillos son la interconexión en serie (o cascada), en paralelo y la realimentación.

En el caso de interconexiones en cascada, como se muestra en la Figura 5.7.5,

$$Y_1(s) = H_1(s)X(s)$$

y

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= H_2(s)Y_1(s) \\ &= [H_2(s)H_1(s)]X(s) \end{aligned}$$

lo que demuestra que la función de transferencia total es

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad (5.7.8)$$

Nótese que la Ecuación (5.7.8) sólo es válida si no existe energía inicial en los sistemas. Implica también que la conexión del segundo sistema al primero no altera la salida de este último. Es decir, la función de transferencia del primer subsistema, $H_1(s)$ se calcula bajo la hipótesis de que el segundo sistema, con función de transferencia $H_2(s)$ no está conectado. En otras palabras, la relación entrada/salida del primer subsistema no cambia, esté $H_2(s)$ conectado o no. Si esta hipótesis no se cumple, $H_1(s)$, se debe calcular en condiciones de carga, es decir, cuando $H_2(s)$ está conectado.

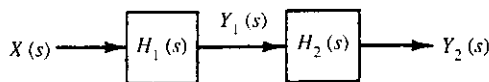


Figura 5.7.5. Interconexión en cascada de dos subsistemas.

Si hay N sistemas conectados en cascada, la función de transferencia total es

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \cdots H_N(s) \quad (5.7.9)$$

Utilizando la propiedad de convolución, la respuesta al impulso del sistema completo es

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \cdots * h_N(t) \quad (5.7.10)$$

Si dos subsistemas se conectan en paralelo, como muestra la Figura 5.7.6, y ninguno de los dos subsistemas tiene energía inicial, la salida es

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) \\ &= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \\ &= [H_1(s) + H_2(s)]X(s) \end{aligned}$$

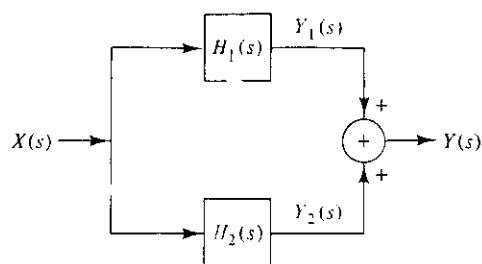


Figura 5.7.6. Interconexión en paralelo de dos subsistemas.

y la función de transferencia global es

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad (5.7.11)$$

En el caso de N subsistemas conectados en paralelo, la función de transferencia total es

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \dots + H_N(s) \quad (5.7.12)$$

Utilizando la linealidad de la transformada de Laplace, podemos obtener la respuesta al impulso del sistema completo:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \dots + h_N(t) \quad (5.7.13)$$

Estos dos resultados son similares a los que obtuvimos en el Capítulo 2 para las mismas interconexiones.

Ejemplo 5.7.2 La función de transferencia del sistema del Ejemplo 5.7.1 se puede escribir también:

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1} \frac{s-2}{s+2} \frac{1}{s+3}$$

Este sistema se puede realizar como una cascada de tres subsistemas, como muestra la Figura 5.7.7. Cada subsistema está formado por una combinación polo-cero. Es posible realizar también este mismo sistema en paralelo. Para ello, se realiza la descomposición en fracciones simples de $H(s)$:

$$H(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{12}{s+2} + \frac{10}{s+3}$$

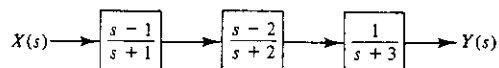


Figura 5.7.7. Simulación mediante conexión en cascada del Ejemplo 5.7.2.

La Figura 5.7.8 muestra la interconexión en paralelo.

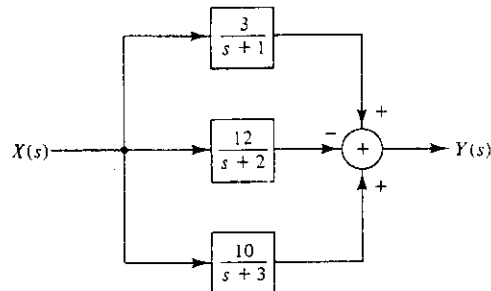


Figura 5.7.8. Simulación mediante conexión en paralelo del Ejemplo 5.7.2.

La conexión que se muestra en la Figura 5.7.9 recibe el nombre de sistema con realimentación positiva. La salida del primer sistema $H_1(s)$ se realimenta hacia el sumador a través del sistema $H_2(s)$; de ahí el nombre de «conexión con realimentación». Nótese que si se desconecta el bucle de realimentación, la función de transferencia de $X(s)$ a $Y(s)$ es $H_1(s)$. Por este motivo, la función $H_1(s)$ se denomina función de transferencia en bucle abierto. El sistema con función de transferencia $H_2(s)$ se denomina sistema de realimentación, y el sistema completo se denomina sistema en bucle cerrado.

Supondremos que los sistemas tienen energía inicial nula y que el sistema de realimentación no carga al sistema en bucle abierto. Sea $x(t)$ la señal de entrada al sistema con función de transferencia $H_1(s)$. Entonces,

$$Y(s) = E(s)H_1(s)$$

$$E(s) = X(s) + H_2(s)Y(s)$$

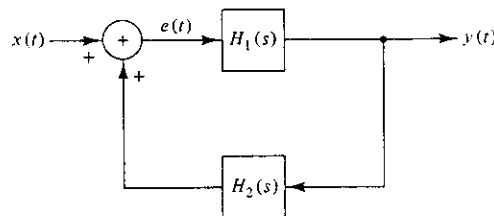


Figura 5.7.9. Conexión con realimentación.

de forma que

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) + H_2(s)Y(s)]$$

Despejando el cociente $Y(s)/X(s)$ se obtiene la función de transferencia del sistema en bucle cerrado:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)} \quad (5.7.14)$$

Por lo tanto, la función de transferencia del sistema en bucle cerrado es igual a la función de transferencia del sistema en bucle abierto dividida por uno menos el producto de

las funciones de transferencia de los sistemas en bucle abierto y de realimentación. Si el sumador de la Figura 5.7.9 se cambia por un restador, el sistema se denomina sistema con realimentación negativa, y la función de transferencia en bucle cerrado es

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \quad (5.7.15)$$

5.8. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace se puede aplicar a un gran número de problemas de análisis y diseño de sistemas. Las aplicaciones se basan en el uso de las propiedades de la transformada de Laplace, especialmente las asociadas a la diferenciación, la integración y la convolución.

En esta sección presentaremos tres aplicaciones, comenzando con la solución de ecuaciones diferenciales.

5.8.1. Solución de ecuaciones diferenciales

Uno de los usos más habituales de la transformada de Laplace es la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Como vimos en la Sección 2.5, esas ecuaciones se utilizan para modelar sistemas LTI en tiempo continuo. La resolución de estas ecuaciones se basa en la aplicación de la propiedad de diferenciación de la transformada de Laplace. El procedimiento es directo y sistemático, y se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Dado un conjunto de condiciones iniciales, tomar la transformada de Laplace de ambos miembros de la ecuación diferencial para obtener la ecuación algebraica en $Y(s)$.
2. Despejar $Y(s)$ en la ecuación algebraica.
3. Tomar la transformada inversa de Laplace para obtener $y(t)$.

Ejemplo 5.8.1

Consideremos la siguiente ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes y de segundo orden:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \exp[-t]u(t), \quad y'(0^-) = 1 \quad \text{y} \quad y(0^-) = 2$$

Tomando transformada de Laplace de ambos miembros obtenemos

$$[s^2Y(s) - 2s - 1] + 5[sY(s) - 2] + 6Y(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Despejando $Y(s)$:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s + 1)(s^2 + 5s + 6)} \\ &= \frac{1}{2(s + 1)} + \frac{6}{s + 2} - \frac{9}{2(s + 3)} \end{aligned}$$

Por último, tomando transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} \exp[-t] + 6 \exp[-2t] - \frac{9}{2} \exp[-3t] \right) u(t)$$

Las ecuaciones diferenciales de orden superior se resuelven mediante el mismo procedimiento.

5.8.2. Aplicación al análisis de circuitos RLC

En análisis de circuitos, la transformada de Laplace se puede llevar un paso más allá transformando el propio circuito en lugar de su ecuación diferencial asociada. Las relaciones tensión-corriente en el dominio s para R , L y C arbitrarios son:

Resistencias. La caracterización tensión-corriente en el dominio s de una resistencia de valor R se obtiene tomando la transformada de Laplace de la relación entre tensión y corriente en el dominio del tiempo, $Ri_R(t) = v_R(t)$. Se obtiene:

$$V_R(s) = RI_R(s) \quad (5.8.1)$$

Bobinas. En el caso de una bobina con inductancia L y relación entre corriente y tensión en el dominio del tiempo $L di_L(t)/dt = v_L(t)$, la ecuación en el dominio s es

$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-) \quad (5.8.2)$$

Por tanto, una bobina con energía en $t = 0^-$ (es decir, con condiciones iniciales no nulas) es equivalente a una bobina sin energía en $t = 0^-$ en serie con una fuente de tensión impulsiva. El peso del impulso de tensión es $Li_L(0^-)$. Esta fuente impulsiva se denomina generador de condiciones iniciales. Alternativamente, la Ecuación (5.8.2) se puede escribir así:

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} V_L(s) + \frac{i_L(0^-)}{s} \quad (5.8.3)$$

Es decir, una bobina que tenga energía en $t = 0^-$ es equivalente a una bobina sin energía en $t = 0^-$ en paralelo con una fuente de corriente de tipo escalón. La altura del escalón es $i_L(0^-)$.

Condensadores. Dado un condensador de capacidad C con relación entre tensión y corriente en el dominio del tiempo $C dv_C(t)/dt = i_C(t)$, la ecuación en el dominio s es

$$I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0^-) \quad (5.8.4)$$

Es decir, un condensador cargado (con condiciones iniciales no nulas) en $t = 0^-$ es equivalente a un condensador descargado en $t = 0^-$ en paralelo con una fuente de corriente impulsiva. El peso del impulso de corriente es $Cv_C(0^-)$, y la fuente se denomina generador de condiciones iniciales. La Ecuación (5.8.4) se puede escribir también así:

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{v_C(0^-)}{s} \quad (5.8.5)$$

Por lo tanto, un condensador cargado se puede sustituir por un condensador descargado en serie con una fuente de tensión de tipo escalón. La altura de la función escalón es $v_C(0^-)$.

Podemos escribir las leyes de Kirchhoff en el dominio s . El equivalente a la ley de corrientes es que en cualquier nodo de un circuito equivalente, la suma algebraica de las corrientes en el dominio s es cero:

$$\sum_k I_k(s) = 0 \quad (5.8.6)$$

La ley de tensiones en este caso dice que en cualquier malla de un circuito equivalente, la suma algebraica de las tensiones en el dominio s debe ser cero:

$$\sum_k V_k(s) = 0 \quad (5.8.7)$$

La asignación de las polaridades a los generadores de condiciones iniciales debe hacerse con cuidado.

Ejemplo 5.8.2

Consideremos el circuito que se muestra en la Figura 5.8.1(a) con $i_L(0^-) = -2$, $v_C(0^-) = 2$ y $x(t) = u(t)$. El circuito equivalente en el dominio s se muestra en la Figura 5.8.1(b).

Aplicando la ley de nodos al nodo 1 obtenemos

$$2 - \frac{Y(s) - 1/s - 2}{2 + s} - sY(s) - Y(s) = 0$$

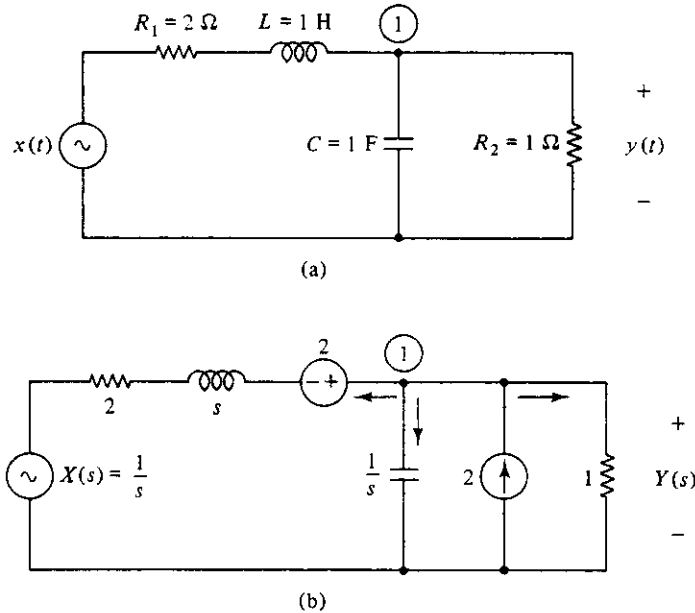


Figura 5.8.1. El circuito del Ejemplo 5.8.2.

Despejando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 6s + 1}{s(s^2 + 3s + 3)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3s} + \frac{5s/3 + 5}{(s + 3/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \\
&= \frac{1}{3s} + \frac{5}{3} \frac{s + 3/2}{(s + 3/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} + \frac{5}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}/2}{(s + 3/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}
\end{aligned}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de ambos miembros:

$$y(t) = \frac{1}{3} u(t) + \frac{5}{3} \exp\left[\frac{-3t}{2}\right] \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) u(t) + \frac{5}{\sqrt{3}} \exp\left[\frac{-3t}{2}\right] \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) u(t)$$

Utilizando este procedimiento se puede realizar el análisis de cualquier circuito.

5.8.3. Aplicación en control

Una de las principales aplicaciones de la transformada de Laplace es el estudio de sistemas de control. Muchos problemas importantes de carácter práctico se pueden formular como problemas de control. Se pueden encontrar ejemplos en muchas áreas, como las de sistemas de comunicaciones, sistemas radar, y control de voz.

Consideremos el sistema de control que se muestra en la Figura 5.8.2. El sistema está formado por dos subsistemas. El primer subsistema se conoce como la planta y su función de transferencia $H(s)$ es conocida. El segundo sistema se denomina controlador y se diseña para obtener unas ciertas prestaciones en el sistema completo. La entrada al sistema es una señal de referencia $r(t)$. La señal $w(t)$ se introduce para modelar las perturbaciones (ruido) del sistema. La diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida es la señal de error,

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

La señal de error se aplica al controlador, cuya misión es forzar que $e(t)$ sea cero cuando $t \rightarrow \infty$. Es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Esta condición implica que la salida del sistema sigue a la señal de referencia $r(t)$. Este comportamiento del sistema se denomina seguimiento en presencia de la perturbación $w(t)$. El siguiente ejemplo muestra cómo diseñar el controlador para conseguir el efecto de seguimiento.

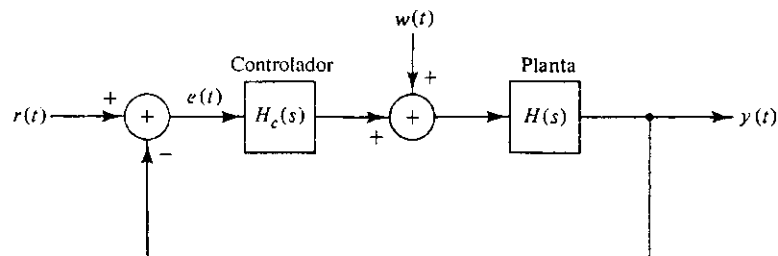


Figura 5.8.2. Diagrama de bloques de un sistema de control.

Ejemplo 5.8.3 Supongamos que el sistema LTI que tenemos que controlar tiene la función de transferencia

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (5.8.8)$$

Sea la entrada $r(t) = Au(t)$ y la perturbación $w(t) = Bu(t)$, siendo A y B constantes. Aplicando linealidad, podemos dividir el problema en dos problemas más simples, uno con entrada $r(t)$ y el otro con entrada $w(t)$. Es decir, la salida $y(t)$ se expresa como la suma de dos componentes. La primera componente es debida a $r(t)$ cuando $w(t) = 0$ y se denomina $y_1(t)$. Se puede verificar fácilmente que:

$$Y_1(s) = \frac{H_c(s)H(s)}{1 + H_c(s)H(s)} R(s)$$

donde $R(s)$ es la transformada de Laplace de $r(t)$. La segunda componente se debe a $w(t)$ cuando $r(t) = 0$ y su transformada de Laplace es

$$Y_2(s) = \frac{H(s)}{1 + H_c(s)H(s)} W(s)$$

siendo $W(s)$ la transformada de Laplace de la perturbación $w(t)$. La transformada de Laplace de la salida completa es

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) \\ &= \frac{H_c(s)H(s)}{1 + H_c(s)H(s)} R(s) + \frac{H(s)}{1 + H_c(s)H(s)} W(s) \\ &= \frac{H(s)[H_c(s)A + B]}{s[1 + H_c(s)H(s)]} \end{aligned} \quad (5.8.9)$$

Tenemos que diseñar $H_c(s)$ de forma que $r(t)$ siga a $y(t)$. Es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A$$

Sea $H_c(s) = N_c(s)/D_c(s)$. Podemos escribir entonces

$$Y(s) = \frac{N(s)[N_c(s)A + D_c(s)B]}{s[D(s)D_c(s) + N(s)N_c(s)]}$$

Supongamos que la parte real de todos los ceros de $D(s)D_c(s) + N(s)N_c(s)$ es estrictamente negativa. Utilizando el teorema del valor final, obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s)[N_c(s)A + D_c(s)B]}{D(s)D_c(s) + N(s)N_c(s)} \end{aligned} \quad (5.8.10)$$

Para que esta expresión sea igual a A , es necesario que $\lim_{s \rightarrow 0} D_c(s) = 0$ o que $D_c(s)$ tenga un cero en $s = 0$. Sustituyendo en la expresión de $Y(s)$ obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{N(0)N_c(0)A}{N(0)N_c(0)} = A$$

Ejemplo 5.8.4

Consideremos el sistema que se muestra en la Figura 5.8.3, que representa un sistema de control automático de posición. Este sistema se puede utilizar en una antena de seguimiento o en un cañón antiaéreo. La entrada $r(t)$ es la posición angular del objeto a seguir, y la salida es la posición de la antena

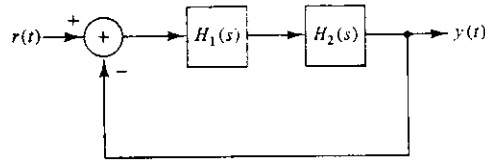


Figura 5.8.3. Diagrama de bloques de una antena de seguimiento.

El primer subsistema es un amplificador con función de transferencia $H_1(s) = 8$, y el segundo subsistema es un motor con función de transferencia $H_2(s) = 1/[s(s + \alpha)]$, siendo $0 < \alpha < \sqrt{32}$. Veamos cómo se comporta la respuesta al escalón cuando el parámetro α cambia. La salida $Y(s)$ es

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} H(s) = \frac{H_1(s)H_2(s)}{s[1 + H_1(s)H_2(s)]} \\ &= \frac{8}{s(s^2 + \alpha s + 8)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \alpha}{s^2 + \alpha s + 8} \end{aligned}$$

La restricción $0 < \alpha < \sqrt{32}$ se escoge para asegurar que las raíces del polinomio $s^2 + \alpha s + 8$ sean números complejos y estén en el semiplano izquierdo. La razón resultará clara en la Sección 5.10.

La respuesta al escalón de este sistema se obtiene tomando la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(1 - \exp\left[\frac{-\alpha t}{2}\right] \right) \left\{ \cos\left[\sqrt{8 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} t\right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2\sqrt{8 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}} \sin\left[\sqrt{8 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} t\right] \right\} u(t) \end{aligned}$$

La respuesta al escalón $y(t)$ para dos valores de α , $\alpha = 2$ y $\alpha = 3$, se muestra en la Figura 5.8.4. Nótese que la respuesta es oscilatoria. Presenta sobreoscilaciones del 30% y del

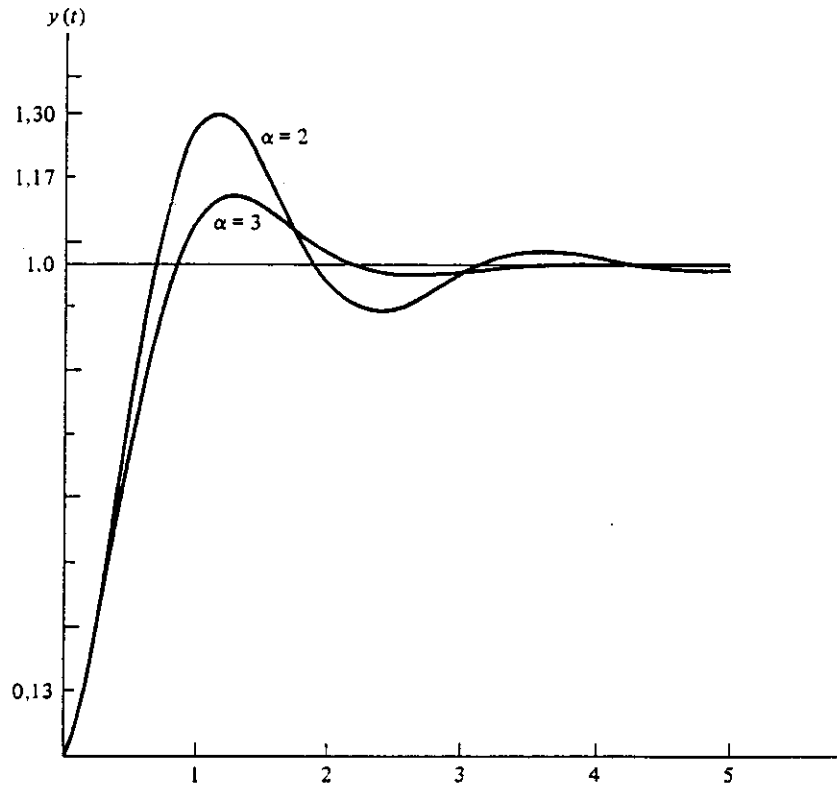


Figura 5.8.4. Respuesta al escalón del sistema con antena de seguimiento.

14 %, respectivamente. El tiempo necesario para que la respuesta suba del 10 % al 90 % de su valor final se denomina tiempo de elevación. El tiempo de elevación del primer sistema vale 0,48 s, y el del segundo sistema, 0,60 s. Los sistemas con tiempos de subida mayores son inferiores a los que tienen tiempos de respuesta menores. Sin embargo, al reducir el tiempo de respuesta se aumenta la sobreoscilación, y en algunas aplicaciones no es recomendable tener sobreoscilaciones altas.

5.9. ECUACIONES DE ESTADO Y TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ya hemos visto que la transformada de Laplace es una herramienta conveniente y eficiente para resolver ecuaciones diferenciales. En el Capítulo 2 presentamos el concepto de variables de estado y demostramos que cualquier sistema LTI se puede describir mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que se denominan ecuaciones de estado.

Utilizando la propiedad de diferenciación de la transformada de Laplace, podemos transformar este conjunto de ecuaciones diferenciales en un conjunto de ecuaciones algebraicas. Consideremos el sistema LTI descrito por las ecuaciones

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}x(t) \quad (5.9.1)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{v}(t) + dx(t) \quad (5.9.2)$$

Tomando la transformada de Laplace de la Ecuación (5.9.1) obtenemos

$$s\mathbf{V}(s) - \mathbf{v}(0^-) = \mathbf{A}\mathbf{V}(s) + \mathbf{b}X(s)$$

que se puede escribir así:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V}(s) = \mathbf{v}(0^-) + \mathbf{b}X(s)$$

siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad. Multiplicando por la izquierda en ambas ecuaciones por la inversa de la matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ obtenemos

$$\mathbf{V}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}(0^-) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(s) \quad (5.9.3)$$

La transformada de Laplace de la ecuación de salida es

$$Y(s) = \mathbf{c}\mathbf{V}(s) + dX(s)$$

Sustituyendo el valor de $\mathbf{V}(s)$ de la Ecuación (5.9.3) es

$$Y(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}(0^-) + [\mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d]X(s) \quad (5.9.4)$$

El primer término es la transformada de la salida cuando la entrada es cero y es la transformada de Laplace de la componente de $y(t)$ para entrada cero. El segundo término es la transformada de Laplace de la salida cuando el vector de estados inicial es cero y es la transformada de Laplace de la componente de $y(t)$ para estado cero. En el Capítulo 2 vimos que la solución de la Ecuación (5.9.1) es

$$\mathbf{v}(t) = \exp[\mathbf{A}t]\mathbf{v}(0^-) + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-\tau)]\mathbf{b}x(\tau) d\tau \quad (5.9.5)$$

[véase Ecuación (2.6.13) con $t_0 = 0^-$]. La integral del lado derecho de la Ecuación (5.9.5) representa la convolución de las señales $\exp[\mathbf{A}t]$ y $\mathbf{b}x(t)$. Por lo tanto, la transformada de Laplace de la Ecuación (5.9.5) es

$$\mathbf{V}(s) = \mathcal{L}\{\exp[\mathbf{A}t]; \mathbf{v}(0^-)\} + \mathcal{L}\{\exp[\mathbf{A}t]; \mathbf{b}X(s)\} \quad (5.9.6)$$

Comparando las Ecuaciones (5.9.3) y (5.9.6) vemos que

$$\mathcal{L}\{\exp[\mathbf{A}t]\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \Phi(s) \quad (5.9.7)$$

donde $\Phi(s)$ representa la transformada de Laplace de la matriz de transición de estados $\exp[\mathbf{A}t]$. $\Phi(s)$ se denomina matriz de resolución.

La Ecuación (5.9.7) nos proporciona una forma alternativa de para determinar $\exp[\mathbf{A}t]$. Formamos primero la matriz $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ y tomamos después la transformada inversa de Laplace de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Con condiciones iniciales nulas, la Ecuación (5.9.4) se convierte en

$$Y(s) = [\mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d]X(s) \quad (5.9.8)$$

y, por tanto, la función de transferencia del sistema se puede escribir así:

$$H(s) = \mathbf{c}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{b} + d = \mathbf{c}\Phi(s)\mathbf{b} + d \quad (5.9.9)$$

Ejemplo 5.9.1 Consideremos el sistema descrito por las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [-1 \quad -1] \mathbf{v}(t) + 2x(t)$$

con

$$\mathbf{v}(0^-) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La matriz para este sistema es

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s-3 & -4 \\ 2 & s-3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Utilizando los resultados del apéndice C, obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{\begin{bmatrix} s-3 & 4 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}}{(s+3)(s-3) + 8} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s-3}{(s+1)(s-1)} & \frac{4}{(s+1)(s-1)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s-1)} & \frac{s+3}{(s+1)(s-1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La función de transferencia se obtiene utilizando la Ecuación (5.9.9):

$$\begin{aligned} H(s) &= [-1 \quad -1] \begin{bmatrix} \frac{s-3}{(s+1)(s-1)} & \frac{4}{(s+1)(s-1)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s-1)} & \frac{s+3}{(s+1)(s-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \\ &= \frac{2s^2 - 4s - 18}{(s+1)(s-1)} \end{aligned}$$

Si tomamos la transformada inversa de Laplace obtenemos

$$h(t) = 2[\delta(t) + 3 \exp[-t]u(t) - 5 \exp[t]u(t)]$$

La respuesta del sistema a entrada cero es

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}(0^-) \\ &= \frac{-2(s+13)}{(s+1)(s-1)} \end{aligned}$$

y la respuesta en estado cero es

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= c(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(s) + 2X(s) \\ &= \frac{2s^2 - 4s - 18}{(s+1)(s-1)} X(s) \end{aligned}$$

La respuesta completa es

$$Y(s) = \frac{-2(s+13)}{(s+1)(s-1)} + \frac{2s^2 - 4s - 18}{(s+1)(s-1)} X(s)$$

La respuesta al escalón de este sistema se obtiene sustituyendo $X(s) = 1/s$:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-2(s+13)}{(s+1)(s-1)} + \frac{2s^2 - 4s - 18}{s(s+1)(s-1)} \\ &= \frac{-30s - 18}{s(s+1)(s-1)} \\ &= \frac{18}{s} + \frac{6}{s+1} - \frac{24}{s-1} \end{aligned}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de los dos miembros resulta:

$$y(t) = [18 + 6\exp[-t] - 24\exp[t]]u(t)$$

Ejemplo 5.9.2 Encontremos la matriz de transición de estados del Ejemplo 5.9.1. La matriz es

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-3}{(s+1)(s-1)} & \frac{4}{(s+1)(s-1)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s-1)} & \frac{s+3}{(s+1)(s-1)} \end{bmatrix}$$

Los elementos de $\Phi(t)$ se obtienen tomando la transformada inversa de Laplace de los elementos de la matriz $\Phi(s)$, con lo que se obtiene:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2\exp[-t] - \exp[t] & -2\exp[-t] + 2\exp[t] \\ \exp[-t] - \exp[t] & -\exp[-t] + 2\exp[t] \end{bmatrix} u(t)$$

5.10. ESTABILIDAD EN EL DOMINIO s

La estabilidad es una consideración importante en el diseño de sistemas. En el Capítulo 2, vimos que la estabilidad de un sistema se puede examinar bien mediante la respuesta al impulso del sistema o mediante los autovalores de la matriz de transición de estados. Concretamente demostramos que si un sistema es estable tanto la salida como las variables

internas deben permanecer acotadas si la entrada está acotada. Los sistemas que satisfacen esta condición se denominan estables en sentido BIBO (entrada acotada-salida acotada).

La estabilidad también se puede examinar en el dominio s mediante la función de transferencia $H(s)$. La función de transferencia de un sistema LTI como los que hemos estado considerando tiene la forma de un cociente de polinomios en s . Como es posible factorizar cualquier polinomio en función de sus raíces, una función de transferencia racional siempre se puede escribir de la siguiente forma (suponiendo que el grado de $N(s)$ es menor que el grado de $D(s)$):

$$H(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_N}{s - s_N} \quad (5.10.1)$$

Los ceros s_k del denominador son los polos de $H(s)$ y en general, pueden ser números complejos. Si los coeficientes de la ecuación diferencial que gobierna el sistema son reales, las raíces complejas deberán presentarse en pares conjugados. Si todos los polos son diferentes, serán simples. Si uno de los polos corresponde a un factor repetido de la forma $(s - s_k)^m$, se trata de un polo de orden múltiple, de orden m . La respuesta al impulso del sistema, $h(t)$, se obtiene tomando la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5.10.1). Observando la fila 6 de la Tabla 5.1, el k -ésimo polo contribuye a $h(t)$ con el término $h_k(t) \exp[s_k t]$. Por lo tanto, el comportamiento del sistema depende de la localización de sus polos en el plano s . Un polo puede encontrarse en el lado izquierdo del plano s , en el eje imaginario, o en el lado derecho. Puede tratarse de un polo simple o de un polo de orden múltiple. A continuación sigue una discusión de la influencia de la posición y el orden de los polos en la estabilidad de los sistemas LTI.

1. *Polos simples en el semiplano izquierdo.* En este caso el polo es de la forma

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k, \quad \sigma_k < 0$$

y la componente de la respuesta al impulso del sistema correspondiente a este polo, $h_k(t)$ es

$$\begin{aligned} h_k(t) &= A_k \exp[(\sigma_k + j\omega_k)t] + A_k^* \exp[(\sigma_k - j\omega_k)t] \\ &= |A_k| \exp[\sigma_k t] (\exp[j(\omega_k t + \beta_k)] + \exp[-j(\omega_k t + \beta_k)]) \\ &= 2|A_k| \exp[\sigma_k t] \cos(\omega_k t + \beta_k), \quad \sigma_k < 0 \end{aligned} \quad (5.10.2)$$

donde

$$A_k = |A_k| \exp[j\beta_k]$$

A medida que t crece, esta componente de la respuesta al impulso tiende a cero y por lo tanto, resulta un sistema estable. Por lo tanto, los sistemas que sólo tienen polos en el semiplano izquierdo son estables.

2. *Polos simples en el eje imaginario.* Este caso se puede considerar como un caso especial de la Ecuación (5.10.2) con $\sigma_k = 0$. La k -ésima componente de la respuesta al impulso es

$$h_k(t) = 2|A_k| \cos(\omega_k t + \beta_k)$$

Nótese que no hay atenuación exponencial. Es decir, la respuesta no se reduce cuando el tiempo progresa. Puede parecer que la respuesta a una entrada limitada

es también limitada. Esto no es cierto si la excitación del sistema es un coseno de la misma frecuencia ω_k . En este caso, un polo de orden múltiple de la forma

$$\frac{B}{(s^2 + \omega_k^2)^2}$$

aparece en la transformada de Laplace de la salida. Este término de lugar a la respuesta temporal

$$\frac{B}{2\omega_k} t \sin \omega_k t$$

que crece indefinidamente cuando t crece. Físicamente, ω_k representa la respuesta natural del sistema. Si la frecuencia de entrada es igual a la frecuencia natural, el sistema entra en resonancia y la salida crece sin cota. Un ejemplo es el circuito LC sin pérdidas (no resistivo). Un sistema con polos en el eje imaginario se denomina a veces sistema marginalmente estable.

3. *Polos simples en el semiplano derecho.* Si la función del sistema tiene polos en el semiplano derecho, la respuesta al sistema es de la forma

$$h_k(t) = 2|A_k| \exp[\sigma_k t] \cos(\omega_k t + \beta_k), \quad \sigma_k > 0$$

Debido al término exponencial creciente, la salida del sistema se incrementa sin límite. Los sistemas con polos en el semiplano derecho son inestables.

4. *Polos múltiples en el semiplano izquierdo.* Un polo de orden m en el semiplano izquierdo da lugar a una respuesta de la forma (véase fila 7 de la Tabla 5.1):

$$h_k = |A_k| t^m \exp[\sigma_k t] \cos(\omega_k t + \beta_k), \quad \sigma_k < 0$$

Para valores negativos de σ_k , la función exponencial decrece más deprisa que el polinomio t^m . Por tanto, la respuesta decrece cuando t crece y un sistema con este tipo de polos es estable.

5. *Polos múltiples en el eje imaginario.* En este caso, la respuesta del sistema es de la forma

$$h_k = |A_k| t^m \cos(\omega_k t + \beta_k)$$

Este término crece con el tiempo, y por tanto el sistema es inestable.

6. *Polos múltiples en el semiplano derecho.* La respuesta del sistema es

$$h_k = |A_k| t^m \exp[\sigma_k t] \cos(\omega_k t + \beta_k), \quad \sigma_k > 0$$

Como $\sigma_k > 0$ la respuesta crece con el tiempo, y el sistema es inestable.

En resumen, un sistema LTI causal es estable si todos los polos están en el semiplano abierto izquierdo (la región del plano complejo formada por todos los puntos del semiplano izquierdo excluyendo el eje $j\omega$). Se dice que un sistema LTI es marginalmente estable si tiene polos simples en el eje $j\omega$. Un sistema LTI es inestable si tiene polos en el semiplano derecho o polos múltiples en el eje $j\omega$.

5.11. RESUMEN

- La transformada bilateral de Laplace de una señal $x(t)$ se define:

$$X_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-st] dt$$

- Los valores de s para los que $X(s)$ converge (existe) constituye la región de convergencia (ROC).
- La transformación $x(t) \leftrightarrow X(s)$ no es uno a uno a menos que se especifique la región de convergencia.
- La transformada unilateral de Laplace se define:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) \exp[-st] dt$$

La transformada bilateral y la unilateral están relacionadas:

$$X_B(s) = X_+(s) + \mathcal{L}\{x_-(-t)u(t)\}_{s \rightarrow -s}$$

siendo $X_+(s)$ la transformada unilateral de la parte causal de $x(t)$, y $x_-(t)$ es la parte no causal de $x(t)$.

- La diferenciación en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicar por s en el dominio s . Es decir,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-)$$

- La integración en el dominio del tiempo es equivalente a la división por s en el dominio s . Es decir,

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s}$$

- La convolución en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio s . Es decir,

$$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow Y(s) = X(s)H(s)$$

- El teorema del valor inicial nos permite calcular el valor inicial de la salida $x(t)$ y de sus derivadas directamente a partir de $X(s)$:

$$x^{(n)}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s^{n+1}X(s) - s^n x(0^+) - s^{n-1}x'(0^+) - \dots - sx^{(n-1)}(0^+)]$$

- El teorema del valor final nos permite calcular el valor final de $x(t)$ a partir de $X(s)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

- Se puede utilizar la descomposición en fracciones simples para encontrar la transformada inversa de Laplace de sistemas cuya transformada de Laplace es una función racional de s .
- Existen muchas aplicaciones de la transformada de Laplace. Entre ellas podemos citar la solución de ecuaciones diferenciales, el análisis de circuitos eléctricos, y el diseño y análisis de sistemas de control.
- Si dos subsistemas con función de transferencia $H_1(s)$ y $H_2(s)$ se conectan en paralelo, la función de transferencia total $H(s)$ es

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

- Si dos subsistemas con función de transferencia $H_1(s)$ y $H_2(s)$ se conectan en serie, la función de transferencia total $H(s)$ es

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

- La función de transferencia en bucle cerrado de un sistema con realimentación negativa con una función en bucle abierto $H_1(s)$ y una función de realimentación $H_2(s)$ es

$$H(s) = \frac{I_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

- Se pueden obtener diagramas de simulación de sistemas LTI en el dominio de la frecuencia. Estos diagramas se pueden utilizar en la representación mediante variables de estado.
- La solución de las ecuaciones de estado se puede escribir en el dominio s :

$$\mathbf{V}(s) = \Phi(s)\mathbf{v}(0^-) + \Phi(s)\mathbf{b}X(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{c}\mathbf{V}(s) + dX(s)$$

- La matriz

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathcal{L}\{\exp[\mathbf{A}t]\}$$

se denomina matriz de resolución.

- La función de transferencia del sistema se puede escribir así:

$$H(s) = \mathbf{c}\Phi(s)\mathbf{b} + d$$

- Se dice que un sistema LTI es estable si y sólo si todos sus polos están en el semiplano izquierdo. Un sistema LTI es marginalmente estable si sólo tiene polos simples en el eje $j\omega$. En los demás casos, el sistema es inestable.

5.12. LISTA DE TÉRMINOS IMPORTANTES

Controlador	Polo simple
Descomposición en fracciones simples	Polos de $D(s)$
Diagrama de simulación	Propiedad de convolución
Función de transferencia	Realimentación negativa
Función racional	Realimentación positiva
Interconexión con realimentación	Región de convergencia
Interconexión en cascada	Respuesta a entrada cero
Interconexión en paralelo	Respuesta a estado cero
Ley de Kirchoff de corrientes	Semiplano izquierdo
Ley de Kirchoff de tensiones	Teorema del valor final
Parte causal de $x(t)$	Teorema del valor inicial
Parte no causal de $x(t)$	Transformada bilateral de Laplace
Planta	Transformada inversa de Laplace
Plano s	Transformada unilateral de Laplace
Polo de orden múltiple	

5.13. PROBLEMAS

5.1. Calcular la transformada bilateral de Laplace y la región de convergencia de las siguientes funciones:

- (a) $\exp[t + 1]$
- (b) $\exp[bt]u(-t)$
- (c) $|t|$
- (d) $(1 - |t|)$
- (e) $\exp[-2|t|]$
- (f) $t^n \exp[-t]u(-t)$
- (g) $(\cos at)u(-t)$
- (h) $(\sinh at)u(-t)$

5.2. Utilizando la definición de la Ecuación (5.3.1), determinar la transformada unilateral de Laplace de las siguientes señales:

- (i) $x_1(t) = t \operatorname{rect}[(t - 1)/2]$
- (ii) $x_2(t) = x_1(t) + \frac{1}{2} \delta(t)$
- (iii) $x(t) = \operatorname{rect}\left[\frac{t}{2}\right]$

5.3. Utilizar la Ecuación (5.4.2) para calcular la transformada bilateral de Laplace de las señales del Problema 5.1.

5.4. La transformada de Laplace de una señal $x(t)$ que es cero para $t < 0$ es

$$X(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 2}$$

Determinar la transformada de Laplace de las siguientes señales:

- (a) $y(t) = 3x\left(\frac{t}{3}\right)$
- (b) $y(t) = tx(t)$
- (c) $y(t) = tx(t - 1)$
- (d) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
- (e) $y(t) = (t - 1)x(t - 1) + \frac{dx(t)}{dt}$
- (f) $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$

5.5. Demostrar la fila 5 de la Tabla 5.1.

5.6. Demostrar que

$$\mathcal{L}\{t^a u(t)\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad a > 0$$

donde

$$\Gamma(v) = \int_0^\infty t^{v-1} \exp[-t] dt$$

5.7. Utilizar la propiedad

$$\Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$$

para demostrar que el resultado del Problema 5.6 se reduce a la fila 5 de la Tabla 5.1.

5.8. Obtener las fórmulas 8 y 9 de la Tabla 5.1 utilizando integración por partes.

5.9. Utilizar las filas 8 y 9 de la Tabla 5.1 para encontrar la transformada de Laplace de $\sinh(\omega_0 t)u(t)$ y $\cosh(\omega_0 t)u(t)$.

5.10. Determinar los valores inicial y final de las señales cuya transformada unilateral de Laplace se indica a continuación sin calcular la transformada inversa de Laplace. Si no existe valor final, indicar el motivo.

(a) $\frac{1}{s+a}$

(b) $\frac{1}{(s+a)^n}$

(c) $\frac{6}{s(s^2+25)}$

(d) $\frac{s+2}{s+3}$

(e) $\frac{s^2+s+3}{s^3+4s^2+2s+2}$

(f) $\frac{s}{s^2-2s-3}$

5.11. Dadas las siguientes transformadas de Laplace, encontrar $x(t)$:

(a) $\frac{s+2}{s^2-s-2}$

(b) $\frac{s^2+8}{s(s^2+16)}$

(c) $\frac{2s^3+3s^2+6s+4}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}$

(d) $\frac{s^2}{s^2+3s+2}$

$$(e) \frac{s^2 - s + 1}{s^3 - 2s^2 + s}$$

$$(f) \frac{(s + 2)e^{-s}}{s^2 + 2s + 1}$$

$$(g) \frac{2s^2 - 6s + 3}{s^2 - 3s + 2}$$

$$(h) \frac{2(s^2 + 2s + 4)}{(s^2 + 4)^2}$$

$$(i) \frac{2}{(2s + 1)^3}$$

$$(j) \frac{(s^2 + 8)e^{-2s}}{s(s^2 + 16)}$$

5.12. Calcular las siguientes convoluciones mediante transformada de Laplace:

- (a) $\exp[at]u(t) * \exp[bt]u(t)$, $a \neq b$
- (b) $\exp[at]u(t) * \exp[at]u(t)$
- (c) $\text{rect}(t/2) * u(t)$
- (d) $tu(t) * \exp[at]u(t)$
- (e) $\exp[-bt]u(t) * u(t)$
- (f) $\sin(at)u(t) * \cos(bt)u(t)$
- (g) $\exp[-2t]u(t) * \text{rect}[(t - 1)/2]$
- (h) $[\exp(-2t)u(t) + \delta(t)] * u(t - 1)$

5.13. (a) Utilizar la propiedad de convolución para encontrar las señales en el dominio del tiempo correspondientes a las siguientes transformadas de Laplace:

$$(i) \frac{1}{(s - a)^2} \quad (ii) \frac{1}{(s - a)^3}$$

(b) ¿Es posible, utilizando el resultado del Apartado (a), obtener la transformada inversa de Laplace de $1/(s - a)^n$?

5.14. Hemos visto que la salida de un sistema LTI se puede determinar como $Y(s) = H(s)X(s)$, donde la función de transferencia del sistema $H(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema $h(t)$. Sea $H(s) = N(s)/D(s)$, con $N(s)$ y $D(s)$ polinomios en s . Los ceros de $N(s)$ son los ceros de $H(s)$ y los ceros de $D(s)$ son sus polos:

(a) Dada la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 - s^2 + 9s - 9}$$

dibujar las posiciones de los polos y los ceros en el plano complejo s .

(b) ¿Cuánto vale $h(t)$ en este sistema? ¿Es real?

- (c) Demostrar que si $h(t)$ es real, $H(s^*) = H^*(s)$. Demostrar que si $s = s_0$ es un polo (cero) de $H(s)$, también lo es $s = s_0^*$. Es decir, que los polos y los ceros aparecen en pares conjugados.
- (d) Verificar que la $H(s)$ dada satisface (c).

5.15. Encontrar las funciones de transferencia para cada uno de los sistemas de la Figura P5.15 (Ayuda: puede ser necesario mover el punto de la suma).

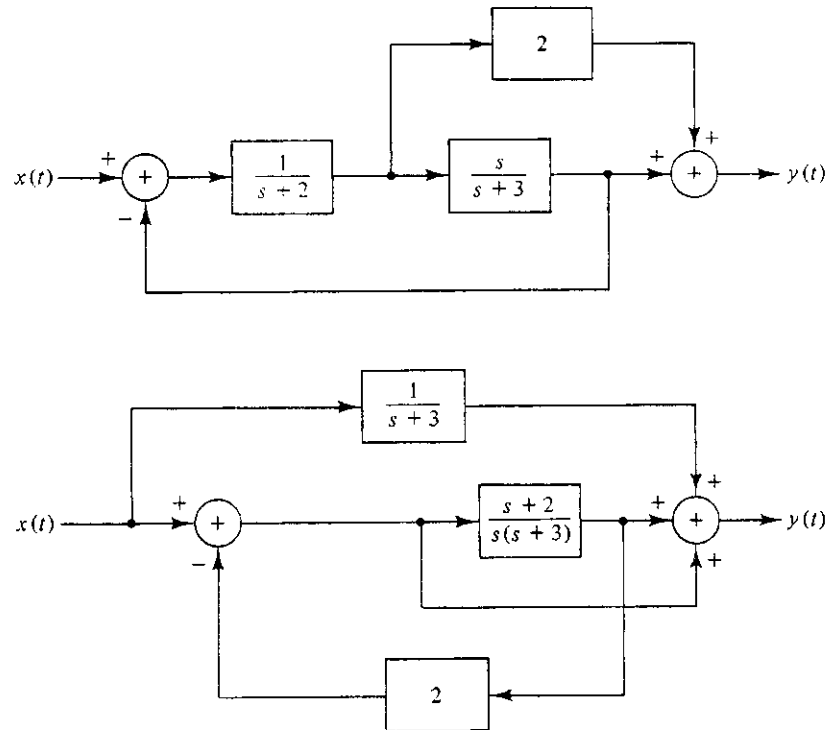


Figura P5.15.

- 5.16. Dibujar los diagramas de simulación en primera y segunda forma canónica para el sistema LTI descrito por la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 4s^2 + 3s + 2}$$

- 5.17. Repetir el Problema 5.16 para el sistema descrito por la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s^3 + 3s + 1}{s^3 + 3s^2 + s}$$

- 5.18. Encontrar la función de transferencia del sistema descrito por la siguiente ecuación:

$$2y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = 2x'(t) - x(t)$$

(Suponer condiciones iniciales nulas). Encontrar la respuesta al impulso.

5.19. Obtener la función de transferencia del sistema que se muestra en la Figura P5.19

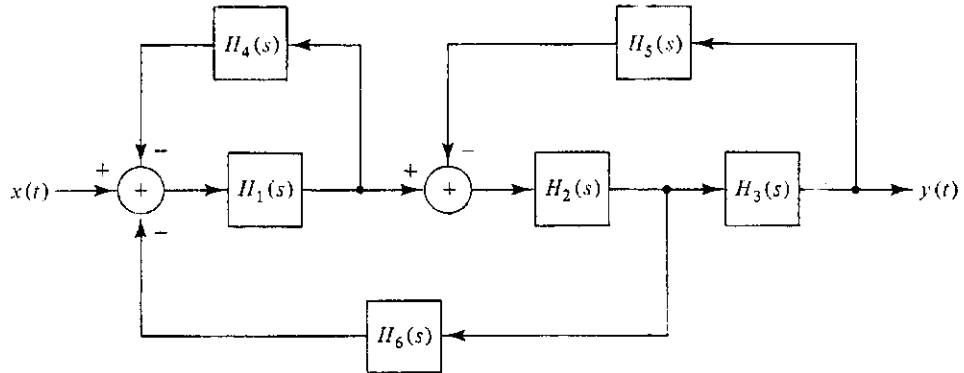


Figura P5.19.

5.20. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

- (a) $y'(t) + 2y(t) = u(t)$, $y(0^-) = 1$
- (b) $y'(t) + 2y(t) = (\cos t)u(t)$, $y(0^-) = 1$
- (c) $y'(t) + 2y(t) = \exp[-3t]u(t)$, $y(0^-) = 1$
- (d) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = u(t)$, $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 1$
- (e) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = \exp[-3t]u(t)$, $y(0^-) = 0$, $y'(0^-) = 1$
- (f) $y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) - 6y(t) = \exp[-2t]u(t)$, $y(0^-) = y'(0^-) = y''(0^-) = 0$

5.21. Encontrar la respuesta al impulso $h(t)$ en los sistemas descritos por las siguientes ecuaciones diferenciales:

- (a) $y'(t) + 5y(t) = x(t) + 2x'(t)$
- (b) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2x(t) - 3x'(t)$
- (c) $y'''(t) + y'(t) - 2y(t) = x''(t) + x'(t) + 2x(t)$

5.22. Uno de los problemas más importantes en teoría de sistemas es el de la identificación. Observando la salida de un sistema LTI en respuesta a una entrada conocida se puede obtener la respuesta al impulso del sistema. Encontrar la respuesta al impulso de los sistemas cuya entrada y salida son como sigue:

- (a) $x(t) = 2 \exp[-2t]u(t)$
 $y(t) = (1 - t + \exp[-t] + \exp[-2t])u(t)$
- (b) $x(t) = 2u(t)$
 $y(t) = tu(t) - \exp[-2t]u(t)$
- (c) $x(t) = \exp[-2t]u(t)$
 $y(t) = \exp[-t] - 3 \exp[-2t])u(t)$
- (d) $x(t) = tu(t)$
 $y(t) = (t^2 - 2 \exp[-3t])u(t)$
- (e) $x(t) = 2u(t)$
 $y(t) = \exp[-2t] \cos(4t + 135^\circ)u(t)$
- (f) $x(t) = 3tu(t)$
 $y(t) = \exp[-4t][\cos(4t + 135^\circ) - 2 \sin(4t + 135^\circ)]u(t)$

- 5.23. Dado el circuito que se muestra en la Figura P5.23, sean $v_C(0^-) = 1$ voltio, $i_L(0^-) = 2$ amperios, y $x(t) = u(t)$. Encontrar $y(t)$ (incorporar la energía inicial de la bobina y del condensador en el modelo transformado).

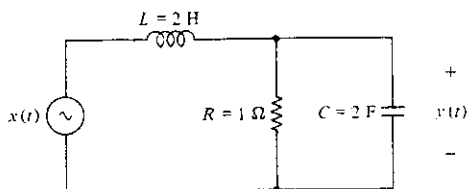


Figura P5.23.

- 5.24. Para el circuito de la Figura P5.24, sean $v_C(0^-) = 1$ voltio, $i_L(0^-) = 2$ amperios, y $x(t) = u(t)$. Calcular $y(t)$ (incorporar la energía inicial de la bobina y del condensador en el modelo transformado).

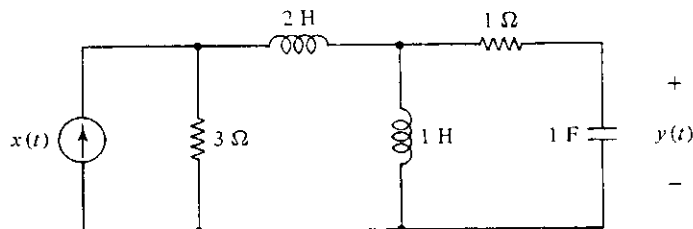


Figura P5.24.

- 5.25. Repetir el Problema 5.23 para $x(t) = (\cos t)u(t)$.
 5.26. Repetir el Problema 5.24 para $x(t) = (\sin 2t)u(t)$.
 5.27. Repetir el Problema 5.23 para el circuito que se muestra en la Figura P5.27.

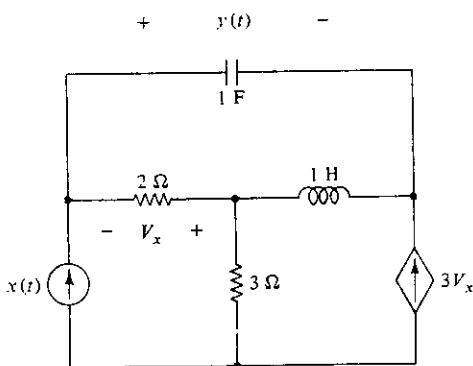


Figura P5.27.

- 5.28. Consideremos el sistema de control que se muestra en la Figura P5.28. Dado $x(t) = u(t)$, $H_1(s) = K$ y $H_2(s) = 1/(s(s + a))$, obtener:
 (a) $Y(s)$
 (b) $y(t)$ para $K = 29$, $a = 5$, $a = 3$, y $a = 1$

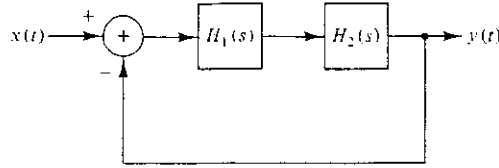


Figura P5.28.

- 5.29. Consideremos el sistema de control que se muestra en la Figura P5.29. Sea

$$x(t) = Au(t)$$

$$H_c(s) = \frac{s+1}{s}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+2}$$

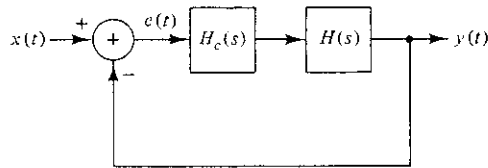


Figura P5.29.

- Demostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A$.
- Determinar la señal de error $e(t)$.
- ¿Segue el sistema a la entrada si $H_c(s) = \frac{1}{(s-2)}$? En caso negativo explicar los motivos
- ¿Funciona el sistema si $H_c(s) = \frac{(s+1)}{(s+3)}$? ¿Por qué?

- 5.30. Obtener $\exp[At]$ utilizando la transformada de Laplace para las siguientes matrices:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

5.31. Consideremos el circuito que se muestra en la Figura P5.31. Seleccionar la tensión del condensador y la corriente de la bobina como variables de estado. Suponiendo condiciones iniciales nulas:

- Escribir las ecuaciones de estado en el dominio transformado.
- Calcular $Y(s)$ si la entrada $x(t)$ es el escalón unidad.
- ¿Qué es $y(t)$?

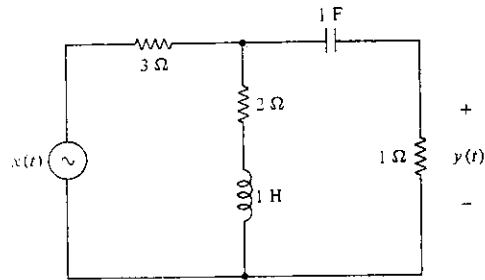


Figura P5.31.

5.32. Utilizando el método de la transformada de Laplace encontrar la solución de las siguientes ecuaciones de estado:

- $$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1(0^-) \\ v_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1(0^-) \\ v_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5.33. Comprobar la estabilidad de los sistemas que se muestran en la Figura P5.33.

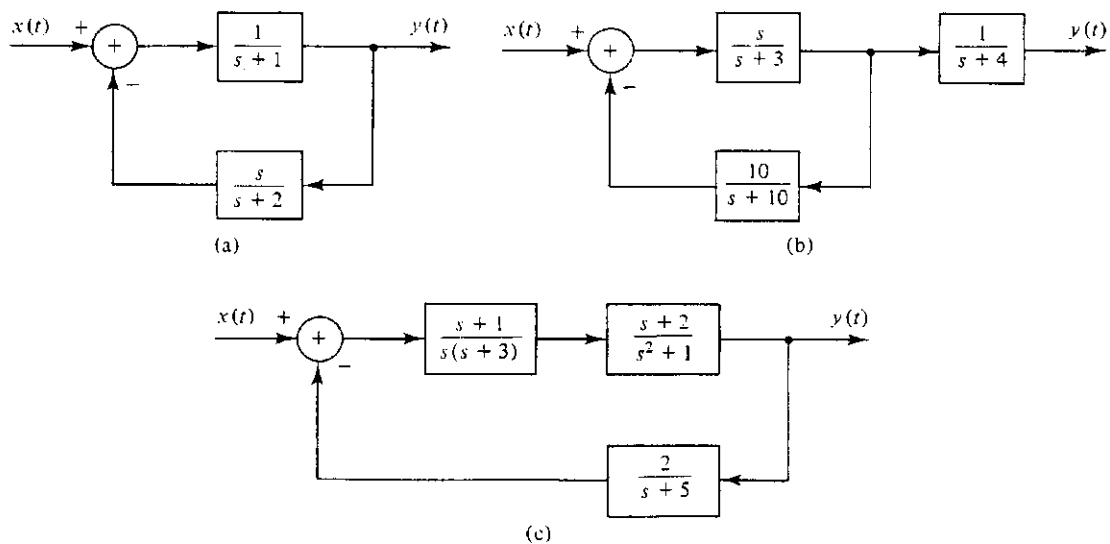


Figura P5.33.

Sistemas en tiempo discreto

6.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores hemos presentado diversas técnicas para analizar sistemas en tiempo continuo, o analógicos. En este capítulo y en los que siguen, consideraremos las técnicas para analizar señales y sistemas en tiempo discreto.

Las señales en tiempo discreto, como su propio nombre indica, están definidas sólo en instantes discretos del tiempo. Algunos ejemplos pueden ser el número de niños que nacen un día concreto del año, la población de Estados Unidos obtenida mediante un censo, el interés que produce una cuenta bancaria, etc. Un segundo tipo de señales en tiempo discreto se produce al transformar una señal analógica en una señal en tiempo discreto mediante el proceso de *muestreo* (más adelante consideraremos el muestreo con mayor profundidad). Como ejemplos de este caso tenemos la grabación digital de señales de audio o los sistemas de teledata, en los que se transmiten por un único canal datos procedentes de diversos sensores de medida, mediante *multiplexación temporal*.

En todos los casos, la señal en tiempo discreto se representa como una secuencia de valores $x(t_n)$, donde t_n indica los instantes en los que está definida la señal. La secuencia se puede indicar también como $x(n)$, suponiendo que n toma sólo valores enteros.

Como en el caso de señales en tiempo continuo, generalmente representaremos las señales en tiempo discreto en forma de función. Por ejemplo,

$$x(n) = \frac{1}{2} \cos 3n \quad (6.1.1)$$

Alternativamente, si una señal es cero fuera de un intervalo finito, se pueden indicar expresamente todos los valores de la señal como elementos de una secuencia. Por ejemplo, la función que se muestra en la Figura 6.1.1 se puede escribir así:

$$x(n) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right\} \quad (6.1.2)$$

↑

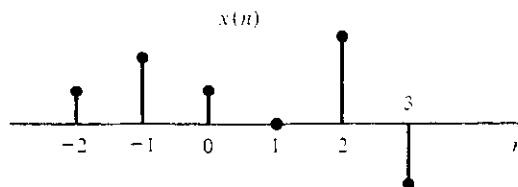


Figura 6.1.1. Ejemplo de secuencia en tiempo discreto.

donde la flecha indica el valor para $n = 0$. En esta notación se supone que todos los valores que no se indican expresamente son cero. En el caso de secuencias causales, en las que el primer elemento representa el valor para $n = 0$, omitiremos la flecha.

La secuencia que se muestra en la Ecuación (6.1.2) es un ejemplo de *secuencia de longitud finita*. La longitud de la secuencia es el número de términos de la misma. Por lo tanto, la Ecuación (6.1.2) representa una secuencia de seis puntos.

6.1.1. Clasificación de señales en tiempo discreto

Como en el caso de señales en tiempo continuo, las señales en tiempo discreto se pueden clasificar en diversas categorías. Por ejemplo, la energía de una señal en tiempo discreto $x(n)$ se define:

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (6.1.3)$$

La potencia media de la señal es

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (6.1.4)$$

La señal $x(n)$ es de energía finita si E es finito, y es de potencia media finita si P es finito. Como $P = 0$ cuando E es un número finito, todas las señales de energía finita son señales de potencia media finita. Sin embargo, si P es finito, E puede ser finito o infinito. Por tanto, no todas las señales de potencia media finita son señales de energía finita. Si E y P son infinitos, la señal no se puede clasificar como de energía finita ni como de potencia media finita.

Se dice que una señal $x(n)$ es periódica si para algún valor entero $N > 0$,

$$x(n+N) = x(n) \quad \text{para todo } n \quad (6.1.5)$$

El mínimo valor de N que satisface la relación anterior se denomina período fundamental de la señal.

Si la relación anterior no se satisface para ningún valor entero N se dice que la señal $x(n)$ es no periódica o aperiódica.

Ejemplo 6.1.1 Consideremos la señal

$$x(n) = A \sin(2\pi f_0 n + \phi_0)$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(n+N) &= A \operatorname{sen}(2\pi f_0(n+N) + \phi_0) \\ &= A \operatorname{sen}(2\pi f_0 n + \phi_0) \cos(2\pi f_0 N) + A \cos(2\pi f_0 n + \phi_0) \operatorname{sen}(2\pi f_0 N) \end{aligned}$$

Es claro que $x(n+N)$ será igual a $x(n)$ si

$$N = \frac{m}{f_0}$$

para algún número entero m . El período fundamental se obtiene escogiendo m como el menor número entero para el que se obtiene un valor también entero de N . Por ejemplo, si $f_0 = 3/5$, se puede escoger $m = 3$ con lo que resulta $N = 5$. Pero si $f_0 = \sqrt{2}$, N no será un número entero, y por tanto $x(n)$ no será periódica.

Sea la señal $x(n)$ la suma de dos secuencias periódicas $x_1(n)$ y $x_2(n)$ con períodos respectivamente N_1 y N_2 . Sean p y q dos números enteros tales que

$$pN_1 = qN_2 = N \quad (6.1.6)$$

En ese caso, $x(n)$ es periódica de período N ya que

$$x(n+N) = x_1(n+pN_1) + x_2(n+qN_2) = x_1(n) + x_2(n)$$

Como siempre es posible encontrar números enteros p y q que cumplan la Ecuación (6.1.6), se concluye que la suma de dos secuencias en tiempo discreto periódicas es también periódica.

Ejemplo 6.1.2 Sea la señal

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{9}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{7} + \frac{1}{2}\right)$$

Se puede verificar de forma muy sencilla, como en el Ejemplo 6.1.1, que los dos términos de $x(n)$ son periódicos de períodos $N_1 = 18$ y $N_2 = 14$ respectivamente, por lo que $x(n)$ es periódica de período $N = 126$.

Una señal $x(n)$ es par si

$$x(n) = x(-n) \quad \text{para todo } n \quad (6.1.7)$$

y es impar si

$$x(n) = -x(-n) \quad \text{para todo } n \quad (6.1.8)$$

La parte par de $x(n)$ se puede obtener así:

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x(-n)] \quad (6.1.9)$$

y la expresión de la parte impar es

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x(-n)] \quad (6.1.10)$$

6.1.2. Transformaciones de la variable independiente

La secuencia $x(n - k)$ representa, para valores enteros de k , un desplazamiento de k muestras de la secuencia $x(n)$. El desplazamiento es a la derecha si $k > 0$ y a la izquierda si $k < 0$. La señal $x(-n)$ es una reflexión de $x(n)$ con respecto al origen de tiempos $n = 0$. Como ocurría en el caso de tiempo continuo, las operaciones de desplazamiento y de reflexión no son conmutativas.

El escalado en amplitud tampoco es diferente al caso de tiempo continuo, pero el escalado temporal debe interpretarse con cuidado en el caso de tiempo discreto, ya que las señales sólo están definidas para valores enteros de la variable temporal. Ilustraremos esto mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 6.1.3 Sea la señal

$$x(n) = e^{-n/2} u(n)$$

y supongamos que deseamos encontrar las señales (i) $2x(5n/3)$ y (ii) $x(2n)$.

Sea $y(n) = 2x(5n/3)$. Tenemos entonces

$$y(0) = 2x(0) = 2, \quad y(1) = 2x(5/3) = 0, \quad y(2) = 2x(10/3) = 0,$$

$$y(3) = 2x(5) = 2 \exp(-5/2), \quad y(4) = 2x(10/3) = 0, \text{ etc.}$$

Hemos supuesto que $x(n)$ es cero si n no es un número entero. Claramente, la expresión general de $y(n)$ es

$$y(n) = \begin{cases} 2 \exp\left[\frac{-5n}{6}\right], & n = 0, 3, 6, \text{ etc.} \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Análogamente, si hacemos $z(n) = x(2n)$ tenemos

$$z(0) = x(0) = 1, \quad z(1) = x(2) = \exp[-1], \quad z(3) = x(6) = \exp[-3], \text{ etc.}$$

La expresión general de $z(n)$ es, por lo tanto

$$z(n) = \begin{cases} \exp[-n], & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

El anterior ejemplo demuestra que para señales en tiempo discreto el escalado temporal no produce simplemente una versión comprimida o expandida de la señal original, sino que puede producir una señal completamente diferente.

Ejemplo 6.1.4 Sea la señal

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Entonces

$$y(n) = x(2n) = 1 \quad \text{para todo } n$$

Ejemplo 6.1.5 Consideremos la señal que se muestra en la Figura 6.1.2a, y sea

$$y(n) = x\left(-\frac{n}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

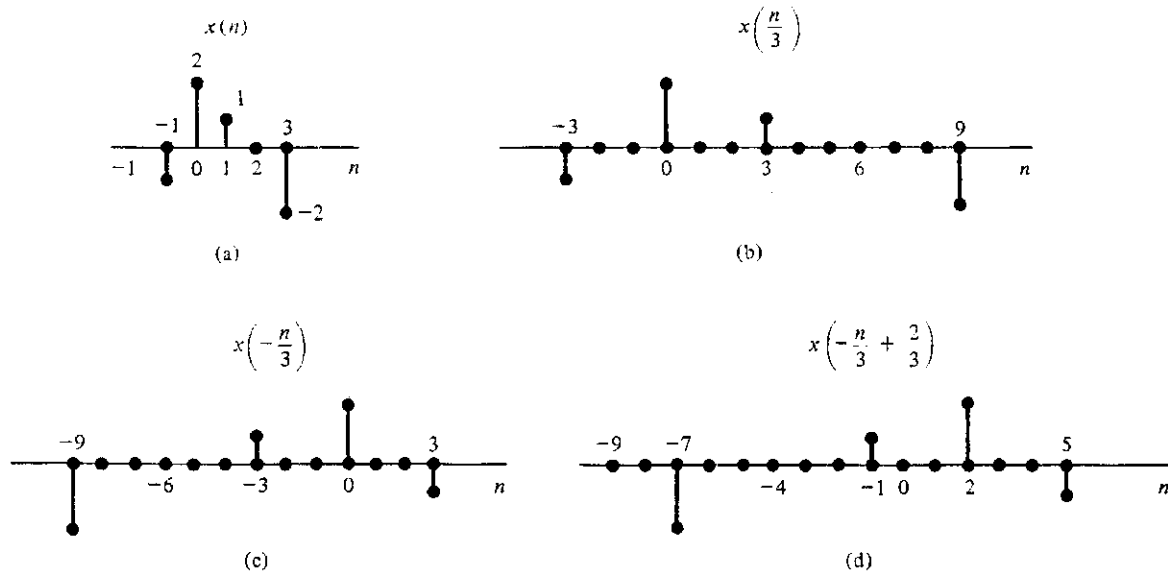


Figura 6.1.2. Las señales del Ejemplo 6.1.5. (a) $x(n)$, (b) $x(n/3)$, (c) $x(-n/3)$, (d) $x(-n/3 + 2/3)$.

Para determinar $y(n)$ la expresaremos de la siguiente forma

$$y(n) = x\left[-\frac{(n-2)}{3}\right]$$

En primer lugar aplicaremos a $x(n)$ un factor de escala de $1/3$ para obtener $x(n/3)$. Seguidamente reflejaremos la señal anterior con respecto al eje vertical, obteniendo así $x(-n/3)$. El resultado se desplaza a la derecha dos muestras, con lo que se obtiene $y(n)$. Las Figuras 6.1.2b-6.1.2d ilustran los pasos anteriores. La secuencia resultante es

$$y(n) = [-2, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, -1]$$

↑

6.2. SEÑALES ELEMENTALES EN TIEMPO DISCRETO

Hasta el momento hemos visto que las señales en tiempo continuo se pueden representar utilizando señales elementales como la función delta, la función escalón unidad, las exponenciales, y las señales seno y coseno. Consideraremos ahora los equivalentes en tiempo discreto de estas señales, y veremos que tienen características similares a las de sus equivalentes en tiempo continuo, pero con algunas diferencias importantes. Como en el caso de sistemas en tiempo continuo, el análisis de la respuesta de sistemas lineales a entradas arbitrarias se simplifica considerablemente si se expresa dicha entrada en función de estas señales elementales.

6.2.1. Funciones discretas impulso y escalón

La función impulso unidad en tiempo discreto se define así:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (6.2.1)$$

como muestra la Figura 6.2.1. $\delta(n)$ es la muestra unidad en $n = 0$ y la función desplazada $\delta(n - k)$ es la muestra unidad en $n = k$. Es decir

$$\delta(n - k) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \quad (6.2.2)$$

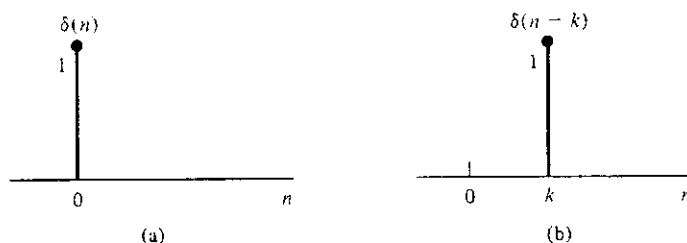


Figura 6.2.1. (a) La función impulso unidad o función δ . (b) La función δ desplazada.

Aunque $\delta(n)$ es en cierta forma similar a la función impulso unidad en tiempo continuo $\delta(t)$, el valor del impulso discreto es siempre finito. Por tanto, la definición de $\delta(n)$ no tiene dificultades analíticas.

La Figura 6.2.2 muestra la secuencia escalón unidad, que se define así:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (6.2.3)$$

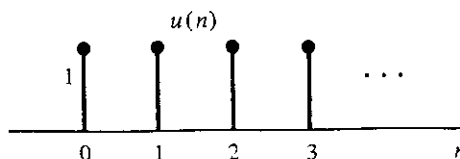


Figura 6.2.2. La función escalón unidad.

Las funciones delta y escalón en tiempo discreto poseen propiedades en cierta forma similares a sus equivalentes en tiempo continuo. Por ejemplo, la *primera diferencia* de la función escalón unidad es

$$u(n) - u(n-1) = \delta(n) \quad (6.2.4)$$

Calculemos la suma desde $-\infty$ hasta n de la función delta. Como se muestra en la Figura 6.2.3, obtenemos la función escalón unidad.

$$\sum_{k=-\infty}^n \delta(k) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad (6.2.5)$$

$$= u(n)$$

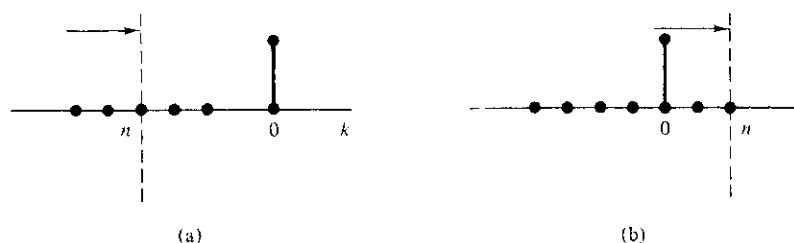


Figura 6.2.3. Suma acumulativa de la función δ . (a) $n < 0$. (b) $n \geq 0$.

Sustituyendo k por $n - k$ en la Ecuación (6.2.5) resulta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k) = u(n) \quad (6.2.6)$$

Observando las Ecuaciones (6.2.4) y (6.2.5) vemos que en los sistemas en tiempo discreto la primera diferencia hace en cierto sentido las veces de la primera derivada en los sistemas en tiempo continuo, y el operador suma sustituye a la integral.

Se pueden obtener fácilmente otras propiedades de la función δ . Para cualquier secuencia arbitraria $x(n)$ tenemos

$$x(n)\delta(n - k) = x(k)\delta(n - k) \quad (6.2.7)$$

Como $x(n)$ se puede escribir así:

$$x(n) = \dots + x(-1)\delta(n + 1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n - 1) + \dots$$

tenemos que

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) \quad (6.2.8)$$

Por consiguiente, la Ecuación (6.2.6) es un caso particular de la Ecuación (6.2.8).

6.2.2. Secuencias exponenciales

La expresión de una secuencia exponencial en tiempo discreto es

$$x(n) = Cz^n \quad (6.2.9)$$

donde, en general, C y α son números complejos. Se puede ver que esta señal es análoga a la función exponencial en tiempo continuo, sin más que hacer $\alpha = e^\beta$, con lo que resulta

$$x(n) = C e^{\beta n} \quad (6.2.10)$$

Si C y α son números reales, $x(n)$ crece con n si $|\alpha| > 1$. Análogamente, si $|\alpha| < 1$ tenemos una exponencial decreciente.

Consideremos la señal exponencial compleja en tiempo continuo

$$x(t) = C \exp[j\omega_0 t] \quad (6.2.11)$$

Supongamos que muestreamos $x(t)$ en intervalos equiespaciados nT y obtenemos la señal en tiempo discreto

$$x(n) = C \exp[j\omega_0 T n] \quad (6.2.12)$$

Sustituyendo en esta ecuación $\omega_0 T$ por Ω_0 obtenemos la exponencial compleja en tiempo discreto

$$x(n) = C \exp[j\Omega_0 n] \quad (6.2.13)$$

Donde ω_0 es la frecuencia de la señal en tiempo continuo $x(t)$. Análogamente, llamaremos a Ω_0 frecuencia de la señal en tiempo discreto $x(n)$. Sin embargo, se puede ver que mientras que la frecuencia en tiempo continuo o analógica ω_0 se mide en radianes por segundo, la frecuencia en tiempo discreto Ω_0 se mide en radianes.

Es más, la señal $x(t)$ es periódica de período $T = 2\pi/\omega_0$ para todo ω_0 , pero en el caso de tiempo discreto, como el período debe ser un número entero, no todos los valores de Ω_0 producen una señal periódica. Para verlo, supongamos que $x(n)$ en la Ecuación (6.2.13) es periódica de período N . Como $x(n) = x(n + N)$ debe cumplirse que

$$e^{j\Omega_0 N} = 1$$

Para ello, $\Omega_0 N$ debe ser un múltiplo entero de 2π , con lo que

$$\Omega_0 N = m2\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \text{ etc.}$$

o

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

para valores enteros de m . Por tanto, $x(n)$ sólo será periódica si $\Omega_0/2\pi$ es un número racional. El período es $N = 2\pi m/\Omega_0$, y el período fundamental se obtiene con el valor más pequeño posible de m .

Ejemplo 6.2.1 Sea la señal

$$x(n) = \exp\left[j \frac{7\pi}{9} n\right]$$

Para esta señal

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{7}{18} = \frac{m}{N}$$

luego la secuencia es periódica y el período fundamental, que se obtiene tomando $m = 7$, es $N = 18$.

Ejemplo 6.2.2 Dada la secuencia

$$x(n) = \exp \left[j \frac{7n}{9} \right]$$

tenemos

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{7}{18\pi}$$

que no es un número racional. Por tanto, la secuencia no es periódica.

Sea $x_k(n)$ una señal del conjunto de funciones definido así:

$$x_k(n) = e^{jk\Omega_0 n} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.2.14)$$

con $\Omega_0 = 2\pi/N$. $x_k(n)$ representa el k -ésimo armónico de la señal fundamental $x_1(n)$. En el caso de señales en tiempo continuo, vimos que el conjunto de armónicos $\exp[jk(2\pi/T)t]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ son todos diferentes; es decir, hay un número infinito de armónicos. Sin embargo, en el caso de tiempo discreto, como

$$x_{k+N}(n) = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{j2\pi n} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = x_k(n) \quad (6.2.15)$$

sólo hay N señales distintas en el conjunto definido por la Ecuación (6.2.14), que corresponden a las frecuencias $\Omega_k = 2\pi k/N$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$. Como $\Omega_{k+N} = \Omega_k + 2\pi$, las señales con frecuencias separadas 2π son idénticas. Como veremos posteriormente, esto tiene implicaciones en el análisis de Fourier de señales periódicas en tiempo discreto.

Ejemplo 6.2.3 Consideremos la señal en tiempo continuo

$$x(t) = \sum_{k=-2}^2 c_k e^{jk\frac{2\pi}{3}t}$$

siendo $c_0 = 1$, $c_1 = (1 + j1) = c_{-1}^*$ y $c_2 = c_{-2}^* = 3/2$.

Si muestreamos la señal $x(t)$ con un período de muestreo uniforme de $T = 4$ obtenemos la señal muestreada

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=-2}^2 c_k e^{jk\frac{2\pi}{3}4n} \\ &= \sum_{k=-2}^2 c_k e^{jk\Omega_0 n} \end{aligned}$$

con $\Omega_0 = 4(2\pi/3)$. Por tanto, $x(n)$ representa la suma de señales armónicas de período fundamental $N = 2\pi m/\Omega_0$. Si escogemos $m = 4$ obtenemos $N = 3$. Por consiguiente, sólo hay tres armónicos diferentes, y la suma se podrá reducir a tres términos.

Para comprobarlo, observemos que aplicando la Ecuación (6.2.15), tenemos que $\exp(j2\Omega_0 n) = \exp(-j\Omega_0 n)$ y $\exp(j(-2\Omega_0 n)) = \exp(j\Omega_0 n)$. Agrupando términos resulta entonces

$$x(n) = \sum_{k=-1}^1 d_k e^{jk\frac{2\pi}{3}n}$$

siendo

$$d_0 = c_0 = 1, d_1 = c_1 + c_{-2} = -1 + j\frac{1}{2}, d_{-1} = c_{-1} + c_2 = -1 - j\frac{1}{2} = d_1^*$$

6.3. SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO

Un sistema en tiempo discreto es aquel en el que todas las señales son señales en tiempo discreto. En otras palabras, un sistema en tiempo discreto transforma entradas en tiempo discreto en salidas en tiempo discreto. Los conceptos de linealidad, invarianza con el tiempo, causalidad, etc., definidos para sistemas en tiempo continuo se aplican igual a los sistemas en tiempo discreto. Como en el caso de sistemas en tiempo continuo, en el caso de tiempo discreto consideraremos sólo sistemas lineales e invariantes con el tiempo (o *invariantes a desplazamientos*).

Y también de forma análoga al caso de tiempo continuo, los sistemas en tiempo discreto se pueden caracterizar en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Esta sección está dedicada a la caracterización de sistemas en tiempo discreto en el dominio del tiempo empleando (a) la respuesta al impulso y (b) las representaciones mediante ecuaciones en diferencias.

Consideremos un sistema en tiempo discreto lineal e invariante a desplazamientos cuya entrada es la señal $x(n)$. Vimos en la Sección 6.2.1 que cualquier señal $x(n)$ se puede expresar como una suma ponderada de funciones muestra unidad desplazadas

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (6.3.1)$$

Por lo tanto, podemos utilizar la propiedad de linealidad para determinar la respuesta del sistema a la señal $x(n)$, en términos de su respuesta a la entrada muestra unidad. Sea $h(n)$ la respuesta del sistema en el instante n a un impulso unidad aplicado a su entrada en el instante cero. Si aplicamos a su entrada un impulso desplazado al instante k , $\delta(n-k)$, entonces, por la hipótesis de invarianza temporal, la respuesta del sistema en el instante n es $h(n-k)$. Si la amplitud de la entrada se multiplica por un factor $x(k)$, entonces, por la hipótesis de linealidad, la salida queda multiplicada por el mismo factor. Si fijamos ahora n , hacemos variar k desde $-\infty$ a ∞ , tomamos la suma y tenemos en cuenta la Ecuación (6.3.1), la salida del sistema en el instante n se puede expresar en función de la entrada:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (6.3.2)$$

Como en el caso de sistemas en tiempo continuo, la respuesta al impulso se determina suponiendo que el sistema no tiene energía inicial ya que si no fuera así, no se podría aplicar la propiedad de linealidad (¿por qué?). $y(n)$, determinada de acuerdo con la Ecuación (6.3.2), corresponde sólo a la respuesta forzada del sistema.

El lado derecho de la Ecuación (6.3.2) se denomina *suma de convolución* de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$, y se representa simbólicamente como $x(n) * h(n)$. Sustituyendo k por $n - k$ en la ecuación, la salida se puede escribir también de la siguiente forma

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \\ &= h(n) * x(n) \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Es decir, la operación de convolución es conmutativa. Si el sistema es causal, se debe cumplir que

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad (6.3.4)$$

con lo que la Ecuación (6.3.2) se puede escribir

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) \quad (6.3.5)$$

o en la forma equivalente

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)h(k) \quad (6.3.6)$$

Para sistemas en tiempo continuo, vimos que la respuesta al impulso es en general la suma de varias exponenciales complejas. En consecuencia, la respuesta al impulso puede ser diferente de cero en cualquier intervalo temporal finito (excepto posiblemente en algunos puntos aislados). Estos sistemas se denominan de *respuesta al impulso infinita* (IIR-infinite impulse response). En sistemas discretos, la respuesta al impulso puede anularse tras algunas muestras. En este caso se dice que el sistema es de *respuesta al impulso finita* (FIR-finite impulse response). Los sistemas en tiempo discreto pueden ser IIR o FIR.

La Ecuación (6.3.2) se puede interpretar de manera similar al caso de tiempo continuo. Dado un valor fijo de n , consideramos el producto de las dos secuencias $x(k)$ y $h(n-k)$. $h(n-k)$ se obtiene partiendo de $h(k)$, reflejándola respecto al origen y desplazándola a la derecha n muestras si n es positivo y $|n|$ muestras si n es negativo. La Figura 6.3.1 ilustra esta idea. La salida $y(n)$ para este valor de n se determina sumando los valores de la secuencia $x(k)h(n-k)$.

Nótese que la convolución de $h(n)$ con $\delta(n)$ es por definición igual a $h(n)$. Es decir, la convolución de cualquier función con la función δ nos devuelve la función original. A continuación presentaremos algunos ejemplos.

Ejemplo 6.3.1

Si la señal de entrada $x(n) = 3\delta(n-2)$ se aplica a un sistema lineal, causal e invariante con el tiempo la salida es

$$y(n) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 8\left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 2$$

encontrar la respuesta al impulso $h(n)$ del sistema.

Por definición, $h(n)$ es la respuesta del sistema a la entrada $\delta(n)$. Como el sistema es LTI, se deduce que

$$h(n) = \frac{1}{3} y(n+2)$$

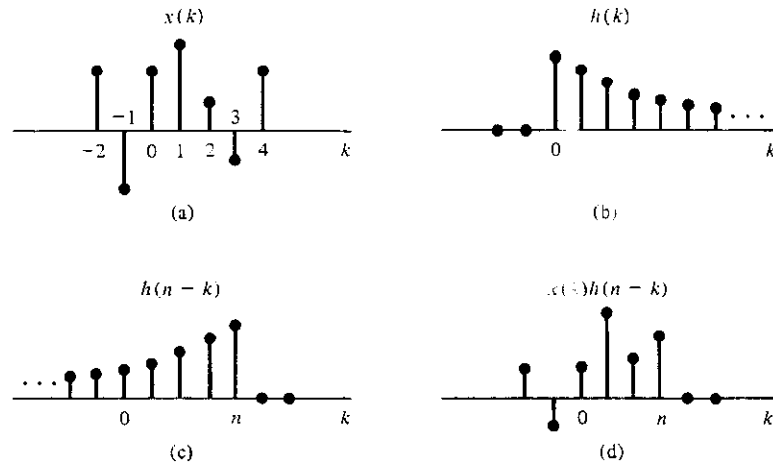


Figura 6.3.1. Operación de convolución de la Ecuación (6.3.2). (a) $x(k)$, (b) $h(k)$, (c) $h(n-k)$ y (d) $x(k)h(n-k)$.

La salida se puede expresar de la siguiente forma

$$y(n) = \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^{(n-2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-2} \right] u(n-2)$$

de forma que

$$h(n) = \frac{1}{6} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] u(n)$$

Ejemplo 6.3.2 Sea la señal

$$x(n) = \alpha^n u(n)$$

$$h(n) = \beta^n u(n)$$

Entonces

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u(k) \beta^{n-k} u(n-k)$$

Como $u(k) = 0$ para $k < 0$, y $u(n-k) = 0$ para $k > n$, podemos escribir la suma así:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{n-k} = \beta^n \sum_{k=0}^n (\alpha \beta^{-1})^k$$

Es claro que $y(n) = 0$ si $n < 0$.

Para $n \geq 0$, si $\alpha = \beta$ tenemos que

$$y(n) = \beta^n \sum_{k=0}^n (1) = (n+1)\beta^n$$

Si $\alpha \neq \beta$, la suma se puede expresar de forma cerrada utilizando la fórmula (véase Problema 6.6)

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a^k = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1 - a}, \quad a \neq 1 \quad (6.3.7)$$

Suponiendo que $\alpha\beta^{-1} \neq 1$, podemos escribir

$$y(n) = \beta^n \frac{1 - (\alpha\beta^{-1})^{n+1}}{1 - \alpha\beta^{-1}} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

Como un caso especial de este ejemplo, sea $\alpha = 1$, con lo que la señal $x(n)$ se convierte en el escalón unidad. La respuesta al escalón de este sistema se obtiene haciendo $\alpha = 1$ en la última expresión de $y(n)$ y vale

$$y(n) = \frac{1 - \beta^{n+1}}{1 - \beta}$$

En general, como puede verse si hacemos $x(n) = u(n)$ en la Ecuación (6.3.3), la respuesta al escalón de un sistema con respuesta al impulso $h(n)$ es

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k) \quad (6.3.8)$$

Si el sistema es causal, se reduce a

$$s(n) = \sum_{k=0}^n h(k) \quad (6.3.9)$$

Es decir, dada la respuesta al escalón $s(n)$ de un sistema, se puede encontrar la respuesta al impulso aplicando

$$h(n) = s(n) - s(n-1) \quad (6.3.10)$$

Ejemplo 6.3.3

Deseamos encontrar la respuesta al escalón de un sistema cuya respuesta al impulso es

$$h(n) = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n \cos \left(\frac{2\pi}{3} n \right) u(n)$$

$h(n)$ se puede escribir

$$h(n) = \left[\left(\frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi}{3}} \right)^n + \left(\frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi}{3}} \right)^n \right] u(n)$$

y aplicando la correspondiente ecuación del Ejemplo 6.3.2 encontramos que la respuesta al escalón es

$$s(n) = \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}}} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}}} \right] u(n)$$

que podemos simplificar:

$$s(n) = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} n\right), \quad n \geq 0$$

Podemos emplear la Ecuación (6.3.10) para verificar que este resultado es correcto obteniendo la respuesta al impulso

$$\begin{aligned} h(n) &= s(n) - s(n-1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} n\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} (n-1)\right) \end{aligned}$$

que se puede simplificar obteniéndose la respuesta al impulso planteada al comienzo del ejemplo.

Los siguientes ejemplos consideran la convolución de secuencias de longitud finita.

Ejemplo 6.3.4

Sea $x(n)$ una secuencia finita distinta de cero en el intervalo $n \in [N_1, N_2]$, y $h(n)$ una secuencia finita distinta de cero en el intervalo $n \in [N_3, N_4]$. Para un valor de n fijo, $h(n-k)$ es distinta de cero en el intervalo $k \in [n-N_4, n-N_3]$, y $x(k)$ es distinto de cero en el intervalo $k \in [N_1, N_2]$. Por tanto, el producto $x(k)h(n-k)$ es cero si $n-N_3 < N_1$ o si $n-N_4 > N_2$. En consecuencia, $y(n)$ es distinto de cero sólo en el intervalo $n \in [N_1 + N_3, N_2 + N_4]$.

Sea $M = N_2 - N_1 + 1$ la longitud de la secuencia $x(n)$ y $N = N_4 - N_3 + 1$ la longitud de la secuencia $h(n)$. La longitud de la secuencia $y(n)$, que es $(N_2 + N_4) - (N_1 + N_3) + 1$, es igual por tanto a $M + N - 1$. Es decir, la convolución de una secuencia de M puntos con otra secuencia de N puntos produce una secuencia de $M + N - 1$ puntos.

Ejemplo 6.3.5

Sean $h(n) = \{1, 2, 0, -1, 1\}$ y $x(n) = \{1, 3, -1, -2\}$ dos secuencias causales. Como $h(n)$ es una secuencia de cinco puntos y $x(n)$ una secuencia de cuatro puntos, aplicando el resultado del Ejemplo 6.3.3, tenemos que $y(n)$ será una secuencia de ocho puntos que valdrá cero para $n < 0$ ó $n > 7$.

Como las dos secuencias son finitas, podemos realizar la convolución de forma sencilla, construyendo una tabla de valores con $h(k)$ y $x(n-k)$ para los valores relevantes de n y utilizando la expresión

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k)$$

como se muestra en la Tabla 6.1. Los valores de $x(n - k)$ que aparecen en la tabla se obtienen reflejando en primer lugar $x(k)$ respecto al origen, con lo que se obtiene $x(-k)$. Después se desplaza sucesivamente la secuencia resultante una muestra a la derecha. Todos los valores que no se indican explícitamente se supone que valen cero. La salida $y(n)$ se obtiene multiplicando las filas correspondientes a $h(k)$ y $x(n - k)$ y sumando los resultados. Por ejemplo, para obtener $y(0)$ se multiplican los valores de las filas 2 y 4. Para obtener $y(1)$, se multiplican las filas 2 y 5, y así sucesivamente. Las últimas dos columnas contienen n e $y(n)$, respectivamente.

Tabla 6.1. Tabla de convolución del Ejemplo 6.3.4

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	n	$y(n)$
$h(k)$				1	2	0	-1	1					
$x(k)$				1	3	-1	-2						
$x(-k)$	-2	-1	3	1								0	1
$x(1-k)$		-2	-1	3	1							1	5
$x(2-k)$			-2	-1	3	1						2	5
$x(3-k)$				-2	-1	3	1					3	-5
$x(4-k)$					-2	-1	3	1				4	-6
$x(5-k)$						-2	-1	3	1			5	4
$x(6-k)$							-2	-1	3	1		6	1
$x(7-k)$								-2	-1	3	1	7	-2

Observando la última columna de la tabla vemos que

$$y(n) = \{1, 5, 5, -5, -6, 4, 1, -2\}$$

Ejemplo 6.3.6 Podemos utilizar una forma tabular alternativa para determinar $y(n)$ si nos damos cuenta de que

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + \dots \\ + h(-1)x(n+1) + h(-2)x(n+2) + \dots$$

Consideraremos entonces la convolución de las secuencias

$$h(n) = \{-2, 2, 0, -1, 1\} \quad y \quad x(n) = \{-1, 3, -1, -2\}$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$

La convolución tabular se muestra en la Tabla 6.2. Las filas 2 a 5 contienen $x(n - k)$ para los valores relevantes de k , concretamente $k = -1, 0, 1, 2$ y 3 . Los valores de $h(k)x(n - k)$ se muestran en las filas 7 a 11. Se obtiene $y(n)$, para cada valor de n , sumando por columnas los correspondientes valores.

Finalmente, comentaremos que de igual forma que la convolución en tiempo continuo, la convolución en tiempo discreto definida en la Ecuación (6.3.2) tiene las propiedades asociativa, distributiva y conmutativa. Esto posibilita la obtención de la respuesta al impulso de combinaciones de sistemas en serie o en paralelo en función de las respuestas al impulso de cada sistema, como se muestra en la Figura 6.3.2.

Tabla 6.2. Tabla de convolución del Ejemplo 6.3.5

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x(n+1)$	-1	3	-1	-2				
$x(n)$		-1	3	-1	-2			
$x(n-1)$			-1	3	-1	-2		
$x(n-2)$				-1	3	-1	-2	
$x(n-3)$					-1	3	-1	-2
$h(-1)x(n+1)$	2	-6	2	4				
$h(0)x(n)$		-2	6	-2	-4			
$h(1)x(n-1)$			0	0	0	0	0	
$h(2)x(n-2)$				1	-3	1	2	
$h(3)x(n-3)$					-1	3	-1	-2
$y(n)$	2	-8	8	3	-8	4	1	-2

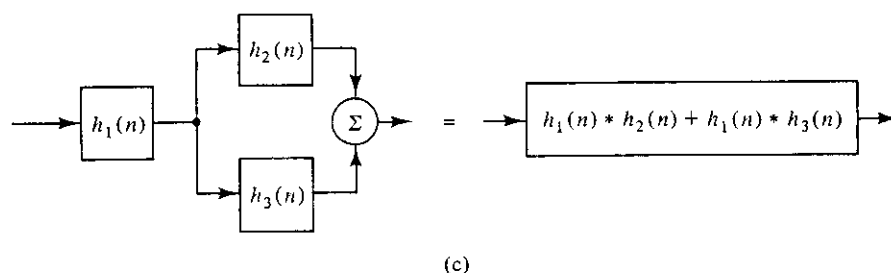
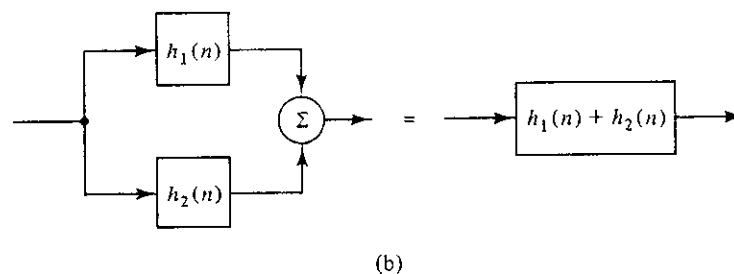
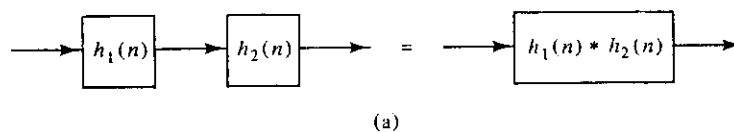


Figura 6.3.2. Respuestas al impulso de combinaciones en serie y en paralelo.

Ejemplo 6.3.7 Consideremos el sistema que se muestra en la Figura 6.3.3 con

$$h_1(n) = \delta(n) - a\delta(n-1)$$

$$h_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$h_3(n) = a^n u(n)$$

$$h_4(n) = (n-1)u(n)$$

y

$$h_5(n) = \delta(n) + nu(n-1) + \delta(n-2)$$

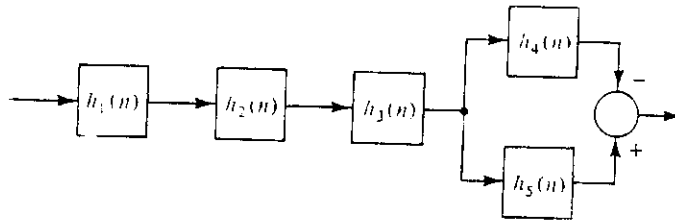


Figura 6.3.3. El sistema del Ejemplo 6.3.7.

Se puede observar claramente en la figura que

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) * h_3(n) * [h_5(n) - h_4(n)]$$

Para obtener $h(n)$, calculamos primero la convolución $h_1(n) * h_3(n)$

$$\begin{aligned} h_1(n) * h_3(n) &= [\delta(n) - a\delta(n-1)] * a^n u(n) \\ &= a^n u(n) - a^n u(n-1) = \delta(n) \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} h_5(n) - h_4(n) &= \delta(n) + nu(n-1) + \delta(n-2) - (n-1)u(n) \\ &= \delta(n) + \delta(n-2) + u(n) \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} h(n) &= \delta(n) * h_2(n) * [\delta(n) + \delta(n-2) + u(n)] \\ &= h_2(n) + h_2(n-2) + s_2(n) \end{aligned}$$

siendo $s_2(n)$ la respuesta al escalón correspondiente a la respuesta al impulso $h_2(n)$ [véase Ecuación (6.3.9)]. Tenemos entonces que

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

que se puede expresar en forma cerrada utilizando la Ecuación (6.3.7)

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) + 2u(n)$$

6.4. CONVOLUCIÓN PERIÓDICA

En ciertas aplicaciones es deseable considerar la convolución de dos secuencias periódicas $x_1(n)$ y $x_2(n)$, con período común N . Pero la convolución de dos secuencias periódicas en

el sentido que indican las Ecuaciones (6.3.2) y (6.3.3) no converge. Esto se puede comprobar si hacemos $k = rN + m$ en la Ecuación (6.3.2) y transformamos la suma en k en una doble suma en r y m :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(rN+m)x_2(n-rN-m)$$

Como las dos secuencias del lado derecho son periódicas de período N , tenemos que

$$y(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m)$$

Dado un valor fijo de n , la suma interna es constante, por lo que la suma infinita no converge.

Para solucionar este problema definimos, como en el caso de tiempo continuo, una forma diferente de convolución de señales periódicas que se denomina convolución periódica:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k) \quad (6.4.1)$$

Nótese que la suma del lado derecho sólo tiene N términos. Esta operación la expresaremos así:

$$y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) \quad (6.4.2)$$

Sustituyendo k por $n-k$ en la Ecuación (6.4.1) obtenemos la forma equivalente

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(n-k)x_2(k) \quad (6.4.3)$$

Hay que recalcar que la convolución periódica se define sólo para secuencias del mismo período. Como la convolución de la Ecuación (6.3.2) representa la salida de un sistema lineal, es usual denominarla *convolución lineal*, para distinguirla de la convolución definida en la Ecuación (6.4.1).

Se puede ver que la señal $y(n)$ definida en la Ecuación (6.4.1) es periódica, ya que

$$y(n+N) = \sum_{k=0}^{N-1} x_2(n+N-k)x_1(k) = y(n) \quad (6.4.4)$$

de modo que sólo hace falta calcularla en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$. También se puede verificar fácilmente que la suma se puede realizar en cualquier período (véase Problema 6.12). Es decir,

$$y(n) = \sum_{k=N_0}^{N_0+N-1} x_1(k)x_2(n-k) \quad (6.4.5)$$

En la operación de convolución definida en la Ecuación (6.4.1) aparece la señal $x_2(n-k)$, que se obtiene a partir de la señal $x_2(n)$ mediante sucesivos desplazamientos a la

derecha. Sin embargo, sólo estamos interesados en los valores de n en el intervalo $0 \leq n \leq N - 1$. En cada desplazamiento a la derecha, el primer valor en este intervalo es sustituido por el valor en -1 . Como la secuencia es periódica, este valor coincide con el valor en $N - 1$ como muestra el ejemplo de la Figura 6.4.1. Por lo tanto podemos suponer que en cada sucesivo desplazamiento, los valores de la secuencia se desplazan una posición a la derecha, y el último valor vuelve a la primera posición. Este tipo de desplazamiento se denomina desplazamiento *periódico* o *circular*.

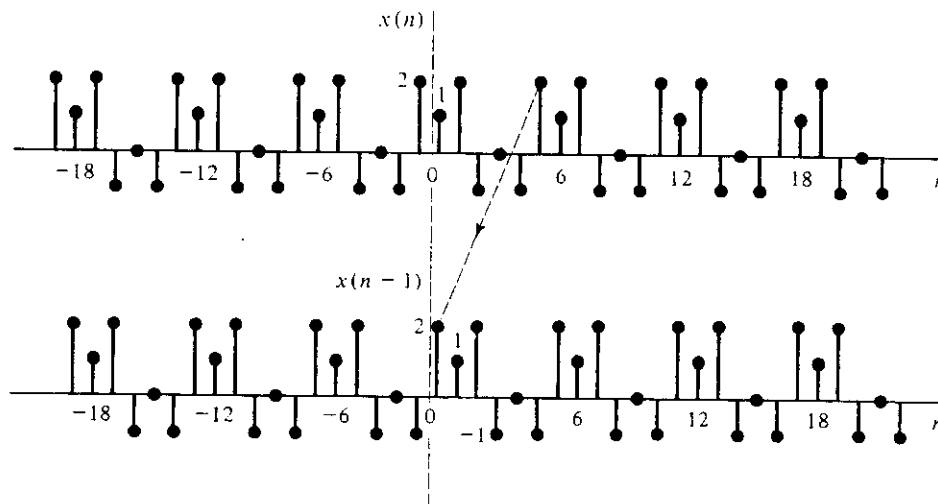


Figura 6.4.1. Desplazamiento de dos secuencias periódicas.

Aplicando la Ecuación (6.4.1), $y(n)$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$y(n) = x_1(0)x_2(n) + x_1(1)x_2(n-1) + \dots + x_1(N-1)x_2(n-N+1)$$

$y(n)$ se puede calcular mediante la forma tabular utilizada en el Ejemplo 6.3.6. Sin embargo, como la suma se realiza sólo para valores de n desde 0 hasta $N - 1$, la tabla sólo tendrá N columnas. A continuación presentamos un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 6.4.1 Consideremos la convolución de las *extensiones periódicas* de dos secuencias:

$$x(n) = \{1, 2, 0, -1\} \quad \text{y} \quad h(n) = \{1, 3, -1, -2\}$$

$y(n)$ será por tanto periódica de período $N = 4$. La Tabla 6.3 ilustra los pasos seguidos para obtener $y(n)$. Para los valores $n = 0, 1, 2, 3$, las filas 2 a 5 muestran los valores de $x(n-k)$ que se obtienen mediante desplazamientos circulares de $x(n)$. Las filas 6 a 9 muestran los valores de $h(k)x(n-k)$. La salida $y(n)$ se determina sumando por columnas los valores de esas filas.

Aunque hemos definido la convolución periódica en términos de secuencias periódicas, dadas dos secuencias de longitud finita podemos definir de manera análoga su convolu-

ción periódica. Dadas dos secuencias de N puntos $x_1(n)$ y $x_2(n)$, definimos su convolución periódica de N puntos:

$$y_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k) \quad (6.4.6)$$

donde el desplazamiento $x_2(n-k)$ debe ser periódico.

Tabla 6.3. La convolución periódica del Ejemplo 6.4.1

n	0	1	2	3
$x(n)$	1	2	0	-1
$x(n-1)$	-1	1	2	0
$x(n-2)$	0	-1	1	2
$x(n-3)$	2	0	-1	1
$h(0)x(n)$	1	2	0	-1
$h(1)x(n-1)$	-3	3	6	0
$h(2)x(n-2)$	0	1	-1	-2
$h(3)x(n-3)$	-4	0	2	-2
$y(n)$	-6	6	7	-5

Para distinguir la señal $y(n)$ presentada en la sección anterior de la señal $y_p(n)$, $y(n)$ se denomina generalmente convolución *lineal* de las secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$, puesto que corresponde a la salida de un sistema lineal en respuesta a una entrada determinada.

La señal $y_p(n)$ definida en la Ecuación (6.4.6) coincide con la convolución periódica de las extensiones periódicas de las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$. Por tanto, $y_p(n)$ será periódica de período N . Si las dos secuencias no tienen la misma longitud, podemos definir todavía su convolución sin más que aumentar con ceros la secuencia más corta hasta que las dos tengan la misma longitud. Esta operación se denomina *relleno con ceros* o *ampliación con ceros*. Como al rellenar con ceros una secuencia de longitud finita no se modifica la secuencia, dadas dos secuencias de longitudes N_1 y N_2 se puede definir su convolución periódica de longitud arbitraria M , que indicaremos por $[y_p(n)]_M$. Lógicamente, se deberá cumplir que $M \geq \max\{N_1, N_2\}$. En el siguiente ejemplo ilustramos esta idea.

Ejemplo 6.4.2

Consideremos la convolución periódica de las secuencias $h(n) = \{1, 2, 0, -1, 1\}$ y $x(n) = \{1, 3, -1, -2\}$ del Ejemplo 6.3.5. Para valores de $M \geq 5$, se puede realizar la convolución periódica de M puntos de las dos secuencias rellenándolas adecuadamente con ceros y siguiendo el procedimiento presentado en el Ejemplo 6.4.1. Por ejemplo, para $M = 5$ formamos la secuencia

$$x_a(n) = \{1, 3, -1, -2, 0\}$$

con lo que ahora $h(n)$ y $x_a(n)$ tienen una longitud de cinco puntos. Se puede verificar fácilmente que

$$[y_p(n)]_5 = \{5, 6, 3, -5, -6\}$$

Comparando este resultado con el valor de $y(n)$ obtenido en el Ejemplo 6.3.5, vemos que los tres primeros valores de $y(n)$ e $[y_p(n)]_5$ son diferentes, y los dos valores siguientes son iguales. De hecho,

$$[y_p(0)]_5 = y(0) + y(6), [y_p(1)]_5 = y(1) + y(7), [y_p(2)]_5 = y(2) + y(8)$$

Análogamente, se puede verificar que la convolución circular de ocho puntos de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$, realizada considerando las secuencias ampliadas

$$x_a(n) = \{1, 3, -1, -2, 0, 0, 0, 0\}$$

y

$$h_a(n) = \{1, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 0\}$$

es

$$[y_p(n)]_8 = \{1, 5, 5, -5, -6, 4, 1, -2\}$$

que coincide exactamente con la señal $y(n)$ obtenida en el Ejemplo 6.3.5.

El anterior ejemplo muestra que la convolución periódica $y_p(n)$ de dos secuencias de longitud finita está relacionada con su convolución lineal $y_l(n)$. En la Sección 9.4 exploraremos esta relación.

6.5. REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO MEDIANTE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Ya sabemos que es posible caracterizar a un sistema en tiempo continuo, utilizando la ecuación diferencial que relaciona la salida del sistema y sus derivadas con la entrada del sistema y sus derivadas. El equivalente en tiempo discreto de esta caracterización es la ecuación en diferencias que para sistemas lineales e invariantes con el tiempo tiene la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad n \geq 0 \quad (6.5.1)$$

siendo a_k y b_k constantes conocidas.

Definiendo el operador

$$D^k y(n) = y(n-k) \quad (6.5.2)$$

podemos escribir la Ecuación (6.5.1) de la siguiente forma

$$\sum_{k=0}^N a_k D^k y(n) = \sum_{k=0}^M b_k D^k x(n) \quad (6.5.3)$$

Nótese que a veces se expresa la Ecuación (6.5.1) en una forma alternativa

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n+k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n+k), \quad n \geq 0 \quad (6.5.4)$$

En esta forma, si el sistema es causal debe cumplirse que $M \leq N$.

La solución de la Ecuación (6.5.1) o de la Ecuación (6.5.4) se puede expresar, por analogía con las ecuaciones diferenciales, como la suma de dos componentes: la solución homogénea, que depende de las condiciones iniciales que se suponen conocidas, y la solución particular, que depende de la entrada.

Antes de entrar en esta forma de solucionar la Ecuación (6.5.1), consideremos una vía alternativa, escribiendo la ecuación de esta forma

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right] \quad (6.5.5)$$

En esta ecuación la señal $x(n-k)$ es conocida. Si $y(n-k)$ es también conocida, se puede determinar $y(n)$. Haciendo en la Ecuación (6.5.5) $n=0$ obtenemos

$$y(0) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(-k) \right] \quad (6.5.6)$$

Los valores $y(-k)$ para $k=1, 2, \dots, N$ representan las condiciones iniciales de la ecuación en diferencias y se suponen por tanto conocidos. Por lo tanto, como todos los términos del lado derecho de la ecuación son conocidos, se puede determinar $y(0)$.

Si hacemos ahora $n=1$ en la Ecuación (6.5.5) obtenemos

$$y(1) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(1-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(1-k) \right]$$

y utilizando el valor de $y(0)$ determinado anteriormente podemos obtener $y(1)$. Este proceso se puede repetir para valores sucesivos de n , determinándose así $y(n)$ por iteración.

Utilizando un argumento similar al anterior, podemos ver que las condiciones iniciales necesarias para resolver la Ecuación (6.5.4) son $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(N-1)$. Empezando con estas condiciones iniciales se puede resolver la Ecuación (6.5.4) de forma similar.

Ejemplo 6.5.1 Consideremos la ecuación en diferencias

$$y(n) - \frac{3}{4} y(n-1) + \frac{1}{8} y(n-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

con

$$y(-1) = 1 \quad \text{y} \quad y(-2) = 0$$

Entonces

$$y(n) = \frac{3}{4} y(n-1) - \frac{1}{8} y(n-2) + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

de forma que

$$y(0) = \frac{3}{4} y(-1) - \frac{1}{8} y(-2) + 1 = \frac{7}{4}$$

$$y(1) = \frac{3}{4} y(0) - \frac{1}{8} y(-1) + \frac{1}{2} = \frac{27}{16}$$

$$y(2) = \frac{3}{4} y(1) - \frac{1}{8} y(0) + \frac{1}{4} = \frac{83}{64}$$

etc.

Aunque el procedimiento iterativo descrito se puede utilizar para obtener la señal $y(n)$ para los diversos valores de n , no garantiza en general la obtención de una expresión cerrada que permita encontrar $y(n)$ para un valor de n arbitrario. Sin embargo, el procedimiento se puede realizar de forma muy sencilla en un computador. Consideraremos a continuación la solución analítica de la ecuación en diferencias determinando las soluciones homogénea y particular de la Ecuación (6.5.1).

6.5.1. Solución homogénea de la ecuación en diferencias

La solución homogénea de la Ecuación (6.5.1) es

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0 \quad (6.5.7)$$

Por analogía con el desarrollo que realizamos en el caso de tiempo continuo supondremos que la solución a esta ecuación tiene forma de exponencial

$$y_h(n) = A\alpha^n$$

Sustituyendo en la ecuación en diferencias obtenemos

$$\sum_{k=0}^N a_k A\alpha^{n-k} = 0$$

Por lo tanto, la solución homogénea deberá satisfacer la ecuación algebraica

$$\sum_{k=0}^N a_k \alpha^{-k} = 0 \quad (6.5.8)$$

La Ecuación (6.5.8) es la ecuación característica de la ecuación en diferencias, y los valores de que la satisfacen se denominan valores característicos. Claramente podemos ver que hay N raíces características $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ que pueden ser iguales o diferentes. Si son diferentes, las correspondientes soluciones características son independientes, y la solución homogénea $y_h(n)$ se puede obtener como una combinación lineal de términos de la forma α_i^n con lo que

$$y_h(n) = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \dots + A_N \alpha_N^n \quad (6.5.9)$$

Si hay raíces repetidas, generaremos N soluciones independientes multiplicando la correspondiente solución característica por la potencia adecuada de n . Por ejemplo, si la raíz α_1 tiene una multiplicidad de P_1 y las restantes $N - P_1$ raíces son diferentes, asumiremos una solución homogénea de la forma

$$\begin{aligned} y_h(n) = & A_1 \alpha_1^n + A_2 n \alpha_1^n + \dots + A_{P_1} n^{P_1-1} \alpha_1^n \\ & + A_{P_1+1} \alpha_{P_1+1}^n + \dots + A_N \alpha_N^n \end{aligned} \quad (6.5.10)$$

Ejemplo 6.5.2 Consideremos la ecuación

$$y(n) - \frac{13}{12} y(n-1) + \frac{3}{8} y(n-2) - \frac{1}{24} y(n-3) = 0$$

con

$$y(-1) = 6, \quad y(-2) = 6 \quad y(-3) = -2$$

La ecuación característica es

$$1 - \frac{13}{12} \alpha^{-1} + \frac{3}{8} \alpha^{-2} - \frac{1}{24} \alpha^{-3} = 0$$

o

$$\alpha^3 - \frac{13}{12} \alpha^2 + \frac{3}{8} \alpha - \frac{1}{24} = 0$$

que se puede factorizar de la siguiente forma

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\left(\alpha - \frac{1}{4}\right) = 0$$

con lo que las raíces características son

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4}$$

Como todas las raíces son diferentes, la solución homogénea tiene la forma

$$y_h(n) = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1}{3}\right)^n + A_3 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

La sustitución de las condiciones iniciales produce las siguientes ecuaciones con las incógnitas A_1 , A_2 y A_3 :

$$2A_1 + 3A_2 + 4A_3 = 6$$

$$4A_1 + 9A_2 + 16A_3 = 6$$

$$8A_1 + 27A_2 + 64A_3 = -2$$

de cuya resolución se obtiene

$$A_1 = 7, \quad A_2 = -\frac{10}{3}, \quad A_3 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la solución homogénea es igual a

$$y_h(n) = 7 \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{10}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Ejemplo 6.5.3 Consideremos la ecuación

$$y(n) - \frac{5}{4} y(n-1) + \frac{1}{2} y(n-2) - \frac{1}{16} y(n-3) = 0$$

con las mismas condiciones iniciales que en el ejemplo anterior. La ecuación característica es

$$1 - \frac{5}{4} \alpha^{-1} + \frac{1}{2} \alpha^{-2} - \frac{1}{16} \alpha^{-3} = 0$$

cuyas raíces son

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, podemos escribir la solución homogénea de la siguiente forma

$$y_h(n) = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_3 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y resolviendo la ecuación resultante obtenemos

$$A_1 = \frac{9}{2}, \quad A_2 = \frac{5}{4}, \quad A_3 = -\frac{1}{8}$$

con lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(n) = \frac{9}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{5n}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

6.5.2. La solución particular

Consideraremos ahora la determinación de la solución particular de la ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (6.5.11)$$

Podemos ver que el lado derecho de la ecuación es la suma ponderada de la entrada $x(n)$ con versiones retrasadas de la misma. Por lo tanto, podremos obtener $y_p(n)$, la solución particular de la Ecuación (6.5.11) determinando primero $\bar{y}(n)$, solución particular de la ecuación

$$\sum_{k=0}^N a_k \bar{y}(n-k) = x(n) \quad (6.5.12)$$

Utilizando el principio de superposición podemos escribir

$$y_p(n) = \sum_{k=0}^M b_k \bar{y}(n-k) \quad (6.5.13)$$

Para obtener $\bar{y}(n)$ supondremos que es una combinación lineal de $x(n)$ y de sus versiones retrasadas $x(n-1)$, $x(n-2)$, etc. Por ejemplo, si $x(n)$ es constante, también lo será $x(n-k)$

para todo k . Por tanto, $\bar{y}(n)$ será también constante. Análogamente, si $x(n)$ es una función exponencial de la forma β^n , $\bar{y}(n)$ será también exponencial de la misma forma. Si

$$x(n) = \text{sen } \Omega_0 n$$

entonces

$$x(n - k) = \text{sen } \Omega_0(n - k) = \cos \Omega_0 k \text{sen } \Omega_0 n - \text{sen } \Omega_0 k \cos \Omega_0 n$$

Tenemos entonces que

$$\bar{y}(n) = A \text{sen } \Omega_0 n + B \cos \Omega_0 n$$

$\bar{y}(n)$ tiene la misma forma cuando

$$x(n) = \cos \Omega_0 n$$

Las constantes desconocidas en la solución supuesta se pueden determinar sustituyendo en la ecuación en diferencias e igualando términos.

Como en el caso de la solución de ecuaciones diferenciales, la forma supuesta para la solución particular se debe modificar multiplicándola por la potencia adecuada de n si la función que causa la respuesta forzada tiene la misma forma que una de las soluciones características.

Ejemplo 6.5.4 Consideremos la ecuación en diferencias

$$y(n) - \frac{3}{4} y(n - 1) + \frac{1}{8} y(n - 2) = 2 \text{sen } \frac{n\pi}{2}$$

con condiciones iniciales

$$y(-1) = 2 \quad \text{y} \quad y(-2) = 4$$

Suponemos una solución particular de la forma

$$y_p(n) = A \text{sen } \frac{n\pi}{2} + B \cos \frac{n\pi}{2}$$

Entonces

$$y_p(n - 1) = A \text{sen } \frac{(n - 1)\pi}{2} + B \cos \frac{(n - 1)\pi}{2}$$

Utilizando identidades trigonométricas se puede verificar fácilmente que

$$\text{sen } \frac{(n - 1)\pi}{2} = -\cos \frac{n\pi}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{(n - 1)\pi}{2} = \text{sen } \frac{n\pi}{2}$$

de forma que

$$y_p(n - 1) = -A \cos \frac{n\pi}{2} + B \text{sen } \frac{n\pi}{2}$$

Análogamente, se puede demostrar que $y_p(n-2)$ vale

$$\begin{aligned} y_p(n-2) &= -A \cos \frac{(n-1)\pi}{2} + B \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \\ &= -A \sin \frac{n\pi}{2} - B \cos \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación en diferencias resulta

$$\left(A - \frac{3}{4}B - \frac{1}{8}A\right) \sin \frac{n\pi}{2} + \left(B + \frac{3}{4}A - \frac{1}{8}B\right) \cos \frac{n\pi}{2} = 2 \sin \frac{n\pi}{2}$$

Igualando términos obtenemos las siguientes ecuaciones para las constantes desconocidas A y B :

$$A - \frac{3}{4}B - \frac{1}{8}A = 2$$

$$B + \frac{3}{4}A - \frac{1}{8}B = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos

$$A = \frac{112}{85} \quad y \quad B = -\frac{96}{85}$$

de modo que la solución particular es

$$y_p(n) = \frac{112}{85} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{96}{85} \cos \frac{n\pi}{2}$$

Para encontrar la solución homogénea escribiremos la ecuación característica de la ecuación en diferencias

$$1 - \frac{3}{4}\alpha^{-1} + \frac{1}{8}\alpha^{-2} = 0$$

Como las raíces características son

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} \quad y \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

la solución homogénea vale

$$y_h(n) = A_1 \left(\frac{1}{4}\right)^n + A_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

con lo que la solución total resulta

$$y(n) = A_1 \left(\frac{1}{4}\right)^n + A_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{112}{85} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{96}{85} \cos \frac{n\pi}{2}$$

Podemos sustituir ahora las condiciones iniciales dadas para obtener las constantes A_1 y A_2

$$A_1 = -\frac{8}{17} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{13}{5}$$

de forma que

$$y(n) = -\frac{8}{17} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{13}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{112}{85} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{96}{85} \cos \frac{n\pi}{2}$$

Ejemplo 6.5.5 Consideremos la ecuación en diferencias

$$y(n) - \frac{3}{4} y(n-1) + \frac{1}{8} y(n-2) = x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$$

con

$$x(n) = 2 \sin \frac{n\pi}{2}$$

Utilizando las ideas de nuestra discusión anterior, podemos determinar la solución particular de esta ecuación en función de la solución particular $y_p(n)$ del Ejemplo 6.5.4:

$$\begin{aligned} y(n) &= y_p(n) + \frac{1}{2} y_p(n-1) \\ &= \frac{112}{85} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{96}{85} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{56}{85} \sin \frac{(n-1)\pi}{2} - \frac{48}{85} \cos \frac{(n-1)\pi}{2} \\ &= \frac{74}{85} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{152}{85} \cos \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

6.5.3. Determinación de la respuesta al impulso

Concluiremos esta sección considerando la determinación de la respuesta al impulso de sistemas descritos por ecuaciones en diferencias. Recordaremos que la respuesta al impulso es la respuesta del sistema cuando a su entrada se coloca el impulso unidad y las condiciones iniciales son nulas. Por tanto, la respuesta al impulso no es más que la solución particular de la ecuación en diferencias cuando su entrada $x(n)$ es una función δ . Consideremos por tanto la ecuación

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k \delta(n-k) \quad (6.5.14)$$

con $y(-1)$, $y(-2)$, etc., iguales a cero.

Es claro que si $n > M$ el lado derecho de la Ecuación (6.5.14) es cero, con lo que resulta una ecuación homogénea. Las N condiciones iniciales necesarias para resolver esta

ecuación son los valores de $y(M)$, $y(M-1)$, ..., $y(M-N+1)$. Si el sistema es causal se cumplirá que $N \geq M$, con lo que sólo tenemos que determinar $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(M)$. Dando a n en la Ecuación (6.5.14) los valores sucesivos de 0, 1, 2, ..., M , y utilizando que $y(k)$ es cero si $k < 0$ podemos obtener un sistema con $M+1$ ecuaciones:

$$\sum_{k=0}^j a_k y(n-k) = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M \quad (6.5.15)$$

que expresado en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_M & a_{M-1} & \cdot & \cdot & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_M \end{bmatrix} \quad (6.5.16)$$

Las condiciones iniciales que se obtienen resolviendo estas ecuaciones se pueden utilizar para determinar la respuesta al impulso resolviendo la ecuación homogénea

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0, \quad n > M \quad (6.5.17)$$

Ejemplo 6.5.6 Consideremos el sistema

$$y(n) - \frac{5}{4} y(n-1) + \frac{1}{2} y(n-2) - \frac{1}{16} y(n-3) = x(n) + \frac{1}{3} x(n-1)$$

para el que $N = 3$ y $M = 1$. Por lo tanto, la respuesta al impulso se determina resolviendo la ecuación

$$y(n) - \frac{5}{4} y(n-1) + \frac{1}{2} y(n-2) - \frac{1}{16} y(n-3) = 0, \quad n \geq 2$$

y por lo tanto tiene la forma (véase Ejemplo 6.5.3)

$$h(n) = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_3 \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 2$$

Las condiciones iniciales necesarias para determinar las constantes A_1 , A_2 y A_3 son $y(-1)$, $y(0)$ y $y(1)$. Por hipótesis, $y(-1) = 0$. $y(0)$ y $y(1)$ se pueden determinar utilizando la Ecuación (6.5.16), con lo que se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

resultando que $y(0) = 1$ e $y(1) = 19/12$. El uso de estas condiciones iniciales permite obtener la respuesta al impulso:

$$h(n) = -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{10}{3} n \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{7}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0$$

Se trata de una respuesta al impulso infinita, como se definió en la Sección 6.3.

Ejemplo 6.5.7

Consideremos un caso particular de la Ecuación (6.5.1): todos los coeficientes del lado izquierdo son cero excepto a_0 , que vale 1:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (6.5.18)$$

Si hacemos $x(n) = \delta(n)$ podemos encontrar los valores de $y(n)$ de forma iterativa

$$y(0) = b_0$$

$$y(1) = b_1$$

$$\vdots$$

$$y(M) = b_M$$

Claramente, $y(n) = 0$ para $n > M$ con lo que

$$h(n) = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_M\} \quad (6.5.19)$$

Este resultado se puede confirmar si comparamos la Ecuación (6.5.18) con la Ecuación (6.3.3). Obtenemos que $h(k) = b_k$. La respuesta al impulso se hace cero tras M valores, con lo que el sistema es de respuesta al impulso finita, como se definió en la Sección 6.3.

6.6. DIAGRAMAS DE SIMULACIÓN PARA SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO

Los diagramas de simulación para sistemas en tiempo discreto se pueden obtener de forma similar a los de sistemas en tiempo continuo. En este caso utilizaremos sumadores, multiplicadores por coeficientes y sistemas que producen un retardo unidad (retardos unidad). Los dos primeros son iguales que en el caso de tiempo continuo, mientras que el retardo unidad se utiliza en lugar del integrador. Es posible, como en el caso de los sistemas en tiempo continuo, que para un mismo sistema existan varios diagramas de simulación diferentes. Para ilustrarlo, consideraremos dos formas de obtener los diagramas, también similares a las que obtuvimos para el caso de tiempo continuo en el Capítulo 2. En el Capítulo 8 presentaremos otros métodos para obtener diagramas de simulación.

Ejemplo 6.6.1

Obtendremos el diagrama de simulación del sistema descrito por la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} y(n) &= 0,25y(n-1) - 0,25y(n-2) + 0,0625y(n-3) \\ &= x(n) + 0,5x(n-1) - x(n-2) + 0,25x(n-3) \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

Si despejamos $y(n)$ y agrupamos términos, podemos escribir

$$y(n) = x(n) + D[0,5x(n) + 0,25y(n)] + D^2[-x(n) + 0,25y(n)] + D^3[0,25x(n) - 0,0625y(n)]$$

donde D indica el operador retardo unidad definido en la Ecuación (6.5.2). Para obtener el diagrama de simulación de este sistema, supondremos que $y(n)$ es conocida y formaremos la señal

$$v_4(n) = 0,25x(n) - 0,0625y(n)$$

Si pasamos la señal por un retardo unidad y sumamos el resultado a $-x(n) + 0,25y(n)$ obtenemos

$$v_3(n) = D[0,25x(n) - 0,0625y(n)] + [-x(n) + 0,25y(n)]$$

Si retardamos la señal otra vez y sumamos $0,5x(n) + 0,25y(n)$ obtenemos

$$v_2(n) = D^2[0,25x(n) - 0,0625y(n)] + D[-x(n) + 0,25y(n)] + [0,5x(n) + 0,25y(n)]$$

Si pasamos ahora $v_2(n)$ por un retardo unidad y le sumamos $x(n)$ obtenemos

$$v_1(n) = D^3[0,25x(n) - 0,0625y(n)] + D^2[-x(n) + 0,25y(n)] + D[0,5x(n) + 0,25y(n)] + x(n)$$

Vemos claramente que $v_1(n)$ e $y(n)$ coinciden, por lo que el diagrama de simulación se puede completar igualando las dos señales, como se muestra en la Figura 6.6.1.

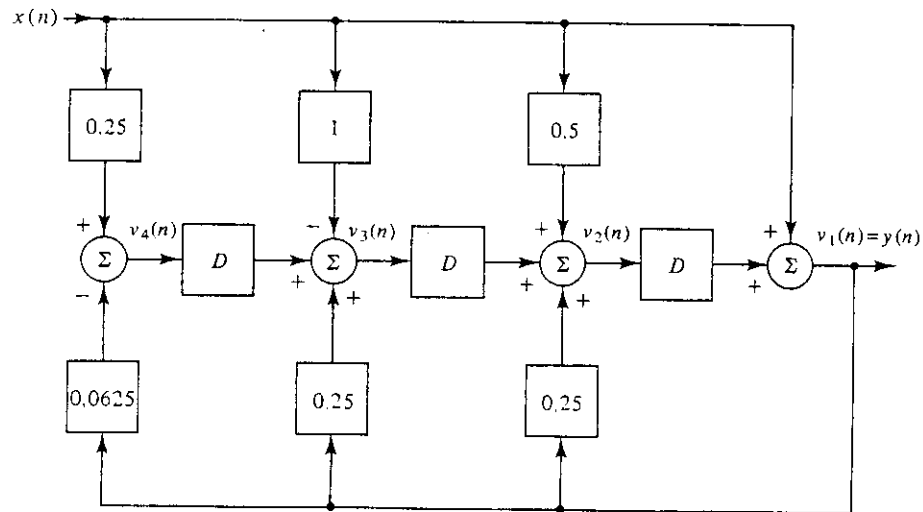


Figura 6.6.1. Diagrama de simulación del Ejemplo 6.6.1.

Consideremos la ecuación en diferencias general de orden N

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_N x(n-N) \quad (6.6.2)$$

Siguiendo el desarrollo presentado en el ejemplo anterior se puede realizar el diagrama de simulación que se muestra en la Figura 6.6.2.

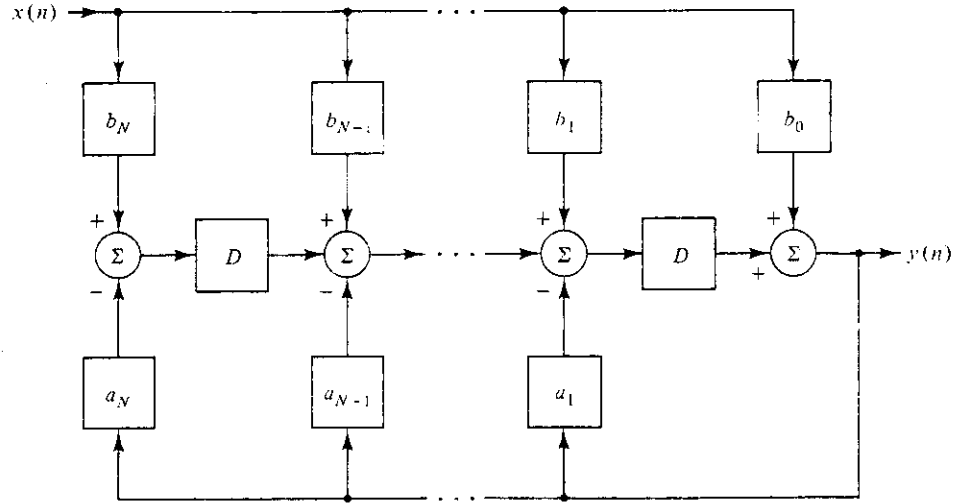


Figura 6.6.2. Diagrama de simulación de un sistema en tiempo discreto de orden N .

Para obtener un diagrama de simulación alternativo para el sistema de la Ecuación (6.6.2), escribiremos dicha ecuación en función de una nueva variable $v(n)$

$$v(n) + \sum_{j=1}^N a_j v(n-j) = x(n) \quad (6.6.3a)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^N b_m v(n-m) \quad (6.6.3b)$$

Nótese que el lado izquierdo de la Ecuación (6.6.3a) tiene la misma forma que el lado izquierdo de la Ecuación (6.6.2), y que el lado derecho de la Ecuación (6.6.3b) tiene la misma forma que el lado derecho de la Ecuación (6.6.2).

Para verificar que estas dos ecuaciones son equivalentes a la Ecuación (6.6.2), sustituimos la Ecuación (6.6.3b) en el lado izquierdo de la Ecuación (6.6.2) con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} y(n) + \sum_{j=1}^N a_j y(n-j) &= \sum_{m=0}^N b_m v(n-m) + \sum_{j=1}^N a_j \left[\sum_{m=0}^N b_m v(n-m-j) \right] \\ &= \sum_{m=0}^N b_m \left[v(n-m) + \sum_{j=1}^N a_j v(n-m-j) \right] \\ &= \sum_{m=0}^N b_m x(n-m) \end{aligned}$$

donde el último paso se realiza aplicando la Ecuación (6.6.3a).

Para generar el diagrama de simulación, determinaremos primero el correspondiente diagrama para la Ecuación (6.6.3a). Si conocemos $v(n)$, se puede generar $v(n-1)$, $v(n-2)$, etc., haciendo que $v(n)$ atraviese sucesivas unidades de retardo. Para obtener la señal $v(n)$ podemos tener en cuenta que, de la Ecuación (6.6.3a)

$$v(n) = x(n) - \sum_{j=1}^N a_j v(n-j) \quad (6.6.4)$$

Para completar el diagrama de simulación generaremos la señal $y(n)$ como indica la Ecuación (6.6.3b), combinando adecuadamente las señales $v(n)$, $v(n-1)$, etc. La Figura 6.6.3 muestra el diagrama completo.

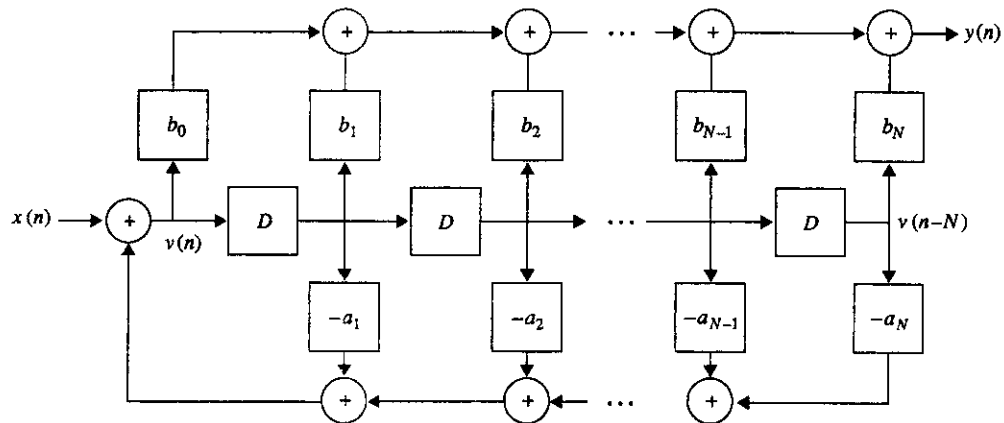


Figura 6.6.3. Diagrama de simulación alternativo para un sistema de orden N .

Nótese que ambos diagramas de simulación se pueden obtener directamente por simple observación de las ecuaciones en diferencias.

Ejemplo 6.6.2

Podemos obtener el diagrama de simulación alternativo para el sistema de la Ecuación (6.6.1) escribiendo dicha ecuación de la siguiente forma

$$v(n) - 0,25v(n-1) - 0,25v(n-2) + 0,0625v(n-3) = x(n)$$

y

$$y(n) = v(n) + 0,5v(n-1) - v(n-2) + 0,25v(n-3)$$

La Figura 6.6.4 muestra el diagrama de simulación resultante de estas dos ecuaciones.

6.7. REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS DISCRETOS MEDIANTE VARIABLES DE ESTADO

Como en el caso de sistemas continuos, el uso de variables de estado permite realizar una descripción más completa de un sistema en tiempo discreto. Definiremos el estado de un sistema en tiempo discreto como la mínima cantidad de información necesaria para deter-

minar los estados futuros de su salida. Si utilizamos un vector N -dimensional para indicar el estado

$$\mathbf{v}(n) = [v_1(n) \ v_2(n) \ \cdots \ v_N(n)]^T \quad (6.7.1)$$

entonces la descripción en el espacio de estados de un sistema en tiempo discreto, invariante y con una sola entrada y una sola salida, cuya entrada es la señal $x(n)$ y cuya salida es la señal $y(n)$ es

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{v}(n) + \mathbf{b}x(n) \quad (6.7.2a)$$

$$y(n) = \mathbf{c}\mathbf{v}(n) + dx(n) \quad (6.7.2b)$$

siendo $\mathbf{A}$ una matriz $N \times N$, $\mathbf{b}$ un vector columna $N \times 1$, $\mathbf{c}$ un vector fila $1 \times N$ y d un escalar.

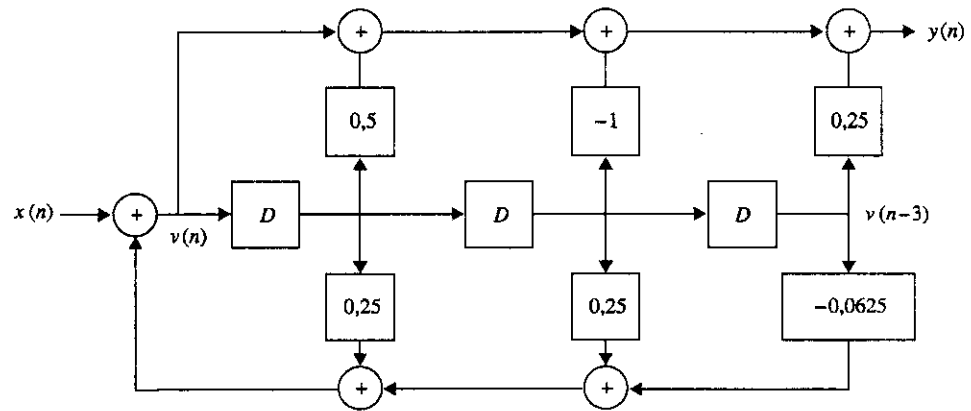


Figura 6.6.4. Diagrama de simulación alternativo para el Ejemplo 6.6.2.

Como en el caso de sistemas en tiempo continuo, para obtener las ecuaciones de estado de un sistema, podemos partir de su diagrama de simulación y utilizar como estados las salidas de los retardos. Ilustraremos esta idea con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6.7.1

Consideremos el problema del Ejemplo 6.6.1. Utilizaremos los diagramas de simulación que hemos obtenido (Figuras 6.6.1 y 6.6.4) para obtener dos descripciones utilizando variables de estado. Las Figuras 6.7.1(a) y 6.7.1(b) representan los dos diagramas. Para nuestra primera descripción asignaremos como estados las salidas de los retardos que se muestran en la Figura 6.7.1(a), con lo que resulta

$$y(n) = v_1(n) + x(n) \quad (6.7.3a)$$

$$\begin{aligned} v_1(n+1) &= v_2(n) + 0,25y(n) + 0,5x(n) \\ &= 0,25v_1(n) + v_2(n) + 0,75x(n) \end{aligned} \quad (6.7.3b)$$

$$\begin{aligned} v_2(n+1) &= v_3(n) + 0,25y(n) - x(n) \\ &= 0,25v_1(n) + v_3(n) - 0,75x(n) \end{aligned} \quad (6.7.3c)$$

$$\begin{aligned} v_3(n+1) &= -0,0625y(n) + 0,25x(n) \\ &= -0,0625v_1(n) + 0,1875x(n) \end{aligned} \quad (6.7.3d)$$

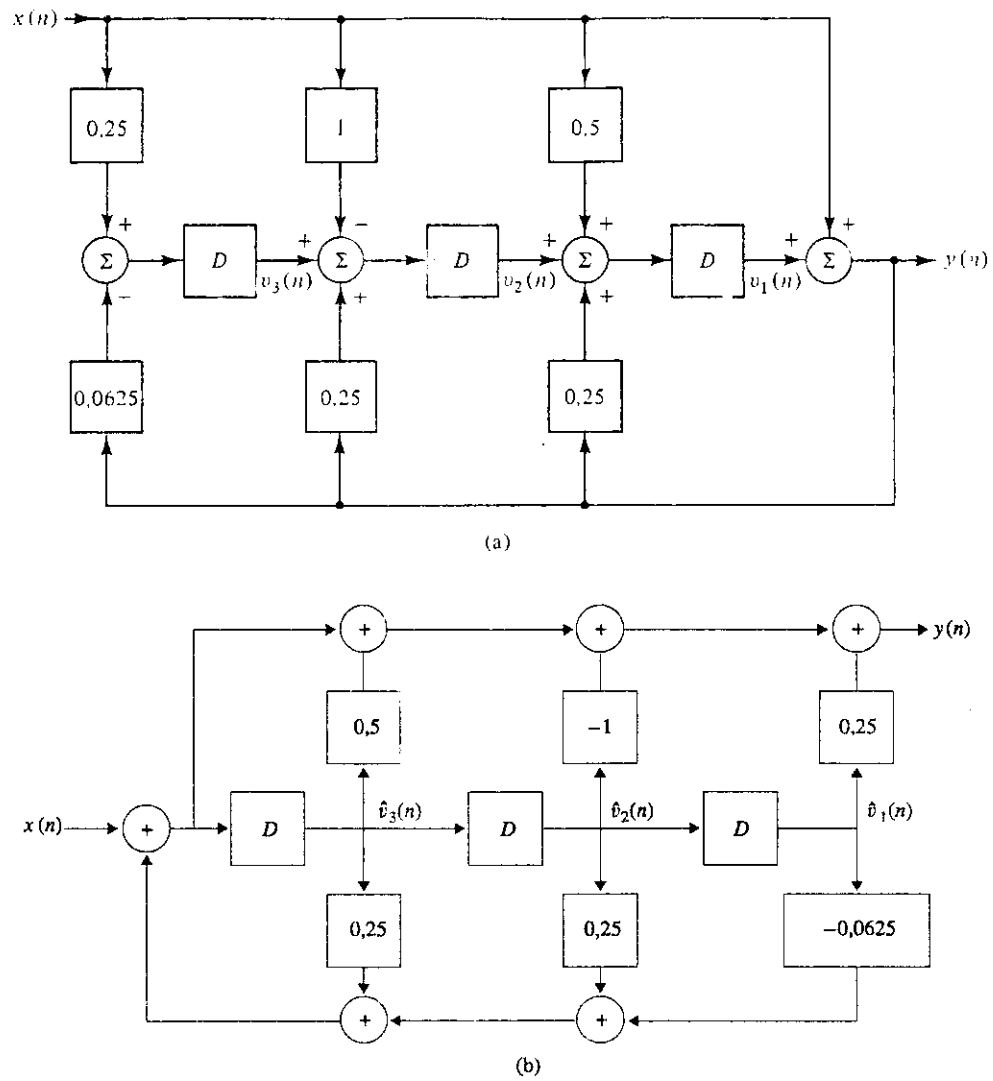


Figura 6.7.1. Diagramas de simulación del Ejemplo 6.7.1.

Escribiendo estas ecuaciones en formato vector-matriz

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0,25 & 1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 1 \\ -0,0625 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 0,75 \\ -0,75 \\ 0,1875 \end{bmatrix} x(n) \quad (6.7.4)$$

$$y(n) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{v}(n) + x(n)$$

con lo que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,25 & 1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 1 \\ -0,0625 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,75 \\ -0,75 \\ 0,1875 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \ 0 \ 0], \quad d = 1 \quad (6.7.5)$$

Como en el caso de tiempo continuo, denominaremos a esta forma primera forma canónica. Para nuestra segunda representación tenemos, observando la Figura 6.7.1(b),

$$\hat{e}_1(n+1) = \hat{e}_2(n) \quad (6.7.6a)$$

$$\hat{e}_2(n+1) = \hat{e}_3(n) \quad (6.7.6b)$$

$$\hat{e}_3(n+1) = -0,0625\hat{e}_1(n) + 0,25\hat{e}_2(n) + 0,25\hat{e}_3(n) + x(n) \quad (6.7.6c)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= 0,25\hat{e}_1(n) - \hat{e}_2(n) + 0,5\hat{e}_3(n) + \hat{e}_3(n+1) \\ &= -0,1875\hat{e}_1(n) - 0,75\hat{e}_2(n) + 0,75\hat{e}_3(n) + x(n) \end{aligned} \quad (6.7.6d)$$

donde el último paso resulta de sustituir la Ecuación (6.7.6c). En formato vector-matriz podemos escribir

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(n+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,0625 & 0,25 & 0,25 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \\ y(n) &= [-0,1875 \quad -0,75 \quad 0,75] \hat{\mathbf{v}}(n) + x(n) \end{aligned} \quad (6.7.7)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,0625 & 0,25 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c} &= [-0,1875 \quad -0,75 \quad 0,75], \quad d = 1 \end{aligned} \quad (6.7.8)$$

que es la segunda forma canónica de las ecuaciones de estado.

Generalizando los resultados del ejemplo anterior al sistema de la Ecuación (6.6.2) podemos demostrar que la primera forma canónica de las ecuaciones de estado es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_N & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_N - a_N b_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad d = b_0 \quad (6.7.9)$$

mientras que en la segunda forma canónica su expresión es

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \vdots & \vdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} b_N - a_N b_0 \\ b_{N-1} - a_{N-1} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}, \quad d = b_0 \quad (6.7.10)$$

Estas dos formas se pueden obtener directamente por inspección de la ecuación en diferencias o de las Figuras 6.6.2 y 6.6.3. Sean

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{v}(n) + \mathbf{b}x(n) \quad (6.7.11)$$

$$y(n) = \mathbf{c}\mathbf{v}(n) + d x(n)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(n+1) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{v}}(n) + \hat{\mathbf{b}}x(n) \quad (6.7.12)$$

$$y(n) = \hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{v}}(n) + \hat{d}x(n)$$

dos descripciones alternativas en el espacio de estados de un mismo sistema. Existe una matriz no singular $\mathbf{P}$ de dimensión $N \times N$ tal que

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}(n) \quad (6.7.13)$$

Se puede verificar fácilmente que se cumplen las siguientes relaciones

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}\mathbf{P}, \quad \hat{d} = d \quad (6.7.14)$$

6.7.1. Solución de las ecuaciones en el espacio de estados

Podemos resolver la ecuación

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{v}(n) + \mathbf{b}x(n), \quad n \geq 0; \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (6.7.15)$$

por iteración. Para ello, haciendo $n = 0$ en la Ecuación (6.7.15) resulta

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{A}\mathbf{v}(0) + \mathbf{b}x(0)$$

Para $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(1) + \mathbf{b}x(1) \\ &= \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{v}(0) + \mathbf{b}x(0)] + \mathbf{b}x(1) \\ &= \mathbf{A}^2\mathbf{v}(0) + \mathbf{A}\mathbf{b}x(0) + \mathbf{b}x(1) \end{aligned}$$

que se puede escribir así

$$\mathbf{v}(2) = \mathbf{A}^2\mathbf{v}(0) + \sum_{j=0}^1 \mathbf{A}^{2-j-1}\mathbf{b}x(j)$$

Continuando con el procedimiento se puede encontrar la solución general para todo n

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{v}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-j-1}\mathbf{b}x(j) \quad (6.7.16)$$

El primer término de la solución corresponde a la respuesta a la condición inicial y el segundo término, que es la suma de convolución de $\mathbf{A}^{n-j-1}$ y $\mathbf{b}x(j)$ corresponde a la respuesta forzada del sistema. La matriz $\mathbf{A}^n$, que define la forma en que cambian los estados a medi-

da que el tiempo progresa, es la matriz de transición de estados del sistema en tiempo discreto $\Phi(n)$. La Ecuación (6.7.16) se puede escribir en función de esta matriz $\Phi(n)$:

$$v(n) = \Phi(n)v(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n-j-1)bx(j) \quad (6.7.17)$$

Claramente, el primer paso en la obtención de las ecuaciones de estado es la determinación de A^n . Para ello, podemos utilizar el teorema de Cayley-Hamilton.

Ejemplo 6.7.2 Consideremos el sistema

$$v_1(n+1) = v_2(n) \quad (6.7.18)$$

$$v_2(n+1) = \frac{1}{8}v_1(n) - \frac{1}{4}v_2(n) + x(n)$$

$$y(n) = v_1(n)$$

Utilizando como en el Capítulo 2 el teorema de Cayley-Hamilton podemos escribir

$$A^n = \alpha_0(n)I + \alpha_1(n)A \quad (6.7.19)$$

Sustituyendo los autovalores de la matriz A , que son $-1/2$ y $1/4$, en la Ecuación (6.7.19) obtenemos

$$\alpha_0(n) - \frac{1}{2}\alpha_1(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

y

$$\alpha_1(n) + \frac{1}{4}\alpha_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

de forma que

$$\alpha_0(n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\alpha_1(n) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Sustituyendo en la Ecuación (6.7.19) resulta

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \quad (6.7.20)$$

Ejemplo 6.7.3 Determinemos la respuesta al impulso del sistema del Ejemplo 6.7.2 para el valor $v(0) = [1 \quad -1]^T$. Sustituyendo en la Ecuación (6.7.16),

$$\begin{aligned} v(n) &= A^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{5}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-j-1} - \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-j-1} \\ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-j-1} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-j-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si expresamos el segundo término en forma cerrada tenemos

$$v(n) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{5}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{9} + \frac{8}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{16}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{8}{9} - \frac{4}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$$

El primer término corresponde a la respuesta a las condiciones iniciales y el segundo término a la respuesta forzada. Combinando los dos términos obtenemos la respuesta total:

$$v(n) = \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} + \frac{23}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{22}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{8}{9} - \frac{23}{18} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{11}{18} \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}, \quad n \geq 0 \quad (6.7.21)$$

La salida es entonces

$$y(n) = v_1(n) = \frac{8}{9} + \frac{23}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{22}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0 \quad (6.7.22)$$

Concluiremos esta sección con un breve resumen de las propiedades de la matriz de transición de estados. Estas propiedades, que se pueden verificar fácilmente, son similares a las correspondientes propiedades para el caso de tiempo continuo:

1.

$$\Phi(n+1) = A\Phi(n) \quad (6.7.23a)$$

2.

$$\Phi(0) = I \quad (6.7.23b)$$

3. Propiedad de transición:

$$\Phi(n-k) = \Phi(n-j)\Phi(j-k) \quad (6.7.23c)$$

4. Propiedad de inversión:

$$\Phi^{-1}(n) = \Phi(-n) \quad \text{si existe la inversa.} \quad (6.7.23d)$$

Nótese que a diferencia de la situación en tiempo continuo, la matriz de transición puede ser singular y por lo tanto no invertible. Resulta claro que la matriz $\Phi^{-1}(n)$ será no singular (y por lo tanto invertible) si la matriz A es no singular.

6.7.2. Respuesta al impulso de sistemas descritos mediante ecuaciones de estado

La respuesta al impulso de un sistema descrito por la Ecuación (6.7.2) se puede encontrar haciendo $v_0 = 0$ y $x(n) = \delta(n)$ en la solución de las ecuaciones de estado expresada en la Ecuación (6.7.16). Obtenemos entonces

$$v(n) = A^{n-1}b \quad (6.7.24)$$

La respuesta al impulso se obtiene mediante la Ecuación (6.7.2b)

$$h(n) = cA^{n-1}b + d\delta(n) \quad (6.7.25)$$

Ejemplo 6.7.4

La respuesta al impulso del sistema del Ejemplo 6.7.2 se puede encontrar fácilmente a partir de los resultados anteriores

$$\begin{aligned} h(n) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (6.7.26)$$

6.8. ESTABILIDAD DE SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO

Como en el caso de sistemas en tiempo continuo, una importante propiedad asociada a los sistemas en tiempo discreto es la estabilidad. Podemos ampliar nuestra definición de estabilidad para el caso de tiempo discreto diciendo que un sistema en tiempo discreto es estable desde el punto de vista entrada/salida si cualquier entrada acotada produce una salida acotada. Es decir, si

$$|x(n)| \leq M < \infty \quad (6.8.1)$$

entonces

$$|y(n)| \leq L < \infty$$

Utilizando un procedimiento similar al caso de sistemas en tiempo continuo, podemos expresar la condición de estabilidad en función de la respuesta al impulso del sistema. Da-

do un sistema cuya respuesta al impulso es $h(n)$, consideremos una entrada $x(n)$ que cumple que $|x(n)| \leq M$. La salida $y(n)$ se expresa mediante la convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (6.8.2)$$

de forma que

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| |x(n-k)| \\ &\leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \end{aligned}$$

Por lo tanto, una condición suficiente para que un sistema sea estable es que su respuesta al impulso sea absolutamente sumable. Es decir,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (6.8.3)$$

Podemos ver también que se trata de una condición necesaria. Para ello consideremos la señal de entrada acotada $x(k) = \text{sgn}[h(n-k)]$, o bien $x(n-k) = \text{sgn}[h(k)]$. La salida correspondiente es

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \text{sgn}[h(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

Podemos ver claramente que si $h(n)$ no es absolutamente sumable $y(n)$ no estará acotada. Para el caso de sistemas causales, la condición de estabilidad se convierte en

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (6.8.4)$$

Se pueden obtener condiciones equivalentes en función de las posiciones de los valores característicos del sistema. No olvidemos que en el caso de un sistema causal descrito por una ecuación en diferencias la solución está formada por términos de la forma $n^k z^n$, $k = 0, 1, \dots, M$, siendo α un valor característico de multiplicidad M . Si $|\alpha| \geq 1$ la respuesta no estará acotada para todas las entradas. Por lo tanto, para que un sistema sea estable, todos los valores característicos deben tener módulo menor que 1. Es decir, deben estar en el interior de un círculo de radio unidad en el plano complejo.

En el caso de la representación mediante variables de estado, vimos que la solución depende de la matriz de transición de estados A^n . La forma de la matriz A^n está determinada por los autovalores o valores característicos de la matriz A . Supongamos que obtenemos la ecuación en diferencias que relaciona la salida $y(n)$ con la entrada $x(n)$ eliminando las variables de estado en las Ecuaciones (6.7.2a) y (6.7.2b). Se puede verificar que los valores característicos de esta ecuación son exactamente los mismos que los de la matriz A (dejaremos la demostración de esta relación como un ejercicio para el lector, véase Problema 6.3.1). Por lo tanto, podemos concluir que un sistema descrito por sus ecuaciones de

estado es estable si los autovalores de la matriz A están en el interior del círculo unidad del plano complejo.

Ejemplo 6.8.1 Determinar si los siguientes sistemas causales e invariantes con el tiempo son estables:

(i) Sistema con respuesta al impulso

$$h(n) = \left[n^2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] u(n)$$

(ii) Sistema descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) - \frac{11}{6} y(n-1) - \frac{1}{2} y(n-2) + \frac{1}{3} y(n-3) = x(n) + 2x(n-2)$$

(iii) Sistema descrito por las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) &= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} x(n) \\ y(n) &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) \end{aligned}$$

Para el primer sistema tenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n = 6 + \frac{8}{3}$$

por lo que el sistema es estable.

La ecuación característica del segundo sistema es

$$\alpha^3 - \frac{11}{6} \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{3} = 0$$

cuyas raíces características son $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1/2$, $\alpha_3 = 1/3$. Como $|\alpha_1| > 1$, este sistema es inestable.

Se puede verificar fácilmente que los autovalores de la matriz A en el caso del último sistema valen $3/2 \pm j1/2$. Como el módulo de los dos es mayor que 1, el sistema es inestable.

6.9. RESUMEN

- Una señal en tiempo discreto está definida únicamente en instantes discretos del tiempo.
- Una señal en tiempo discreto se representa generalmente como una secuencia de valores $x(n)$ para valores enteros de n .

- Una señal en tiempo discreto $x(n)$ es periódica de período N si $x(n + N) = x(n)$ para algún número entero N .
- Las funciones escalón unidad e impulso en tiempo discreto se relacionan así:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

- Cualquier señal en tiempo discreto $x(n)$ se puede expresar mediante funciones impulso desplazadas

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

- La señal exponencial compleja $x(n) = \exp[j\Omega_0 n]$ es periódica sólo si $\Omega_0/2\pi$ es un número racional.
- El conjunto de señales armónicas $x_k(n) = \exp[jk\Omega_0 n]$ consta sólo de N señales distintas.
- El escalado temporal de señales en tiempo discreto puede producir un resultado completamente diferente de la señal original.
- Los conceptos de linealidad, memoria, invarianza con el tiempo y causalidad para sistemas en tiempo discreto son similares a los de señales en tiempo continuo.
- Los sistemas LTI en tiempo discreto quedan completamente caracterizados mediante su respuesta al impulso.
- La salida $y(n)$ de un sistema LTI en tiempo discreto se obtiene mediante la suma de convolución de la entrada $x(n)$ y la respuesta al impulso del sistema $h(n)$:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

- La convolución sólo proporciona la respuesta forzada del sistema.
- La convolución periódica de dos secuencias periódicas $x_1(n)$ y $x_2(n)$ es

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(n-k)x_2(k)$$

- Los sistemas en tiempo discreto admiten una representación alternativa mediante la ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad n \geq 0$$

- La ecuación en diferencias se puede resolver analíticamente o de forma iterativa partiendo de condiciones iniciales conocidas. La solución analítica consta de dos partes: la solución homogénea (entrada cero) y la solución particular (estado cero). La solución homogénea está determinada por las raíces de la ecuación característica. La solución particular tiene la forma de $x(n)$ y de sus versiones retrasadas.
- La respuesta al impulso se obtiene resolviendo la ecuación en diferencias del sistema con la entrada $x(n) = \delta(n)$ y con todas las condiciones iniciales iguales a cero.
- Los diagramas de simulación de sistemas en tiempo discreto se obtienen a partir de la ecuación en diferencias y utilizan como bloques de diseño sumadores, multiplicadores por coeficientes y retardos.

- Las ecuaciones de estado de un sistema LTI en tiempo discreto se pueden obtener a partir de su diagrama de simulación asignando un estado a la salida de cada retardo. Las ecuaciones tienen la forma

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{v}(n) + \mathbf{b}x(n)$$

$$y(n) = \mathbf{c}\mathbf{v}(n) + dx(n)$$

- Como en el caso de tiempo continuo, dado un sistema en tiempo discreto se pueden obtener varios diagramas de simulación equivalentes y, por lo tanto, varias representaciones de estados equivalentes.
- La solución de las ecuaciones de estado es

$$\mathbf{v}(n) = \Phi(n)\mathbf{v}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n-j-1)\mathbf{b}x(j)$$

$$y(n) = \mathbf{c}\mathbf{v}(n) + dx(n)$$

donde

$$\Phi(n) = \mathbf{A}^n$$

es la matriz de transición de estados y se puede obtener mediante el teorema de Cayley-Hamilton.

- Las siguientes condiciones para la estabilidad BIBO de sistemas LTI en tiempo discreto son equivalentes:

$$(a) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

- (b) Las raíces de la ecuación característica están en el interior del círculo unidad.
- (c) Los autovalores de $\mathbf{A}$ están en el interior del círculo unidad.

6.10. LISTA DE TÉRMINOS IMPORTANTES

Convolución periódica	Respuesta al impulso
Diagrama de simulación	Retardo
Ecuación característica	Señal en tiempo discreto
Ecuación en diferencias	Señal periódica
Ecuaciones de estado	Solución homogénea
Exponencial compleja	Solución particular
Función escalón unidad	Suma de convolución
Función impulso unidad	Sumador
Matriz de transición	Teorema de Cayley-Hamilton
Multiplicador por un coeficiente	Variables de estado

6.11. PROBLEMAS

- 6.1. Dada la señal en tiempo discreto que se muestran en la Figura P6.1, dibujar las siguientes señales:

$$(a) \quad x(2-n)$$

- (b) $x(3n - 4)$
- (c) $x\left(\frac{2}{3}n + 1\right)$
- (d) $x\left(-\frac{n+8}{4}\right)$
- (e) $x(n^3)$
- (f) $x_e(n)$
- (g) $x_o(n)$
- (h) $x(2 - n) + x(3n - 4)$

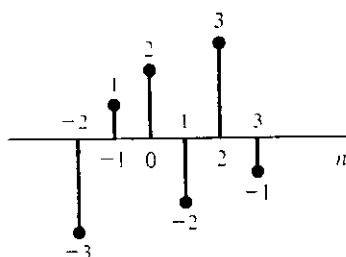


Figura P6.1. La señal $x(n)$ del Problema 6.1.

6.2. Repetir el Problema 6.1 para la señal

$$x(n) = \left\{ -1, \frac{1}{3}, 0, 1, -\frac{3}{2}, -1 \right\}$$

↑

6.3. Determinar si las siguientes señales son periódicas y para las que lo sean, encontrar su período.

- (a) $x(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$
- (b) $x(n) = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$
- (c) $x(n) = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$
- (d) $x(n) = \exp\left[\frac{6\pi}{5}n\right]$
- (e) $x(n) = \exp\left[j\frac{5\pi}{6}n\right]$
- (f) $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(n - 2m) + 2\delta(n - 3m)]$
- (g) $x(n) = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$

- 6.4. La señal $x(t) = 5 \cos(120t - \pi/3)$ se muestrea con muestreo uniforme de período T segundos. ¿Qué valores de T hacen que la secuencia en tiempo discreto resultante sea periódica?
- 6.5. Repetir el Problema 6.4 con la señal $x(t) = 3 \sin 100\pi t + 4 \cos 120t$.
- 6.6. Las siguientes igualdades se utilizan en diversos lugares del libro. Demostrar su validez.

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} & \alpha \neq 1 \\ N & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$(b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad |\alpha| < 1$$

$$(c) \quad \sum_{n=n_0}^{n_f} \alpha^n = \frac{\alpha^{n_0} - \alpha^{n_f+1}}{1 - \alpha}, \quad \alpha \neq 1$$

- 6.7. Los conceptos de memoria, invarianza con el tiempo, linealidad y causalidad, explicados para sistemas en tiempo continuo, son los mismos para sistemas en tiempo discreto. En los casos que siguen, $x(n)$ es la señal de entrada a un sistema e $y(n)$ la señal de salida. Determinar si los sistemas son (i) lineales, (ii) sin memoria, (iii) invariantes con el tiempo y (iv) causales. Justificar las respuestas.

$$(a) \quad y(n) = \log [x(n)]$$

$$(b) \quad y(n) = x(n)x(n-2)$$

$$(c) \quad y(n) = 3nx(n)$$

$$(d) \quad y(n) = nx(n) + 3$$

$$(e) \quad y(n) = x(n-1)$$

$$(f) \quad y(n) = x(n) + 2x(n-1)$$

$$(g) \quad y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)$$

$$(h) \quad y(n) = \sum_{k=0}^n x(n)$$

$$(i) \quad y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

$$(j) \quad y(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x(n-k)$$

$$(k) \quad y(n) = \text{mediana} \{x(n-1), x(n), x(n+1)\}$$

$$(l) \quad y(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 0 \\ -x(n), & n < 0 \end{cases}$$

$$(m) \quad y(n) = \begin{cases} x(n), & x(n) \geq 0 \\ -x(n), & x(n) < 0 \end{cases}$$

6.8. (a) Calcular la convolución $y(n) = x(n) * h(n)$ de las siguientes señales:

$$(i) \quad x(n) = \begin{cases} -1 & -5 \leq n \leq -1 \\ 1 & 0 \leq n \leq 4 \end{cases}$$

$$h(n) = 2u(n)$$

$$(ii) \quad x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$(iii) \quad x(n) = u(n)$$

$$h(n) = 1 \quad 0 \leq n \leq 9$$

$$(iv) \quad x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$h(n) = \delta(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$(v) \quad x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$h(n) = \delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(vi) \quad x(n) = nu(n)$$

$$h(n) = u(n) - u(n-10)$$

(b) Utilizar un paquete de software matemático para verificar los resultados

(c) Dibujar $y(n)$ en función de n .

6.9. Calcular la convolución $y(n) = h(n) * x(n)$ para las siguientes parejas de secuencias de longitud finita:

$$(a) \quad x(n) = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16} \right\}, \quad h(n) = \{1, -1, 1, -1\}$$

↑

$$(b) \quad x(n) = \{1, 2, 3, 0, -1\}, \quad h(n) = \{2, -1, 3, 1, -2\}$$

$$(c) \quad x(n) = \left\{ 3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, 4 \right\}, \quad h(n) = \left\{ 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$$

↑

$$(d) \quad x(n) = \left\{ -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{5}, 1 \right\}, \quad h(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$$

(e) Verificar los resultados utilizando un paquete de software matemático.

(f) Dibujar la señal $y(n)$ resultante.

- 6.10. (a) Calcular la respuesta al impulso del sistema de la Figura P6.10. Suponer que

$$h_1(n) = h_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$h_3(n) = u(n)$$

$$h_4(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

- (b) Calcular la respuesta del sistema al escalón unidad.

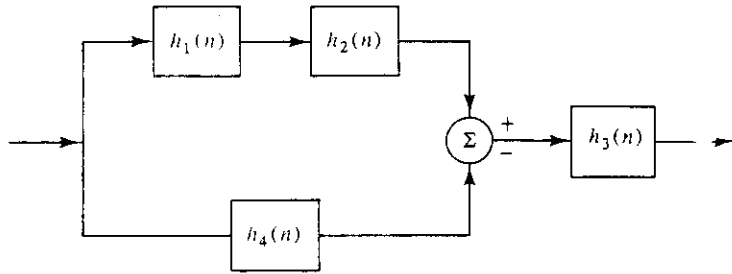


Figura P6.10. El sistema del Problema 6.10.

- 6.11. (a) Repetir el Problema 6.10 si

$$h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$h_2(n) = \delta(n)$$

$$h_3(n) = h_4(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

- (b) Calcular la respuesta del sistema al escalón unidad.

- 6.12. Sean $x_1(n)$ y $x_2(n)$ dos secuencias periódicas de período N . Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k) = \sum_{k=n_0}^{N+n_0-1} x_1(k)x_2(n-k)$$

- 6.13. (a) Encontrar la convolución periódica $y_p(n)$ de las secuencias de longitud finita del Problema 6.9, añadiendo ceros a las secuencias más cortas. Indicar la relación entre $y_p(n)$ y la señal $y(n)$ que se calculó en el Problema 6.9.
 (b) Verificar los resultados utilizando un paquete de software matemático.
- 6.14. (a) Para resolver una ecuación en diferencias con un computador se pueden aproximar las derivadas de orden sucesivo mediante las correspondientes diferencias en incrementos discretos de tiempo T . Es decir, sustituimos

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

con

$$y(nT) = \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T}$$

y

$$z(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

con

$$z(nT) = \frac{y(nT) - y((n-1)T)}{T} = \frac{x(nT) - 2x((n-1)T) + x((n-2)T)}{T^2} \quad \text{etc.}$$

Utilizar esta aproximación para obtener la ecuación que se emplearía para resolver la ecuación diferencial

$$2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

- (b) Repetir el apartado (a) utilizando la aproximación mediante diferencias progresivas

$$\frac{dx(t)}{dt} \simeq \frac{x((n+1)T) - x(nT)}{T}$$

- 6.15. Se puede utilizar un procedimiento similar al de los Problemas 6.13 y 6.14 para evaluar la integral de funciones en tiempo continuo. Es decir, si deseamos calcular

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau + x(t_0)$$

podemos escribir

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

Si utilizamos una aproximación a $y(t)$ mediante diferencias regresivas obtenemos

$$y(nT) = Tx(nT) + y((n-1)T), \quad y(0) = x(t_0)$$

y si utilizamos una aproximación mediante diferencias progresivas

$$y((n+1)T) = Tx(nT) + y(nT), \quad y(0) = x(t_0)$$

- (a) Utilizar esta aproximación para determinar la integral de la función en tiempo continuo que se muestra en la Figura P6.15, para valores de t en el intervalo $[0, 3]$. Supóngase que $T = 0,02$ s. ¿Cuánto vale el error en (i) 1 s., (ii) 2 s. y (iii) 3 s.?
- (b) Repetir el apartado (a) para $T = 0,01$ s. Comentar los resultados.

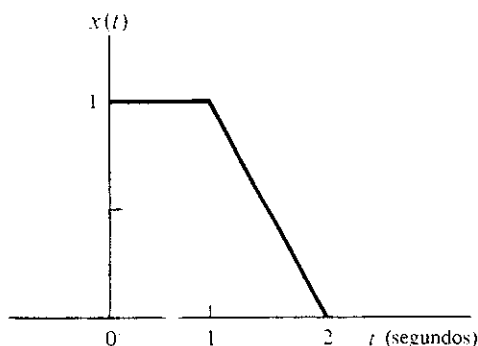


Figura P6.15. Función del Problema 6.15.

- 6.16. Se puede aproximar mejor la integral del Problema 6.15 haciendo uso de la regla del trapecio

$$y(nT) = \frac{T}{2} (x(nT) + x((n-1)T)) + y((n-1)T)$$

Determinar la integral de la función del Problema 6.15 utilizando esta regla.

- 6.17. (a) Resolver por iteración las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$(i) \quad y(n) + y(n-1) + \frac{1}{4} y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

$$y(-1) = 0, \quad y(-2) = 1, \quad x(n) = u(n)$$

$$(ii) \quad y(n) + \frac{3}{4} y(n-1) + \frac{1}{8} y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

$$y(-1) = 1, \quad y(-2) = 0, \quad x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$(iii) \quad y(n) + \frac{3}{4} y(n-1) + \frac{1}{8} y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

$$y(-1) = 0, \quad y(-2) = 0, \quad x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(iv) \quad y(n+1) + \frac{1}{2} y(n-1) = x(n) - \frac{1}{2} x(n-1), \quad n \geq 0$$

$$y(0) = 1, \quad x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(v) \quad y(n) = x(n) + \frac{1}{3} x(n-1) + 2x(n-2), \quad n \geq 0$$

$$x(n) = u(n)$$

- (b) Utilizando un paquete de software matemático, verificar los resultados obtenidos para valores de n en el rango de 0 a 20. Dibujar la señal $y(n)$ en función de n .

6.18. Determinar las raíces características y las soluciones homogéneas de las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$(i) \quad y(n) - y(n-1) + \frac{1}{2} y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

$$y(-1) = 0, \quad y(-2) = 1$$

$$(ii) \quad y(n) - \frac{1}{6} y(n-1) - \frac{1}{6} y(n-2) = x(n) + \frac{1}{2} x(n-1), \quad n \geq 0$$

$$y(-1) = 1, \quad y(-2) = 0$$

$$(iii) \quad y(n) - y(n-1) + \frac{1}{4} y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

$$y(-1) = 1, \quad y(-2) = 1$$

$$(iv) \quad y(n) - \frac{3}{2} y(n-1) + \frac{1}{2} y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

$$y(-1) = 2, \quad y(-2) = 0$$

$$(v) \quad y(n) - \frac{1}{4} y(n-1) - \frac{1}{8} y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

$$y(-1) = 1, \quad y(-2) = -1$$

6.19. Calcular la solución total de las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$(a) \quad y(n) + \frac{1}{6} y(n-1) - \frac{1}{6} y(n-2) = x(n) + \frac{1}{2} x(n-1), \quad n \geq 0$$

$$\text{si } y(-1) = 1, \quad y(-2) = 0, \quad y \quad x(n) = 2 \cos \frac{3n\pi}{4}$$

$$(b) \quad y(n) + \frac{1}{2} y(n-1) = x(n) \quad \text{si } y(-1) = 0 \quad y \quad x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(c) \quad y(n) + \frac{1}{2} y(n-1) = x(n) \quad \text{si } y(-1) = 1 \quad y \quad x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(d) \quad y(n) + \frac{8}{15} y(n-1) + \frac{1}{15} y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

$$\text{si } y(-1) = y(-2) = 1 \quad y \quad x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$(e) \quad y(n+2) - \frac{1}{12} y(n+1) - \frac{1}{12} y(n) = x(n) + \frac{1}{4} x(n+1), \quad n \geq 0$$

$$\text{si } y(1) = y(0) = 0 \quad y \quad x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

6.20. Calcular la respuesta al impulso de los sistemas del Problema 6.18.

6.21. Calcular la respuesta al impulso de los sistemas del Problema 6.19.

6.22. Es posible obtener la caracterización de un sistema con respuesta al impulso $h(n)$ mediante su ecuación en diferencias. Para ello se supone una ecuación en diferen-

cias del orden apropiado con coeficientes desconocidos. Se sustituye el valor de $h(n)$ en la ecuación en diferencias y se despejan los coeficientes. Utilizando este procedimiento, encontrar la representación mediante la ecuación en diferencias del sistema con respuesta al impulso

$$h(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

suponiendo que

$$y(n) + ay(n-1) + by(n-2) = cx(n) + dx(n-1)$$

y calcular a , b , c y d .

- 6.23. Repetir el Problema 6.22 con

$$h(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$$

- 6.24. La respuesta al impulso $h(n)$ del sistema de la Ecuación (6.5.11) se puede calcular si obtenemos previamente la respuesta al impulso $h_0(n)$ del sistema

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = x(n) \quad (\text{P6.1})$$

y utilizamos la propiedad de superposición, con lo que resulta

$$h(n) = \sum_{k=0}^M h_k h_0(n-k)$$

- (a) Verificar que la condición inicial para resolver la Ecuación P6.1 es

$$y(0) = \frac{1}{a_0}$$

- (b) Utilizar este método para calcular la respuesta al impulso del sistema del Ejemplo 6.5.6.
(c) Calcular mediante este método las respuestas al impulso de los sistemas del Problema 6.17.

- 6.25. Obtener los dos diagramas de simulación canónicos para los sistemas del Problema 6.17.
6.26. Calcular las correspondientes expresiones de las ecuaciones de estado de los sistemas del Problema 6.17 utilizando los diagramas de simulación que se han obtenido en el Problema 6.25.
6.27. Repetir los Problemas 6.25 y 6.26 para los sistemas del Problema 6.18.

- 6.28. (a) Obtener un sistema de ecuaciones de estado apropiado para los sistemas descritos por las siguientes ecuaciones en diferencias

$$(i) \quad y(n) - \frac{13}{12}y(n-1) + \frac{9}{24}y(n-2) - \frac{1}{24}y(n-3) = x(n)$$

$$(ii) \quad y(n) + 0,707y(n-1) + y(n-2) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2)$$

$$(iii) \quad y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

- (b) Calcular A^n para los sistemas anteriores.
 (c) Verificar los resultados utilizando un paquete de software matemático.
- 6.29. (a) Calcular la respuesta al escalón unidad de los sistemas de Problema 6.28 para $v(0) = 0$.
 (b) Verificar los resultados utilizando un paquete de software matemático.
- 6.30. Consideremos los sistemas descritos en el espacio de estados:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{7}{6} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad 1], \quad d = 0$$

- (a) Verificar que los autovalores de A son $1/2$ y $-2/3$.
 (b) Sea $\hat{v}(n) = P v(n)$. Calcular P para que la representación en el espacio de estados en función de $\hat{v}(n)$ sea

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(Esta es la forma diagonal de las ecuaciones de estado.) Calcular los correspondientes valores de $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$ y $\hat{v}(0)$.

- (c) Calcular la respuesta al escalón unidad de la representación del sistema obtenida en el apartado (b).
 (d) Encontrar la respuesta al escalón unidad del sistema original.
 (e) Verificar los resultados utilizando un paquete de software matemático.
- 6.31. Utilizando la segunda forma canónica de las ecuaciones de estado, demostrar que los valores característicos de la representación de un sistema mediante su ecuación en diferencias coinciden con los autovalores de la matriz A de su representación en el espacio de estados.

6.32. Determinar cuáles de los siguientes sistemas son estables:

(a)

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n < 0 \end{cases}$$

(b)

$$h(n) = \begin{cases} 3^n, & 0 \leq n \leq 100 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

(c)

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos 5n, & n \geq 0 \\ 2^n \cos 3n, & n < 0 \end{cases}$$

(d) $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2)$

(e) $y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = x(n) + x(n-1)$

(f) $y(n+2) - \frac{2}{3}y(n-1) - \frac{1}{3}y(n-2) = x(n)$

(g) $\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x(n) \quad y(n) = [1 \quad 0] \mathbf{v}(n)$

(h) $\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad y(n) = [2 \quad 1] \mathbf{v}(n)$

Análisis de Fourier de sistemas en tiempo discreto

7.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior hemos presentado las técnicas para realizar el análisis en el dominio del tiempo de sistemas en tiempo discreto. Recordamos allí que, como en el caso de sistemas en tiempo continuo, la caracterización principal de un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo que hemos utilizado es su respuesta al impulso. En este capítulo y en capítulos posteriores consideraremos técnicas para el análisis de sistemas en tiempo discreto en el dominio de la frecuencia. Comenzaremos nuestra presentación con un examen del análisis de Fourier de sistemas en tiempo discreto. Como ya podemos sospechar, los resultados que vamos a obtener guardan un estrecho paralelismo con los obtenidos para el caso de sistemas en tiempo continuo.

Para motivar nuestra presentación de las técnicas en el dominio de la frecuencia, consideremos la respuesta de un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo a una exponencial compleja de la forma

$$x(n) = z^n \quad (7.1.1)$$

siendo z un número complejo. Si la respuesta al impulso del sistema es $h(n)$, la salida se puede obtener mediante la convolución

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{n-k} \\ &= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Dado un z fijo, la suma es una constante que llamaremos $H(z)$. Es decir,

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} \quad (7.1.3)$$

con lo que

$$y(n) = H(z)x(n) \quad (7.1.4)$$

Como podemos ver en la Ecuación (7.1.4), la salida $y(n)$ es simplemente la entrada multiplicada por un factor de escala $H(z)$.

Este resultado se puede extender al caso de que la entrada al sistema sea una combinación lineal de exponenciales complejas de la forma indicada en la Ecuación (7.1.1). Concretamente, sea

$$x(n) = \sum_{k=1}^N a_k z_k^n \quad (7.1.5)$$

Teniendo en cuenta la propiedad de superposición y la Ecuación (7.1.3), la salida es

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=1}^N a_k H(z_k) z_k^n \\ &= \sum_{k=1}^N b_k z_k^n \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

Es decir, que la salida es también una combinación lineal de las exponenciales complejas de la entrada. El coeficiente b_k asociado a la función z_k^n en la salida es simplemente el correspondiente coeficiente a_k multiplicado por el factor de escala $H(z_k)$.

Ejemplo 7.1.1 Supongamos que deseamos calcular la salida de un sistema con respuesta al impulso

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

cuando la entrada es

$$x(n) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} n$$

Para calcular la salida, calcularemos primero

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad \left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1$$

donde hemos utilizado la Ecuación (6.3.7). La entrada se puede expresar así:

$$x(n) = \exp\left[j \frac{2\pi}{3} n\right] + \exp\left[-j \frac{2\pi}{3} n\right]$$

con lo que tenemos

$$z_1 = \exp \left[j \frac{2\pi}{3} \right], \quad z_2 = \exp \left[-j \frac{2\pi}{3} \right], \quad a_1 = a_2 = 1$$

y

$$H(z_1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \exp[-j(2\pi/3)]} = \frac{2}{\sqrt{7}} \exp[-j\phi],$$

$$H(z_2) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \exp[j(2\pi/3)]} = \frac{2}{\sqrt{7}} \exp[j\phi], \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Utilizando la Ecuación (7.1.6) encontramos que la salida es

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{2}{\sqrt{7}} \exp[j\phi] \exp \left[j \frac{2\pi}{3} n \right] + \frac{2}{\sqrt{7}} \exp[-j\phi] \exp \left[-j \frac{2\pi}{3} n \right] \\ &= \frac{4}{\sqrt{7}} \cos \left(\frac{2\pi}{3} n + \phi \right) \end{aligned}$$

Un caso especial sucede cuando la entrada es de la forma $\exp[j\Omega_k n]$, siendo Ω_k una variable continua real. Esto corresponde al caso de $|z_k| = 1$. Para esta entrada, la salida es

$$y(n) = H(e^{j\Omega_k}) \exp[j\Omega_k n] \quad (7.1.7)$$

en donde, aplicando la Ecuación (7.1.3),

$$H(e^{j\Omega}) = H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \exp[-j\Omega n] \quad (7.1.8)$$

7.2. DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DE SEÑALES DISCRETAS PERIÓDICAS

Como hemos visto ya para el caso de señales en tiempo continuo, muchas veces estamos interesados en la respuesta de sistemas lineales a entradas periódicas. Recordamos que una señal $x(n)$ en tiempo discreto es periódica de período N si existe algún número entero positivo para el que se cumple

$$x(n) = x(n + N) \quad (7.2.1)$$

De la presentación realizada en la sección anterior se deduce que si la señal $x(n)$ se puede expresar como la suma de varias exponenciales complejas, la respuesta del sistema se puede determinar fácilmente. Por analogía con la representación de señales periódicas realizada en tiempo continuo, es lógico esperar que se pueda obtener también una repre-

sentación en función de los armónicos de la frecuencia fundamental $2\pi/N$. Es decir, busquemos una representación para la señal $x(n)$ que tenga la forma

$$x(n) = \sum_k a_k \exp[j\Omega_k n] = \sum_k a_k x_k(n) \quad (7.2.2)$$

siendo $\Omega_k = 2\pi k/N$. Claramente vemos que $x_k(n)$ es periódica, ya que $\Omega_k/2\pi$ es un número racional. Utilizando los resultados obtenidos en el Capítulo 6, vemos también que sólo hay N señales $x_k(n)$ diferentes, correspondientes a los valores de $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, ya que

$$x_k(n) = x_{k+N}(n), \quad \text{para todo } k \quad (7.2.3)$$

Por lo tanto, en la suma del lado derecho de la Ecuación (7.2.2) sólo tenemos que incluir N términos. Esta suma se puede realizar sobre cualquier conjunto de N valores consecutivos de k . Indicaremos esto expresando el rango de la suma como $k = \langle N \rangle$. No obstante, la mayor parte de las veces utilizaremos el rango $0 \leq k \leq N-1$. Podemos expresar ahora $x(n)$ de la siguiente forma

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \exp\left[j \frac{2\pi}{N} kn\right] \quad (7.2.4)$$

La Ecuación (7.2.4) es la representación mediante el *desarrollo en serie de Fourier* de la secuencia periódica $x(n)$, y los valores a_k son los coeficientes del desarrollo.

Para determinar los coeficientes a_k sustituiremos por m la variable k del sumatorio en el lado derecho de la Ecuación (7.2.4), y multiplicaremos los dos miembros de la ecuación por $\exp[-j2\pi kn/N]$ con lo que obtenemos

$$x(n) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} kn\right] = \sum_{m=\langle N \rangle} a_m \exp\left[j \frac{2\pi}{N} (m-k)n\right] \quad (7.2.5)$$

Sumando sobre los valores de n en el intervalo $[0, N-1]$ resulta

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} kn\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=\langle N \rangle} a_m \exp\left[j \frac{2\pi}{N} (m-k)n\right] \quad (7.2.6)$$

E intercambiando el orden de suma en la Ecuación (7.2.6) podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} kn\right] = \sum_{m=\langle N \rangle} \sum_{n=0}^{N-1} a_m \exp\left[j \frac{2\pi}{N} (m-k)n\right] \quad (7.2.7)$$

Aplicando la Ecuación (6.3.7),

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}, \quad \alpha \neq 1 \quad (7.2.8)$$

Y para $\alpha = 1$ tenemos que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = N \quad (7.2.9)$$

Si $m - k$ no es un múltiplo entero de N (es decir, $m - k \neq rN$ para $r = 0, \pm 1, \pm 2$, etc.), podemos sustituir en la Ecuación (7.2.8) $\alpha = \exp[j2\pi(m - k)/N]$ con lo que obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[j \frac{2\pi}{N} (m - k)n\right] = \frac{1 - \exp[j(2\pi/N)(m - k)N]}{1 - \exp[j(2\pi/N)(m - k)]} = 0 \quad (7.2.10)$$

Si $m - k$ es un múltiplo entero de N , podemos utilizar la Ecuación (7.2.9) con lo que tenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[j \frac{2\pi}{N} (m - k)n\right] = N \quad (7.2.11)$$

Combinando las Ecuaciones (7.2.10) y (7.2.11) podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[j \frac{2\pi}{N} (m - k)n\right] = N\delta(m - k - rN) \quad (7.2.12)$$

siendo $\delta(m - k - rN)$ la muestra unidad situada en la posición $m = k + rN$. Sustituyendo en la Ecuación (7.2.7) obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} kn\right] = \sum_{m=\langle N \rangle} N a_m \delta(m - k - rN) \quad (7.2.13)$$

Como la suma del lado derecho se realiza sobre N valores consecutivos de m para un valor fijo de k , resulta claro que el único valor que puede tomar r en el intervalo de la suma es $r = 0$. Por lo tanto, el único valor distinto de cero de la suma corresponde a $m = k$ y el lado derecho de la Ecuación (7.2.13) toma el valor $N a_k$, con lo que

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} kn\right] \quad (7.2.14)$$

Como todos los términos de la suma de la Ecuación (7.2.14) son periódicos de período N , la suma se puede realizar sobre N valores sucesivos de n . Por lo tanto, tenemos la pareja de ecuaciones

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \exp\left[j \frac{2\pi}{N} kn\right] \quad (7.2.15)$$

y

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} kn\right] \quad (7.2.16)$$

que forman la pareja del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto.

Como $x_{k+N}(n) = x_k(n)$, es inmediato ver que

$$a_{k+N} = a_k \quad (7.2.17)$$

Como el desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas en tiempo discreto es una suma finita definida completamente por los valores de la señal en un período, el desarrollo

en serie siempre converge. El desarrollo en serie de Fourier proporciona entonces una representación alternativa *exacta* de la señal en el dominio del tiempo, y no surgen problemas de convergencia, ni aparece el fenómeno de Gibbs.

Ejemplo 7.2.1 Sea $x(n) = \exp[jK\Omega_0 n]$ para un determinado valor de K y con $\Omega_0 = 2\pi/N$. $x(n)$ es periódica de período N y se puede expresar así:

$$x(n) = \exp\left[j \frac{2\pi}{N} K n\right] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Observando la Ecuación (7.2.15), vemos que en el intervalo $0 \leq k \leq N-1$, sólo $a_k = 1$, y todos los demás valores valen cero. Como $a_{K+N} = a_K$, el espectro de $x(n)$ es un espectro de líneas que consiste en impulsos discretos de amplitud unidad que se repiten a intervalos de $N\Omega_0$, como se muestra en la Figura 7.2.1.

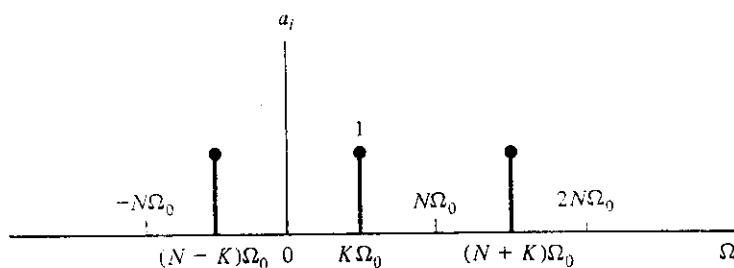


Figura 7.2.1. Espectro de la señal compleja del Ejemplo 7.2.1.

Ejemplo 7.2.2 Sea $x(n)$ la señal

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{9}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{7} + \frac{1}{2}\right)$$

Como vimos en el Ejemplo 6.1.2, esta señal es periódica de período $N = 126$ y frecuencia fundamental $\Omega_0 = 2\pi/126$, y los valores de $\pi/9$ y $\pi/7$ corresponden respectivamente a $14\Omega_0$ y $18\Omega_0$. Como $-k\Omega_0$ se corresponde con $(N-k)\Omega_0$, entonces $-\pi/9$ y $-\pi/7$ se pueden sustituir por $108\Omega_0$ y $112\Omega_0$. Podemos escribir, por tanto

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2} [e^{j\frac{\pi n}{9}} + e^{-j\frac{\pi n}{9}}] + \frac{1}{2j} [e^{j\frac{1}{2}} e^{j\frac{\pi n}{7}} + e^{-j\frac{1}{2}} e^{-j\frac{\pi n}{7}}] \\ &= \frac{1}{2} e^{j14\Omega_0 n} + \frac{e^{j\frac{1}{2}}}{2j} e^{j14\Omega_0 n} + \frac{e^{-j\frac{1}{2}}}{2j} e^{j108\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j112\Omega_0 n} \end{aligned}$$

de forma que

$$a_{14} = \frac{1}{2} = a_{112}, \quad a_{18} = \frac{e^{j\frac{1}{2}}}{2j} = a_{108}^*, \quad \text{todos los otros } a_k = 0, 0 \leq k \leq 125$$

Ejemplo 7.2.3

Consideremos la onda cuadrada periódica en tiempo discreto que se muestra en la Figura 7.2.2. Aplicando la Ecuación (7.2.16) se pueden calcular los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-M}^M \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} kn \right]$$

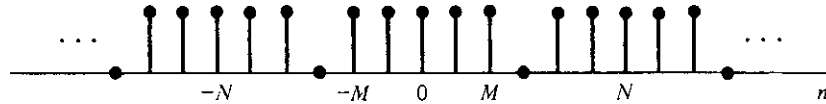


Figura 7.2.2. La onda cuadrada periódica del Ejemplo 7.2.3.

Para $k = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=-M}^M (1) = \frac{2M+1}{N}$$

Para $k \neq 0$ se puede utilizar la Ecuación (6.3.7) con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \frac{\exp[j(2\pi/N)kM] - \exp[-j(2\pi/N)k(M+1)]}{1 - \exp[-j(2\pi/N)k]} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\exp[-j(2\pi/N)(k/2)] \left\{ \exp\left[j(2\pi/N)k\left(M + \frac{1}{2}\right)\right] - \exp\left[-j(2\pi/N)k\left(M + \frac{1}{2}\right)\right] \right\}}{\exp[-j(2\pi/N)(k/2)] \{ \exp[j(2\pi/N)(k/2)] - \exp[-j(2\pi/N)(k/2)] \}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\text{sen} \left[\frac{2\pi k}{N} \left(M + \frac{1}{2} \right) \right]}{\text{sen} \left[\left(\frac{2\pi}{N} \right) \left(\frac{k}{2} \right) \right]}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir una expresión para los coeficientes a_k en función de los valores de la función

$$f(\Omega) = \frac{\text{sen}[(2M+1)(\Omega/2)]}{\text{sen}(\Omega/2)}$$

que es

$$a_k = \frac{1}{N} f\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

La función $f(\cdot)$ es semejante a la función de muestreo $(\text{sen } x)/x$ que ya conocemos del caso de tiempo continuo. Pero mientras que la función sinc no era periódica, la función $f(\Omega)$, que es el cociente de dos señales sinusoidales de frecuencias proporcionales, es periódica de período 2π . La Figura 7.2.3 muestra los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier para $M = 3$ con valores de N de 10, 20 y 30.

La Figura 7.2.4 muestra las sumas parciales $x_p(n)$ del desarrollo en serie de Fourier de este ejemplo para $N = 11$, $M = 3$ y valores de $p = 1, 2, 3, 4$ y 5 . $x_p(n)$ vale

$$x_p(n) = \sum_{k=-p}^p a_k \exp \left[j \frac{2\pi}{N} kn \right]$$

Como puede verse en la figura, la suma parcial es exactamente igual a la secuencia original para $p = 5$.

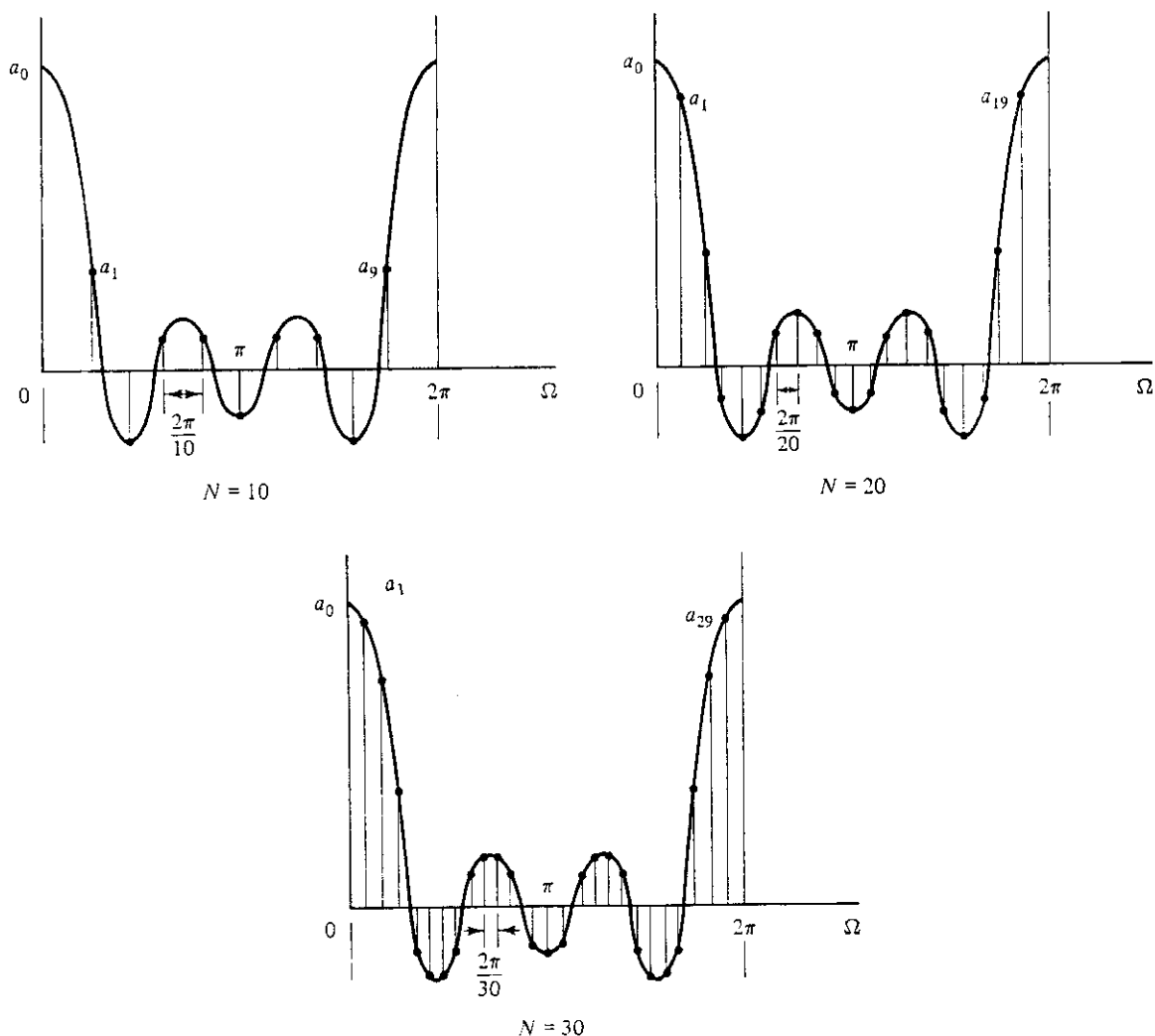


Figura 7.2.3. Coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la onda cuadrada periódica del Ejemplo 7.2.3.

Ejemplo 7.2.4 Sea $x(n)$ la extensión periódica de la secuencia

$$\{2, -1, 1, 2\}$$

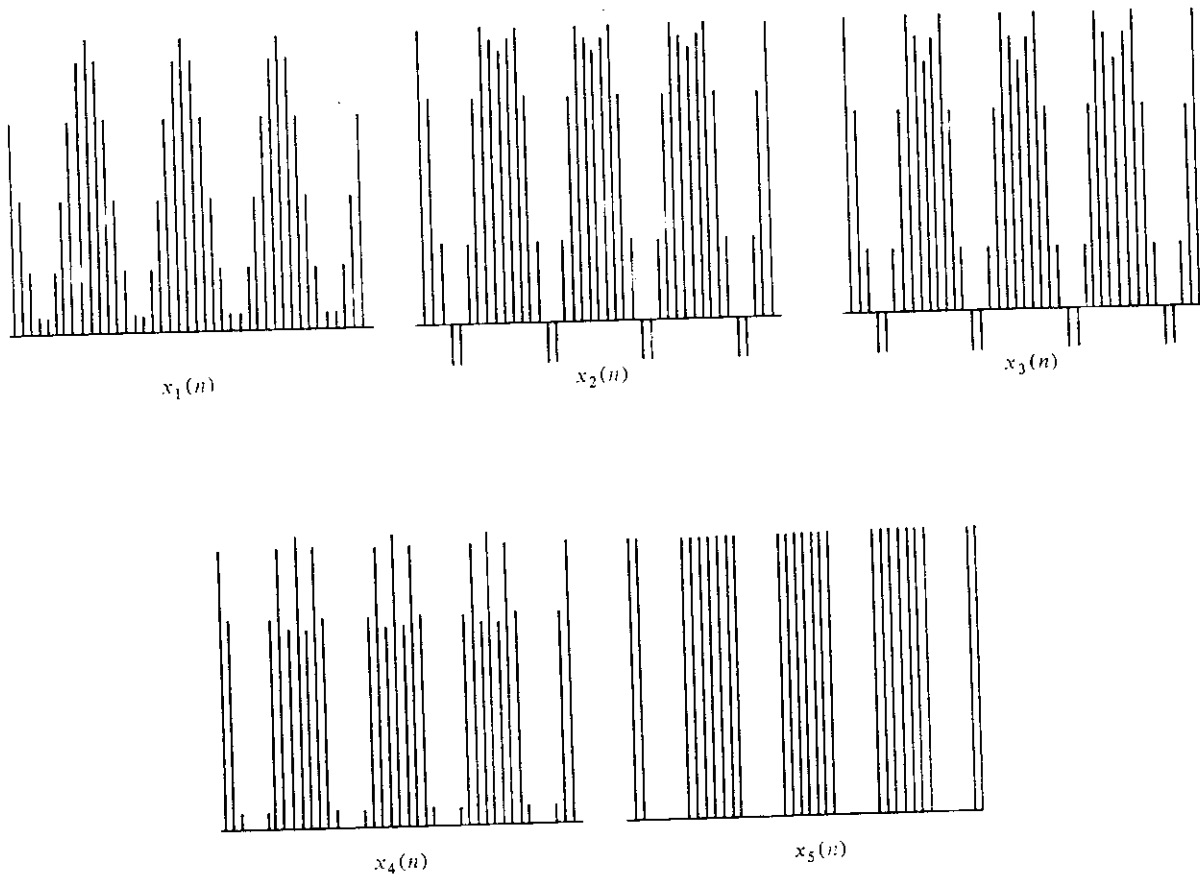


Figura 7.2.4. Sumas parciales del desarrollo en serie de Fourier una onda cuadrada periódica.

El período es $N = 4$, con lo que $\exp[-j2\pi/N] = -j$. Los coeficientes a_k se expresan, por tanto, así:

$$a_0 = \frac{1}{4} (2 - 1 + 1 + 2) = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{4} (2 + j - 1 + 2j) = \frac{1}{4} - j \frac{1}{4}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} (2 + 1 + 1 - 2) = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{4} (2 - j - 1 - 2j) = \frac{1}{4} + j \frac{1}{4} = a_1^*$$

En general, si $x(n)$ es una secuencia periódica real, entonces

$$a_k = a_{N-k}^* \quad (7.2.18)$$

Ejemplo 7.2.5 Consideremos la secuencia periódica cuyos coeficientes del desarrollo en serie de Fourier valen

$$a_k = \frac{1}{6} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{6} + \frac{1}{12} \cos \frac{k\pi}{2}, \quad 0 \leq k \leq 11$$

La señal $x(n)$ se puede determinar así:

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=0}^{11} a_k \exp \left[j \frac{2\pi}{12} nk \right] \\ &= \sum_{k=0}^{11} \left[\frac{\exp [j(k\pi/6)] - \exp [-j(k\pi/6)]}{12j} + \frac{\exp [j(k\pi/2)] + \exp [-j(k\pi/2)]}{24} \right] \exp \left[j \frac{2\pi}{12} nk \right] \\ &= \sum_{k=0}^{11} \left[\frac{1}{12j} \left\{ \exp \left[j \frac{2\pi}{12} k(n+1) \right] - \exp \left[j \frac{2\pi}{12} k(n-1) \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} \left\{ \exp \left[j \frac{2\pi}{12} k(n+3) \right] \exp \left[j \frac{2\pi}{12} k(n-3) \right] \right\} \right] \end{aligned}$$

Utilizando la Ecuación (7.2.12), podemos poner

$$x(n) = \frac{1}{j} \delta(n+1) - \frac{1}{j} \delta(n-1) + \frac{1}{2} \delta(n+3) + \frac{1}{2} \delta(n-3)$$

Los valores de la secuencia $x(n)$ en un período se expresan, por tanto:

$$\left\{ 0, -\frac{1}{j}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{j} \right\}$$

donde hemos utilizado que $x(N+k) = x(k)$.

Por tanto, de la definición de la Ecuación (7.2.16) se deduce que dadas dos secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$, ambas de período N , cuyos coeficientes de Fourier son a_{1k} y a_{2k} , los coeficientes de la secuencia $Ax_1(n) + Bx_2(n)$ valen $Aa_{1k} + Ba_{2k}$.

Dada una secuencia periódica con coeficientes a_k , los coeficientes b_k correspondientes a la secuencia desplazada $x(n-m)$ valen

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n-m) \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} kn \right] \quad (7.2.19)$$

Sustituyendo $n-m$ por n y teniendo en cuenta que la suma se realiza en N valores sucesivos de n , podemos escribir

$$b_k = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} kn \right] \right) \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} km \right] = \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} km \right] a_k \quad (7.2.20)$$

Sea $x(n)$ una secuencia periódica cuyos coeficientes de Fourier son a_k . Esta secuencia $x(n)$ es la entrada a un sistema lineal cuya respuesta al impulso es $h(n)$, que no es periódica [nótese que si $h(n)$ fuera periódica, la convolución lineal de $x(n)$ y $h(n)$ no estaría definida]. Ya que hemos visto en la Ecuación (7.1.7) que la respuesta $y_k(n)$ a la entrada $a_k \exp[j(2\pi/N)kn]$ es

$$y_k(n) = a_k H\left(\frac{2\pi}{N} k\right) \exp\left[j \frac{2\pi}{N} kn\right] \quad (7.2.21)$$

por lo tanto, la respuesta a la señal $x(n)$ se puede escribir

$$y(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} y_k(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H\left(\frac{2\pi}{N} k\right) \exp\left[j \frac{2\pi}{N} kn\right] \quad (7.2.22)$$

donde $H(2\pi k/N)$ se obtiene evaluando la función $H(\Omega)$ definida en la Ecuación (7.1.8) en los valores $\Omega = 2\pi k/N$.

Si $x_1(n)$ y $x_2(n)$ son dos secuencias periódicas del mismo período cuyos coeficientes de Fourier son a_{1k} y a_{2k} , se puede demostrar que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de su convolución periódica valen $Na_{1k}a_{2k}$ (véase Problema 7.7b). Es decir,

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \leftrightarrow Na_{1k}a_{2k}$$

Y también se puede demostrar que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de su producto valen $a_{1k} \otimes a_{2k}$ (véase Problema 7.7a):

$$x_1(n)x_2(n) \leftrightarrow a_{1k} \otimes a_{2k}$$

La Tabla 7.1 resume estas propiedades

Tabla 7.1. Propiedades del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto

1. Coeficientes de Fourier	$x_i(n)$ periódica de período N	$a_{ik} = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} x_i(n) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} nk\right]$	(7.2.14)
2. Linealidad	$Ax_1(n) + Bx_2(n)$	$Aa_{1k} + Ba_{2k}$	
3. Desplazamiento temporal	$x(n - m)$	$\exp\left[-j \frac{2\pi}{N} km\right] a_k$	(7.2.20)
4. Convolución	$x(n) * h(n); h(n)$ no periódica	$a_k H\left(\frac{2\pi}{N} k\right)$	(7.2.21)
		$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \exp[-j\Omega n]$	
5. Convolución periódica	$x_1(n) \otimes x_2(n)$	$Na_{1k}a_{2k}$	(7.2.23)
6. Modulación	$x_1(n)x_2(n)$	$a_{1k} \otimes a_{2k}$	(7.2.24)

Ejemplo 7.2.6 Consideremos un sistema cuya respuesta al impulso es $h(n) = (1/3)^n u(n)$. Supongamos que deseamos calcular el desarrollo en serie de Fourier de la salida $y(n)$ cuando la entrada $x(n)$ es la extensión periódica de la secuencia $\{2, -1, 1, 2\}$. Aplicando la Ecuación (7.2.22) se deduce que el desarrollo en serie de Fourier de la señal $y(n)$ es

$$y(n) = \sum_{\langle N \rangle} b_k \exp \left[j \frac{2\pi}{N} kn \right]$$

con

$$b_k = a_k H \left(\frac{2\pi}{N} k \right)$$

Del Ejemplo 7.2.4, sabemos que

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_3^* = \frac{1}{4} - j \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

Utilizando la Ecuación (7.1.8) podemos escribir

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n \exp[-j\Omega n] = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \exp[-j\Omega]}$$

con lo que haciendo $N = 4$ tenemos

$$H \left(\frac{2\pi}{N} k \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \exp \left[-j \frac{\pi}{2} k \right]}$$

de donde se deduce que

$$b_0 = H(0)a_0 = \frac{3}{2}$$

$$b_1 = H \left(\frac{\pi}{2} \right) a_1 = \frac{3(1-j2)}{20}$$

$$b_2 = H(\pi)a_2 = \frac{3}{8}$$

$$b_3 = b_1^* = \frac{3(1+j2)}{20}$$

7.3. LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Consideraremos ahora la representación en el dominio de la frecuencia de señales en tiempo discreto que no son necesariamente periódicas. Para el caso de señales en tiempo conti-

nuo, obtuvimos esta representación definiendo la transformada de Fourier de una señal $x(t)$ como

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j\omega t] dt \quad (7.3.1)$$

con respecto a la variable de la transformación ω (frecuencia). Para señales en tiempo discreto, presentaremos una definición análoga. Para motivar esta definición, se muestrea uniformemente la señal $x(t)$ cada T segundos, con lo que obtenemos las muestras $x(nT)$. Si recordamos las Ecuaciones (4.4.1) y (4.4.2), la señal muestreada se puede expresar así:

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (7.3.2)$$

con lo que su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega Tn} \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

donde el último paso se puede realizar aplicando la propiedad de desplazamiento de la función δ .

Si sustituimos en la expresión anterior el valor ωT por la variable de frecuencia en tiempo discreto Ω , obtenemos la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(\Omega)$ de la señal en tiempo discreto $x(n)$ obtenida por muestreo de $x(t)$:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp[-j\Omega n] \quad (7.3.4)$$

La Ecuación (7.3.4), de hecho, define la transformada de Fourier en tiempo discreto de *cualquier* señal en tiempo discreto $x(n)$. Esta transformada existe si la señal $x(n)$ satisface una relación del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad \text{o} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (7.3.5)$$

Estas condiciones son suficientes para garantizar que la secuencia tiene transformada discreta de Fourier. Como en el caso de señales en tiempo continuo, existen señales que ni son sumables en valor absoluto ni tienen energía finita, pero que tienen transformada de Fourier en tiempo discreto.

Recalcamos que aunque las unidades de ω son radianes por segundo, las unidades de Ω son radianes. Como $\exp[j\Omega n]$ es periódica de período 2π , $X(\Omega)$ será también periódica con el mismo período, ya que

$$\begin{aligned} X(\Omega + 2\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp[-j(\Omega + 2\pi)n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp[-j\Omega n] = X(\Omega) \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

Como consecuencia, mientras que en el caso de tiempo continuo teníamos que considerar valores de ω en todo el eje real, en el caso de tiempo discreto sólo tendremos que considerar los valores de Ω en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Para calcular la relación inversa entre $X(\Omega)$ y $x(n)$ sustituiremos en la Ecuación (7.3.4) la variable n por p , con lo que obtenemos

$$X(\Omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(p) \exp[-j\Omega p] \quad (7.3.7)$$

Seguidamente, multiplicaremos ambos miembros de la Ecuación (7.3.7) por $\exp[j\Omega n]$ e integraremos en el intervalo $[0, 2\pi]$ con lo que resulta

$$\int_{\Omega=0}^{2\pi} X(\Omega) \exp[j\Omega n] d\Omega = \int_{\Omega=0}^{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(p) \exp[j\Omega(n-p)] d\Omega \quad (7.3.8)$$

Intercambiando el orden de las operaciones de suma e integración en el lado derecho de la Ecuación (7.3.8) obtenemos

$$\int_0^{2\pi} X(\Omega) \exp[j\Omega n] d\Omega = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(p) \int_0^{2\pi} \exp[j\Omega(n-p)] d\Omega \quad (7.3.9)$$

Se puede comprobar (véase Problema 7.10) que

$$\int_0^{2\pi} \exp[j\Omega(n-p)] d\Omega = \begin{cases} 2\pi, & n = p \\ 0, & n \neq p \end{cases} \quad (7.3.10)$$

con lo que el lado derecho de la Ecuación (7.3.9) vale $2\pi x(n)$. Podemos escribir, por tanto

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) \exp[j\Omega n] d\Omega \quad (7.3.11)$$

Como el integrando de la Ecuación (7.3.11) es periódico de período 2π , la integral se puede realizar sobre cualquier intervalo de amplitud 2π . Por tanto, las relaciones de la transformada de Fourier en tiempo discreto se pueden escribir

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp[-j\Omega n] \quad (7.3.12)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) \exp[j\Omega n] d\Omega \quad (7.3.13)$$

Ejemplo 7.3.1 Consideremos la secuencia

$$x(n) = \alpha^n u(n), \quad |\alpha| < 1$$

Para esta secuencia

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \exp[-j\Omega n] = \frac{1}{1 - \alpha \exp[-j\Omega]}$$

Su módulo es

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Omega}}$$

y su fase,

$$\text{Arg } X(\Omega) = -\tan^{-1} \frac{\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega}$$

La Figura 7.3.1 muestra la fase y el módulo del espectro de esta señal para $\alpha > 0$. Nótese que estas funciones son periódicas de período 2π .

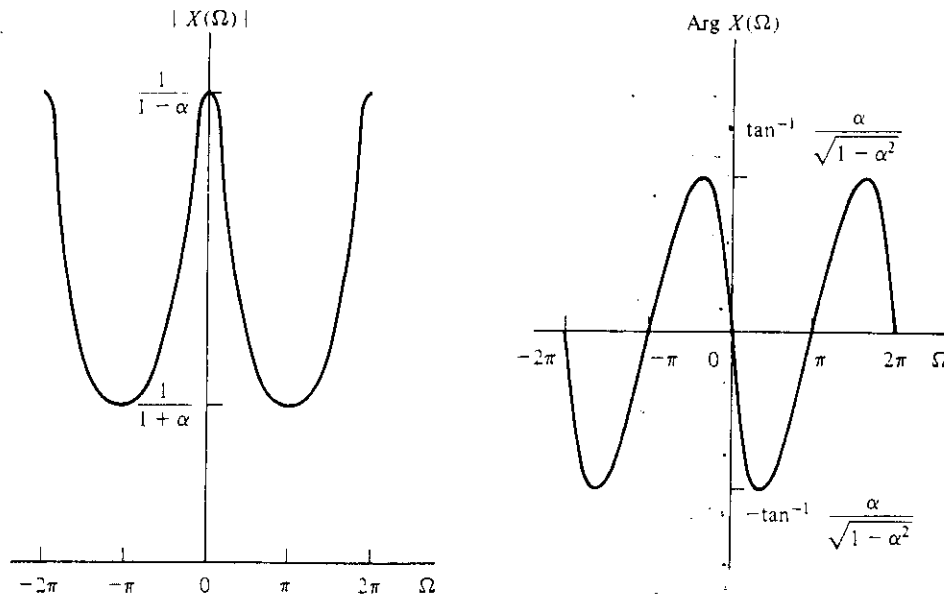


Figura 7.3.1. Espectro de Fourier de la señal del Ejemplo 7.3.1.

Ejemplo 7.3.2 Sea

$$x(n) = \alpha^{|n|}, \quad |\alpha| < 1$$

Obtenemos la transformada de Fourier de $x(n)$ mediante la expresión

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{|n|} \exp[-j\Omega n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^{-n} \exp[-j\Omega n] + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \exp[-j\Omega n] \end{aligned}$$

que se puede expresar en forma cerrada haciendo uso de la Ecuación (6.3.7),

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{1}{1 - \alpha^{-1} \exp[-j\Omega]} + \frac{1}{1 - \alpha \exp[-j\Omega]} \\ &= \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2} \end{aligned}$$

En este caso $X(\Omega)$ es real, con lo que la fase vale cero. El módulo se muestra en la Figura 7.3.2.

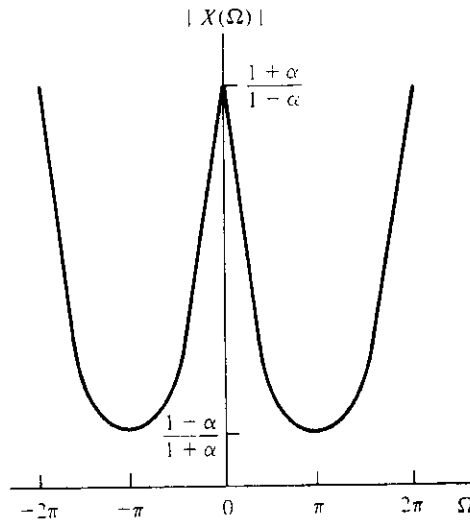


Figura 7.3.2. Amplitud del espectro de la señal del Ejemplo 7.3.2.

Ejemplo 7.3.3 Consideremos la secuencia $x(n) = \exp[j\Omega_0 n]$ siendo Ω_0 un valor arbitrario. Por tanto, $x(n)$ no es necesariamente una señal periódica. Entonces

$$X(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m) \quad (7.3.14)$$

En el intervalo $[0, 2\pi]$, $X(\Omega)$ es una función δ de peso 2π situada en $\Omega = \Omega_0$. Como cabía esperar y tal como indica la Ecuación (7.3.14), $X(\Omega)$ es una extensión periódica de

período 2π de esta función δ (véase Figura 7.3.3). Para obtener la Ecuación (7.3.14) utilizaremos la Ecuación (7.3.13) de la transformada inversa de Fourier

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathcal{F}^{-1}\{x(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \exp[j\Omega n] d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m) \right] \exp[j\Omega n] d\Omega \\ &= \exp[j\Omega_0 n] \end{aligned}$$

en donde el último paso resulta de que el único valor que puede tomar m en el intervalo de integración es $m = 0$.

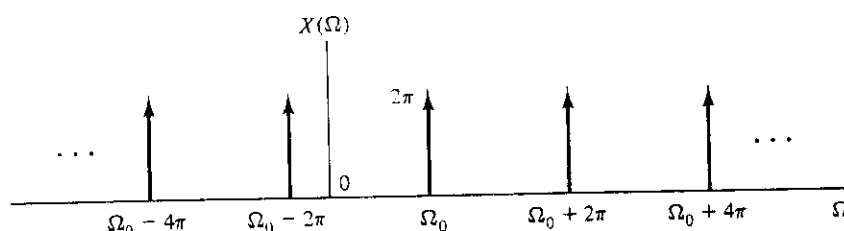


Figura 7.3.3. Espectro de la señal $\exp[j\Omega_0 n]$.

Podemos modificar los resultados de este ejemplo para determinar la transformada de Fourier de una señal exponencial periódica. Sea $x(n) = \exp[jk\Omega_0 n]$ con $\Omega_0 = 2\pi/N$. Podemos expresar la transformada de Fourier [Ecuación (7.3.12)] de la siguiente forma

$$X(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi m)$$

Sustituyendo 2π por $N\Omega_0$ obtenemos

$$X(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} N\Omega_0 \delta(\Omega - k\Omega_0 - N\Omega_0 m)$$

Es decir, el espectro está formado por un número infinito de impulsos de peso $N\Omega_0$ situados en $k\Omega_0$, $(k \pm N)\Omega_0$, $(k \pm 2N)\Omega_0$, etc. Este resultado se puede comparar con el obtenido en el Ejemplo 7.2.1, donde consideramos el desarrollo en serie de Fourier de $x(n)$. La diferencia, como en el caso de tiempo continuo, es que en el desarrollo en serie de Fourier la variable frecuencia toma sólo valores discretos, mientras que en la transformada de Fourier la variable frecuencia es continua.

7.4. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

Las propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto guardan un estrecho paralelismo con las de la transformada de Fourier en tiempo continuo. Estas propiedades

resultan de utilidad en el análisis de señales y sistemas y en la simplificación de cálculos en transformadas directas e inversas. En esta sección presentaremos algunas de las propiedades más útiles.

7.4.1. Periodicidad

Ya hemos visto que la transformada de Fourier en tiempo discreto es periódica en Ω de período 2π . Es decir

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \quad (7.4.1)$$

7.4.2. Linealidad

Sean $x_1(n)$ y $x_2(n)$ dos secuencias cuyas transformadas de Fourier son, respectivamente, $X_1(\Omega)$ y $X_2(\Omega)$. Entonces

$$\mathcal{F}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1X_1(\Omega) + a_2X_2(\Omega) \quad (7.4.2)$$

para cualquier valor de las constantes a_1 y a_2 .

7.4.3. Desplazamientos en el tiempo y en la frecuencia

Mediante sustitución directa en las ecuaciones de definición de las transformadas de Fourier se puede demostrar fácilmente que

$$\mathcal{F}[x(n - n_0)] = \exp[-j\Omega n_0]X(\Omega) \quad (7.4.3)$$

y

$$\mathcal{F}[\exp[j\Omega_0 n]x(n)] = X(\Omega - \Omega_0) \quad (7.4.4)$$

7.4.4. Diferenciación en frecuencia

Como

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp[-j\Omega n]$$

se deduce que si derivamos ambos miembros con respecto a Ω obtenemos

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-jn)x(n) \exp[-j\Omega n]$$

con lo que podemos escribir

$$\mathcal{F}[nx(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n) \exp[-j\Omega n] = j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad (7.4.5)$$

Ejemplo 7.4.1

Sea la señal $x(n) = n\alpha^n u(n)$, con $|\alpha| < 1$. Utilizando los resultados del Ejemplo 7.3.1, podemos escribir

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= j \frac{d}{d\Omega} \mathcal{F}\{\alpha^n u(n)\} = j \frac{d}{d\Omega} \frac{1}{1 - \alpha \exp[-j\Omega]} \\ &= \frac{\alpha \exp[-j\Omega]}{(1 - \alpha \exp[-j\Omega])^2} \end{aligned}$$

7.4.5. Convolución

Sea la señal $y(n)$ la convolución de dos señales en tiempo discreto $x(n)$ y $h(n)$. Es decir

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (7.4.6)$$

Entonces

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) \quad (7.4.7)$$

Este resultado se puede comprobar muy fácilmente utilizando la definición de la operación de convolución dada en la Ecuación (6.3.2) y la definición de transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \exp[-j\Omega n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right] \exp[-j\Omega n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) \exp[-j\Omega n] \right] \end{aligned}$$

El último paso se realiza intercambiando el orden de la suma. Si ahora sustituimos $n-k$ por n en la suma interna obtenemos

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp[-j\Omega n] \right] \exp[-j\Omega k]$$

con lo que

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(\Omega) \exp[-j\Omega k] \\ &= H(\Omega)X(\Omega) \end{aligned}$$

Como en el caso de sistemas en tiempo continuo, esta propiedad es extremadamente útil en el análisis de sistemas lineales en tiempo discreto. La función $H(\Omega)$ se denomina *respuesta en frecuencia* del sistema.

Ejemplo 7.4.2 Un retardo puro se describe mediante la relación entrada-salida

$$y(n) = x(n - n_0)$$

Tomando las transformadas de Fourier de ambos miembros y utilizando la Ecuación (7.4.3) se obtiene

$$Y(\Omega) = \exp[-j\Omega n_0]X(\Omega)$$

Por lo tanto, la respuesta en frecuencia del retardo puro es

$$H(\Omega) = \exp[-j\Omega n_0]$$

Como $H(\Omega)$ tiene ganancia unidad para todas las frecuencias y fase lineal, es un sistema sin distorsión.

Ejemplo 7.4.3 Sean

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Sus respectivas transformadas de Fourier son

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \exp[-j\Omega]}$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \exp[-j\Omega]}$$

con lo que

$$\begin{aligned} Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \exp[-j\Omega]} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \exp[-j\Omega]} \\ &= \frac{3}{1 - \frac{1}{2} \exp[-j\Omega]} - \frac{2}{1 - \frac{1}{3} \exp[-j\Omega]} \end{aligned}$$

Comparando los dos términos de la expresión anterior con el valor de $X(\Omega)$ en el Ejemplo 7.3.1, vemos que $y(n)$ se puede expresar así:

$$y(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Ejemplo 7.4.4 Realizaremos una modificación del Ejemplo 7.3.2. Sea

$$h(n) = \alpha^{|n-n_0|}, \quad -\infty < n < \infty$$

la respuesta al impulso de un sistema en tiempo discreto. Claramente, representa a un sistema IIR no causal. Siguiendo el procedimiento del Ejemplo 7.3.2, se puede verificar fácilmente que la respuesta al impulso del sistema es

$$H(\Omega) = \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2} \exp[-j\Omega n_0]$$

El módulo $|H(\Omega)|$ vale lo mismo que $X(\Omega)$ en el Ejemplo 7.3.2, y se muestra en la Figura 7.3.2. La fase es

$$\text{Arg } H(\Omega) = -n_0\Omega$$

Por lo tanto, $H(\Omega)$ representa un sistema de fase lineal con un retardo asociado de n_0 . Se puede demostrar que, en general, un sistema tendrá fase lineal si $h(n)$ satisface la relación

$$h(n) = h(2n_0 - n), \quad -\infty < n < \infty$$

Si el sistema es IIR, esta condición implica que no será causal. Como los sistemas en tiempo continuo son siempre IIR, un sistema en tiempo continuo causal no podrá tener fase lineal. Para el caso de un sistema FIR en tiempo discreto, para el que la respuesta al impulso es una secuencia de N puntos, podemos encontrar un sistema causal $h(n)$ que satisfaga la condición de fase lineal haciendo que el retardo n_0 sea igual a $(N-1)/2$. Entonces se puede comprobar muy fácilmente que $h(n)$ satisface la relación

$$h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Ejemplo 7.4.5 Sea la respuesta en frecuencia

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

Es decir, $H(\Omega)$ representa la función de transferencia de un filtro discreto paso bajo ideal con frecuencia de corte Ω_c radianes. Utilizando la Ecuación (7.3.11) podemos calcular la respuesta al impulso de este filtro:

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} \exp[j\Omega n] d\Omega \\ &= \frac{\sin \Omega_c n}{\pi n} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.4.6 Vamos a calcular la salida $y(n)$ de un sistema cuya respuesta al impulso es

$$h(n) = \delta(n) - \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)}{\pi n}$$

cuando la entrada es

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{9}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{7} + \frac{1}{2}\right)$$

Utilizando el desarrollo del Ejemplo 7.2.2 y la Ecuación (7.3.14) se deduce que para $\Omega_0 = \pi/128$, en el intervalo $0 \leq \Omega < 2\pi$

$$X(\Omega) = 2\pi \left[\frac{1}{2} \delta(\Omega - 14\Omega_0) + \frac{e^{j\frac{1}{2}}}{2j} \delta(\Omega - 18\Omega_0) + \frac{e^{-j\frac{1}{2}}}{2j} \delta(\Omega - 108\Omega_0) + \frac{1}{2} \delta(\Omega - 112\Omega_0) \right]$$

Ahora,

$$H(\Omega) = 1 - \text{rect}\left(\frac{\Omega}{\pi/4}\right), \quad -\pi \leq |\Omega| < \pi$$

con lo que en el intervalo $0 \leq \Omega < 2\pi$ tenemos

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{8} \leq \Omega < \frac{15\pi}{8} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = 2\pi \left[\frac{e^{j\frac{1}{2}}}{2j} \delta(\Omega - 18\Omega_0) + \frac{e^{-j\frac{1}{2}}}{2j} \delta(\Omega - 108\Omega_0) \right]$$

y

$$y(n) = \frac{e^{j\frac{1}{2}}}{2j} e^{j18\Omega_0 n} + \frac{e^{-j\frac{1}{2}}}{2j} e^{j108\Omega_0 n}$$

que se puede simplificar,

$$y(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{7} + \frac{1}{2}\right)$$

7.4.6. Modulación

Sea la señal $y(n)$ el producto de dos secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$ cuyas transformadas son, respectivamente, $X_1(\Omega)$ y $X_2(\Omega)$. Entonces

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n) \exp[-j\Omega n]$$

Si utilizamos la expresión de la transformada inversa para poner $x_1(n)$ en función de su transformada de Fourier, tenemos

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X_1(\theta) \exp[j\theta n] d\theta \right] x_2(n) \exp[-j\Omega n]$$

Intercambiando el orden de la suma y la integración resulta

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X_1(\theta) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) \exp[-j(\Omega - \theta)n] \right\} d\theta$$

con lo que

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\langle 2\pi \rangle} X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta) d\theta \quad (7.4.8)$$

7.4.7. Transformada de Fourier de secuencias periódicas en tiempo discreto

Sea $x(n)$ una secuencia periódica de período N . Podemos expresar $x(n)$ mediante su desarrollo en serie de Fourier

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp[jk\Omega_0 n] \quad (7.4.9)$$

donde

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (7.4.10)$$

Entonces

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathcal{F}[x(n)] = \mathcal{F}\left[\sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp[jk\Omega_0 n]\right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \mathcal{F}[\exp[jk\Omega_0 n]] \end{aligned}$$

Como vimos en el Ejemplo 7.3.3, en el intervalo $[0, 2\pi]$,

$$\mathcal{F}[\exp[jk\Omega_0 n]] = 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

con lo que

$$X(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0), \quad 0 \leq \Omega < 2\pi \quad (7.4.11)$$

Como la transformada de Fourier en tiempo discreto es periódica de período 2π , $X(\Omega)$ estará formada por una serie de N impulsos de pesos $2\pi a_k$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, que

se repiten a intervalos de $N\Omega_0 = 2\pi$. Por lo tanto, $X(\Omega)$ se puede escribir de forma compacta:

$$X(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0), \quad \text{para todo } \Omega \quad (7.4.12)$$

La Figura 7.4.1 muestra el espectro para el caso de $N = 3$.

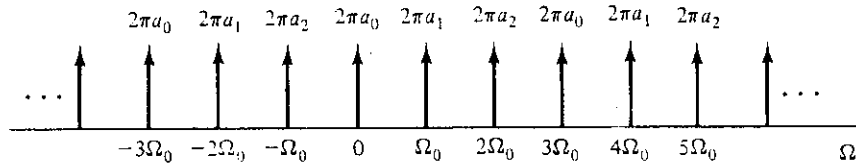


Figura 7.4.1. Espectro de una señal periódica con $N = 3$.

La Tabla 7.2 resume las propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto, y la Tabla 7.3 presenta las transformadas de algunas secuencias comunes.

Tabla 7.2. Propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto

1. Linealidad	$Ax_1(n) + Bx_2(n)$	$AX_1(\Omega) + BX_2(\Omega)$	(7.4.2)
2. Desplazamiento temporal	$x(n - n_0)$	$\exp[-j\Omega n_0]X(\Omega)$	(7.4.3)
3. Desplazamiento en frecuencia	$x(n)\exp[j\Omega_0 n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$	(7.4.4)
4. Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\Omega)X_2(\Omega)$	(7.4.7)
5. Modulación	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(p)X_2(\Omega - p) dp$	(7.4.8)
6. Señales periódicas	$x(n)$ periódica de período N	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$	(7.4.11)
	$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{\langle n \rangle} x(n) \exp[-j\Omega_0 n]$	

7.5. TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES EN TIEMPO CONTINUO MUESTREADAS

Concluiremos este capítulo con unas ideas sobre las transformadas de Fourier de señales en tiempo continuo (analógicas) muestreadas. Recordemos que se puede obtener una señal en tiempo discreto *muestreando* una señal en tiempo continuo. Sea $x_a(t)$ la señal analógica que se muestrea a intervalos iguales de tiempo T :

$$x(n) = x_a(nT) \quad (7.5.1)$$

Tabla 7.3. Algunas parejas de transformadas de Fourier en tiempo discreto de uso común

Señales	Transformada de Fourier (periódicas en Ω , período 2π)
$\delta(n)$	1
1	$2\pi\delta(\Omega)$
$\exp[j\Omega_0 n]$, Ω_0 arbitraria	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp[jk\Omega_0 n]$, $N\Omega_0 = 2\pi$	$\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$
$\alpha^n u(n)$, $ \alpha < 1$	$\frac{1}{1 - \alpha \exp[-j\Omega]}$
$\alpha^{ n }$, $ \alpha < 1$	$\frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2}$
$n\alpha^n u(n)$, $ \alpha < 1$	$\frac{\alpha \exp[-j\Omega]}{(1 - \alpha \exp[-j\Omega])^2}$
$\text{rect}(n/N_1)$	$\frac{\text{sen} \left[\Omega \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) \right]}{\text{sen}(\Omega/2)}$
$\frac{\text{sen } \Omega_c n}{\pi n}$	$\text{rect}(\Omega/2\Omega_c)$

En algunas aplicaciones, las señales que aparecen en algunas partes de los sistemas pueden ser señales en tiempo discreto, mientras que en otras partes pueden ser señales analógicas. Un ejemplo puede ser un sistema en el que se utiliza un microprocesador para procesar las señales del sistema o para realizar tareas de control. En estos sistemas *híbridos* o con *datos muestreados* es ventajoso considerar la señal muestreada como si fuera una señal en tiempo continuo, de forma que todas las señales del sistema se pueden tratar igual. Cuando consideremos de esta manera una señal muestreada, la denominaremos $x_s(t)$.

Podemos escribir una señal analógica $x_a(t)$ en función de su transformada de Fourier $X_a(\omega)$:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega) \exp[j\omega t] d\omega \quad (7.5.2)$$

Los valores de las muestras $x(n)$ se obtienen haciendo $t = nT$ en la Ecuación (7.5.2), resultando

$$x(n) = x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega) \exp[j\omega nT] d\omega \quad (7.5.3)$$

Sin embargo, como $x(n)$ es una señal en tiempo discreto, podemos expresarla en función de su transformada de Fourier en *tiempo discreto* $X(\Omega)$,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \exp[j\Omega n] d\Omega \quad (7.5.4)$$

Las Ecuaciones (7.5.3) y (7.5.4) representan a la misma secuencia $x(n)$. Por lo tanto, las transformadas deben estar relacionadas. Para encontrar la relación, dividiremos el intervalo $-\infty < \omega < \infty$ en intervalos iguales de amplitud $2\pi/T$, y expresaremos el lado derecho de la Ecuación (7.5.3) como suma de integrales en esos intervalos:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{(2r-1)\pi/T}^{(2r+1)\pi/T} X_a(\omega) \exp[j\omega nT] d\omega \quad (7.5.5)$$

Si sustituimos ω por $\omega + 2\pi r/T$, podemos escribir la Ecuación (7.5.5) de la siguiente forma:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_a\left(\omega + \frac{2\pi}{T} r\right) \exp\left[j\left(\omega + \frac{2\pi}{T} r\right)nT\right] d\omega \quad (7.5.6)$$

Intercambiando el orden de la integral y el sumatorio y teniendo en cuenta que $\exp[j2\pi rnT/T] = 1$, la Ecuación (7.5.6) queda

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\omega + \frac{2\pi}{T} r\right) \right] \exp[j\omega nT] d\omega \quad (7.5.7)$$

Si hacemos el cambio de variable $\omega = \Omega/T$, la Ecuación (7.5.7) se transforma en

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T} + \frac{2\pi}{T} r\right) \right] \exp[j\Omega n] d\Omega \quad (7.5.8)$$

Comparando las Ecuaciones (7.5.8) y (7.5.4) resulta

$$X(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T} + \frac{2\pi}{T} r\right) \quad (7.5.9)$$

relación que se puede expresar en términos de la variable de frecuencia ω :

$$\omega = \frac{\Omega}{T} \quad (7.5.10)$$

Con este cambio de variable, el lado izquierdo de la Ecuación (7.5.9) se puede identificar como la transformada de Fourier en tiempo continuo de la señal muestreada y es, por lo tanto, igual a $X_s(\omega)$, la transformada de Fourier de la señal $x_s(t)$. Es decir,

$$X_s(\omega) = X(\Omega) \Big|_{\Omega=\omega T} \quad (7.5.11)$$

Además, como el intervalo de muestreo es T , la frecuencia de muestreo ω_s es igual al $2\pi/T$ rad/s. Por lo tanto, la Ecuación (7.5.9) se puede escribir así:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(\omega + r\omega_s) \quad (7.5.12)$$

Este es el resultado que obtuvimos en el Capítulo 4 al hablar de la transformada de Fourier de señales muestreadas. Observando la Ecuación (7.5.12) podemos ver claramente

que $X_s(\omega)$ es la extensión periódica con período ω_s , de la transformada de Fourier en tiempo continuo $X_a(\omega)$ de la señal analógica $x_a(t)$, con un factor de escala en la amplitud de $1/T$. Supongamos que $x_a(t)$ es una señal paso bajo, es decir, que su espectro vale cero para $\omega > \omega_0$. La Figura 7.5.1 muestra el espectro de una señal analógica de banda limitada típica y la correspondiente señal muestreada. Como se dijo en el Capítulo 4, y puede observarse en la figura, si $\omega_s - \omega_0 > \omega_0$, las componentes espectrales de $X_s(\omega)$ no se solapan. Por lo tanto, la señal $x_a(t)$ se podrá recuperar partiendo de la señal $x_s(t)$, pasándola por un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte ω_0 rad/s y ganancia T . Por consiguiente, no habrá distorsión de solapamiento si la frecuencia de muestreo es tal que

$$\omega_s - \omega_0 > \omega_0$$

o

$$\omega_s > 2\omega_0 \quad (7.5.13)$$

Esto es, por tanto, un replanteamiento del teorema de Nyquist que presentamos en el Capítulo 4, y que determina la mínima frecuencia de muestreo que se debe utilizar para recuperar una señal en tiempo continuo a partir de sus muestras. Claramente, si $x_a(t)$ no es de banda limitada, siempre se producirá solapamiento.

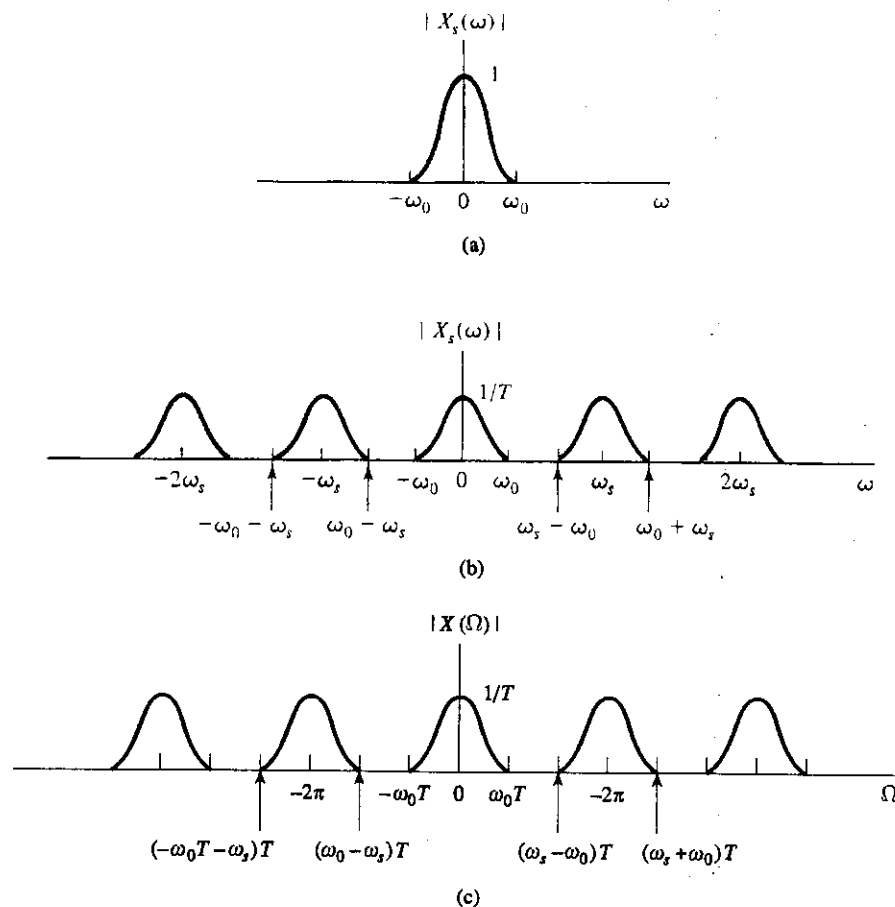


Figura 7.5.1. Espectro de señales muestreadas. (a) Espectro analógico. (b) Espectro de $x_s(t)$. (c) Espectro de $x(n)$.

La Ecuación (7.5.10) indica la relación existente entre la frecuencia analógica ω y la frecuencia digital Ω . De esta ecuación se deduce que, mientras que las unidades de ω son rad/s, las de Ω son sólo radianes.

Teniendo en cuenta la Ecuación (7.5.11) y la definición de $X(\Omega)$, se deduce que la expresión de la transformada de Fourier de la señal $x_s(t)$ es

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \exp[-j\omega nT] \quad (7.5.14)$$

Utilizando la Ecuación (7.5.14) se puede justificar el modelo de señales muestreadas mediante modulación de impulsos que utilizamos en el Capítulo 4. Empleando la propiedad de desplazamiento de la función δ , la Ecuación (7.5.14) se puede escribir así:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \exp[-j\omega t] dt$$

de donde se deduce que

$$x_s(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (7.5.15)$$

Es decir, la señal muestreada $x_s(t)$ se puede ver como el producto de la señal analógica $x_a(t)$ por el tren de impulsos $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$.

Para resumir las ideas presentadas hasta ahora, cuando se muestrea una señal analógica $x_a(t)$, la señal muestreada se puede considerar como una señal en tiempo discreto $x(n)$ o como una señal en tiempo continuo $x_s(t)$, como indican respectivamente las Ecuaciones (7.5.1) y (7.5.15). Si la señal muestreada se considera como una señal en tiempo discreto $x(n)$, se puede calcular su transformada de Fourier en tiempo discreto

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \quad (7.5.16)$$

Si consideramos que la señal muestreada es una señal en tiempo continuo $x_s(t)$, se puede obtener su transformada de Fourier en tiempo continuo mediante las Ecuaciones (7.5.12) o (7.5.14). Sin embargo, la Ecuación (7.5.12), que se expresa en forma de una suma infinita, no resulta útil para determinar $X_s(\omega)$ en forma cerrada. No obstante, posibilita la obtención del teorema de muestreo ω_s de Nyquist, que especifica la mínima frecuencia de muestreo que hay que utilizar para que no haya distorsión de la señal por el solapamiento. Utilizando la Ecuación (7.5.11) se puede ver que para obtener $X(\Omega)$ a partir de $X_s(\omega)$, debemos aplicar un factor de escala al eje de frecuencias. Por lo tanto, observando por ejemplo la Figura 7.5.1, para obtener $X(\Omega)$ en la Figura 7.5.1(c), debemos sustituir en la Figura 7.5.1(b) ω por ωT .

Si no hay solapamiento, $X_s(\omega)$ es simplemente la repetición periódica de $X_a(\omega)$ en intervalos de ω_s , con un factor de escala de $1/T$ en la amplitud, es decir,

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} X_a(\omega) \quad -\omega_s \leq \omega \leq \omega_s \quad (7.5.17)$$

Como $X(\Omega)$ es una versión escalada en frecuencia de $X_s(\omega)$, aplicando el cambio $\Omega = \omega T$, se deduce que

$$X(\Omega) = \frac{1}{T} X_s\left(\frac{\Omega}{T}\right) \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi \quad (7.5.18)$$

Ejemplo 7.5.1

Consideremos una señal analógica $x_a(t)$ cuyo espectro se muestra en la Figura 7.5.2(a). Esta señal tiene un ancho de banda unilateral de $f_0 = 5.000$ Hz, o $\omega_0 = 2\pi f_0 = 10.000\pi$ rad/s. La mínima frecuencia de muestreo que hay que utilizar para que no haya solapamiento $[\omega_s]_{\min} = 2\omega_0 = 20.000\pi$ rad/s. Por lo tanto, El máximo período de muestreo que se puede utilizar es $T_{\max} = 1/(2f_0) = 100 \mu\text{s}$.

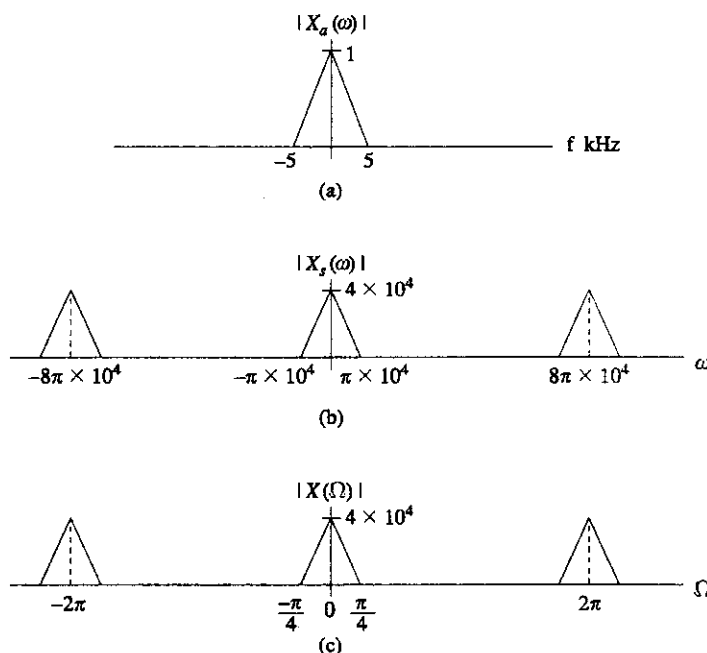


Figura 7.5.2. Espectros del Ejemplo 7.5.1.

Supongamos que muestreamos la señal con un período de muestreo de $T = 25 \mu\text{s}$. Entonces $\omega_s = 8\pi \times 10^4$ rad/s. La Figura 7.5.2(b) muestra el espectro de la señal muestreada $X_s(\omega)$, que es periódico de período ω_s . Para obtener $X(\Omega)$, simplemente aplicaremos un factor de escala al eje de frecuencias, sustituyendo ω por $\Omega = \omega T$, como muestra la Figura 7.5.2(c). El espectro resultante es, como se esperaba, periódico de período 2π .

7.5.1. Reconstrucción de señales muestreadas

Si no hubiera solapamiento, se podría recuperar la señal analógica $x_a(t)$ a partir de sus muestras $x_a(nT)$ mediante un *filtro de reconstrucción*. La entrada al filtro de reconstrucción es una señal en tiempo discreto, y su salida es una señal en tiempo continuo. Como se dijo

en el Capítulo 4, el filtro de reconstrucción consiste en un filtro paso bajo ideal. Volviendo a la Figura 7.5.1, vemos que si pasamos la señal $x_s(t)$ por un filtro cuya respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_B \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (7.5.19)$$

donde ω_B se escoge como un valor entre ω_0 y $\omega_s - \omega_0$, el espectro de la señal de salida del filtro será idéntico a $X_a(\omega)$, por lo que la salida será igual a $x_a(t)$. Si la señal se muestrea exactamente la frecuencia de Nyquist $\omega_s = 2\omega_0$, el ancho de banda del filtro de reconstrucción debe ser $\omega_B = \omega_s/2 = \pi/T$. En este caso, se dice que el filtro de reconstrucción está adaptado al sistema de muestreo. La señal reconstruida se puede obtener aplicando la Ecuación (4.4.9):

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\text{sen}[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \quad (7.5.20)$$

Como el filtro paso bajo ideal no es causal, y por tanto no es físicamente realizable, en la práctica no podremos recuperar de forma exacta $x_a(t)$ a partir de sus muestras. Por consiguiente, los filtros de reconstrucción sólo podrán proporcionar una aproximación de la señal analógica. De hecho, como podemos ver en la Ecuación (7.5.20), para reconstruir exactamente $x_a(t)$ necesitamos todos los valores $x_a(nT)$, con n en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Pero un filtro realizable sólo podrá utilizar las muestras pasadas para reconstruir $x_a(t)$. Entre los filtros realizables destacamos los *circuitos de retención*, que se basan en aproximar $x_a(t)$ en el intervalo $nT \leq t \leq (n+1)T$ mediante un desarrollo en serie

$$\hat{x}_a(t) = x_a(nT) + x'_a(nT)(t - nT) + \frac{1}{2!} x''_a(nT)(t - nT)^2 + \dots \quad (7.5.21)$$

Las derivadas se aproximan mediante los valores de las muestras pasadas. Por ejemplo, $x'_a(nT) = [x_a(nT) - x_a((n-1)T)]/T$.

El filtro de este tipo más utilizado es el filtro de retención de orden cero, que se puede implementar de forma muy sencilla. Consiste en quedarse sólo con el primer término del lado derecho de la Ecuación (7.5.21). Es decir, la salida es

$$\hat{x}_a(t) = x_a(nT) \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (7.5.22)$$

En otras palabras, el filtro de retención de orden cero proporciona una aproximación en escalera a la señal, como muestra la Figura 7.5.3.

Sea $g_{ho}(t)$ la respuesta al impulso del filtro de retención de orden cero, que se obtiene aplicando un impulso unidad $\delta(t)$ a dicho filtro. Como todos los valores de la señal son cero excepto en $n = 0$, tenemos que

$$g_{ho}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (7.5.23)$$

cuya función de transferencia es

$$G_{ho}(S) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (7.5.24)$$

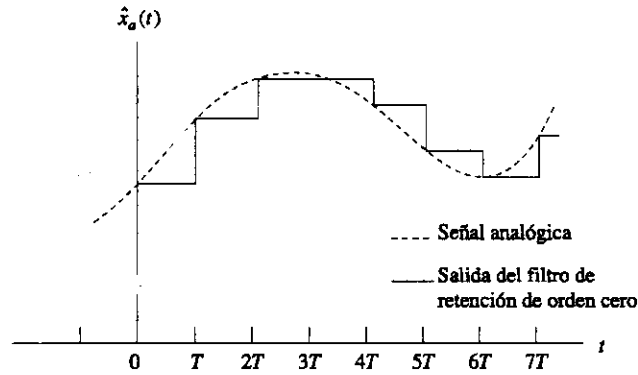


Figura 7.5.3. Reconstrucción de una señal muestreada utilizando un filtro de retención de orden cero.

Para comparar el filtro de retención de orden cero con el filtro de reconstrucción ideal, sustituiremos en la Ecuación (7.5.24) la variable s por $j\omega$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} G_{h0}(\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T} = \frac{2e^{-j(\omega T/2)}}{\omega} \left[\frac{e^{j(\omega T/2)} - e^{-j(\omega T/2)}}{2j} \right] \\ &= T \frac{\text{sen}(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} e^{-j(\pi\omega/\omega_s)} \end{aligned} \quad (7.5.25)$$

donde hemos utilizado la relación $T = 2\pi/\omega_s$.

La Figura 7.5.4 muestra el módulo y la fase del espectro del filtro de retención de orden cero en función de ω . La figura muestra también el módulo y la fase del espectro del filtro de reconstrucción ideal adaptado a ω_s . La presencia de los *lóbulos laterales* en $G_{h0}(\omega)$ produce distorsión en la señal reconstruida, incluso aunque no exista distorsión de solapamiento en el muestreo. Como la energía de los lóbulos laterales es mucho menor en el caso de filtros de reconstrucción de orden superior, la señal reconstruida utilizando estos filtros se aproxima mucho más a la señal analógica original.

Un esquema alternativo también sencillo de implementar consiste en obtener la señal reconstruida $\hat{x}_a(t)$ en el intervalo $[(n-1)T, nT]$ como la recta que une los valores $x_a[(n-1)T]$ y $x_a[nT]$. Este interpolador se denomina interpolador lineal y su relación entrada-salida es

$$\hat{x}_a(t) = x_a(nT) \left[1 + \frac{t - nT}{T} \right] - x_a[(n-1)T] \left[\frac{t - nT}{T} \right], \quad (n-1)T \leq t \leq nT \quad (7.5.26)$$

Se puede comprobar fácilmente que la respuesta al impulso del interpolador lineal es

$$g(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (7.5.27)$$

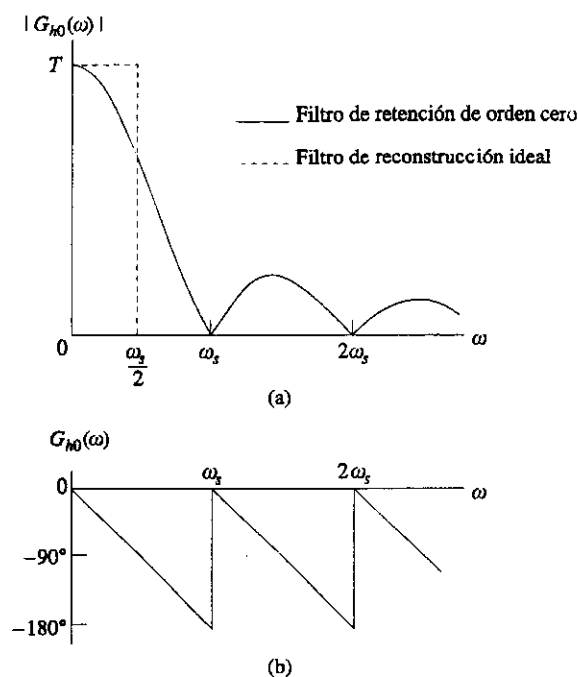


Figura 7.5.4. (a) Amplitud del espectro y (b) fase del espectro de un filtro de retención de orden cero.

con la correspondiente respuesta la frecuencia

$$G_H(\omega) = T \left[\frac{\text{sen}(\omega T/2)^2}{\omega T/2} \right] \quad (7.5.28)$$

Nótese que esta interpolación es no causal. No obstante, se aplica en áreas como el procesamiento de imágenes fijas, donde la interpolación se realiza en el dominio espacial.

7.5.2. Modificación de la velocidad de muestreo

Concluiremos nuestra presentación de las señales analógicas muestreadas considerando brevemente el cambio en la velocidad de muestreo de una señal muestreada. En muchas aplicaciones es necesario cambiar la velocidad de muestreo de una señal a medida que ésta atraviesa sucesivas etapas de proceso mediante filtros digitales. Por ejemplo, si procesamos una señal muestreada mediante un filtro paso bajo, el ancho de banda de la señal de salida será menor que el de la señal de entrada. Por tanto, no será necesario mantener la misma velocidad de muestreo a la salida del filtro. Otro ejemplo: en muchos sistemas de telecomunicaciones, intervienen muchos tipos de señales con diferentes anchos de banda. Estas señales deberán ser procesadas con velocidades de muestreo diferentes.

Un método para cambiar la velocidad de muestreo consiste en pasar la señal muestreada por un filtro de reconstrucción y volver a muestrear la señal resultante. Nosotros exploraremos otra alternativa que consiste en cambiar la velocidad de muestreo en el dominio digital. Las dos operaciones básicas necesarias para realizar la conversión se denominan *diezmado* (o *submuestreo*) e *interpolación* (o *sobremuestreo*).

Supongamos que tenemos una señal analógica limitada en banda a una frecuencia de ω_0 , que se ha muestreado con un período de T , obteniéndose la señal en tiempo discreto $x(n)$, siendo $x(n) = x_a(nT)$. El diezmado consiste en reducir la frecuencia de muestreo de forma que el nuevo período de muestreo es $T' = MT$. Por lo tanto, la nueva frecuencia de muestreo será $\omega_s' = \omega_s/M$. Nos centraremos sólo en el caso de valores enteros de M , con lo que el diezmado equivale a retener una de cada M muestras de la señal muestreada $x(n)$. La señal diezmada se expresa

$$x_d(n) = x(Mn) = x_a(nMT) \quad (7.5.29)$$

Como el período efectivo de muestreo es ahora $T' = MT$, para que no haya solapamiento debemos tener

$$T' \leq \frac{\pi}{\omega_0}$$

o, de forma equivalente

$$MT \leq \frac{\pi}{\omega_0} \quad (7.5.30)$$

Dado un T fijo, la Ecuación (7.5.30) establece un límite superior a los valores que puede tomar M .

Si la señal diezmada no tiene solapamiento podemos utilizar la Ecuación (7.5.18) para escribir

$$\begin{aligned} X_d(\Omega) &= \frac{1}{T'} X_a\left(\frac{\Omega}{T'}\right), \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi \\ &= \frac{1}{MT} X_a\left(\frac{1}{M} \frac{\Omega}{T}\right), \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi \end{aligned}$$

Como $X(\Omega)$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de la señal analógica muestreada con período T , es igual a

$$X(\Omega) = \frac{1}{T} X_a\left(\frac{\Omega}{T}\right), \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi$$

tenemos que

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{M} X\left(\frac{\Omega}{M}\right) \quad (7.5.31)$$

Es decir, $X_d(\Omega)$ es igual a $X(\Omega)$ multiplicada por $1/M$ y con la frecuencia afectada por el mismo factor de escala. Esto se ilustra en la Figura 7.5.5 para el caso de $T = 0,4\pi/\omega_0$ y $T' = 2T$.

Incrementar la frecuencia efectiva de muestreo de una señal analógica implica que, dada una señal $x(n)$ obtenida muestreando una señal analógica $x_a(t)$ con período T , deseamos determinar una señal $x_i(n)$ que corresponda a muestrear la señal $x_a(t)$ con un período $T' = T/L$, con $L > 1$. Es decir,

$$x_i(n) = x(n/L) = x_a(nT/L) \quad (7.5.32)$$

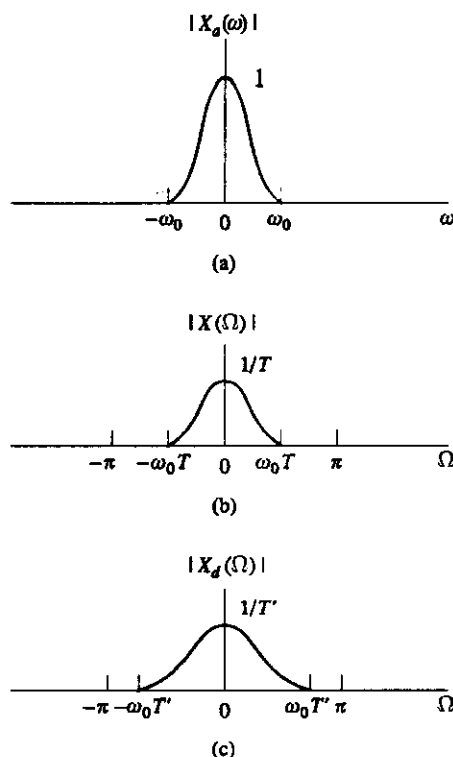


Figura 7.5.5. Ilustración del proceso de diezmado. (a) Espectro de la señal analógica. (b) Espectro de $x(n)$ con período de muestreo T . (c) Espectro de la señal diezmada correspondiente a un período de $T' = MT$. Las figuras corresponden a $T = 0,4\pi/\omega_0$ y $M = 2$.

Este proceso se conoce como interpolación ya que, para cada n se deben reconstruir las muestras perdidas $x(n + mL)$, $m = 1, 2, \dots, L - 1$. De nuevo consideraremos sólo valores enteros de L .

El espectro de la señal interpolada se puede calcular sustituyendo T por T/L en la Ecuación (7.5.18). Por lo tanto, en el intervalo $-\pi \leq \Omega \leq \pi$,

$$\begin{aligned}
 X_i(\Omega) &= \frac{L}{T} X_a\left(L \frac{\Omega}{T}\right) \\
 &= \begin{cases} LX(L\Omega), & |\Omega| \leq \frac{\omega_0 T}{L} \\ 0, & \frac{\omega_0 T}{L} < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad (7.5.33)
 \end{aligned}$$

Como primer paso para determinar $x_i(n)$ a partir de $x(n)$, sustituiremos las muestras perdidas por ceros formando la señal

$$x_i(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (7.5.34)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 X_f(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_f(n) e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n/L) e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\Omega kL} = X(L\Omega)
 \end{aligned} \tag{7.5.35}$$

de forma que $X_f(\Omega)$ es una versión escalada en frecuencia de $X(\Omega)$. La relación entre los espectros se muestra en la Figura 7.5.6 para el caso de $T = 0,4\pi/\omega_0$ y $L = 2$.

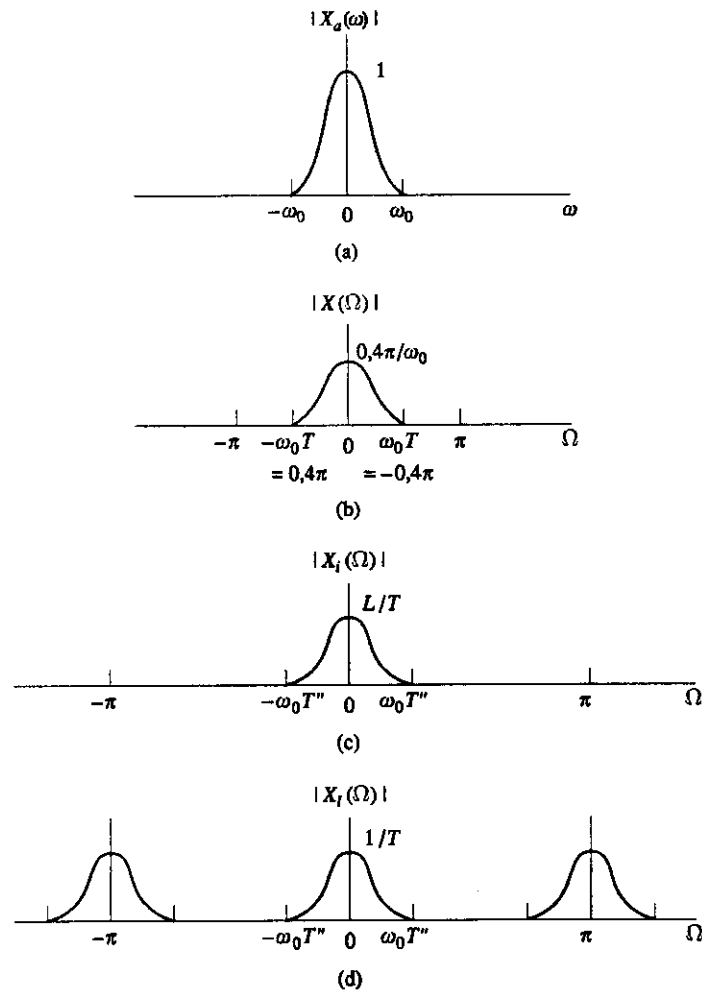


Figura 7.5.6. Ilustración del proceso de interpolación. (a) Espectro de la señal analógica. (b) Espectro de $x(n)$ con período de muestreo T . (c) Espectro de la señal interpolada correspondiente a un período de $T'' = T/L$. (d) Espectro de la señal $x_f(n)$. Las figuras corresponden a $T = 0,4\pi/\omega_0$ y $L = 2$.

Observando la figura puede verse claramente que si pasamos $x_f(n)$ por un filtro digital paso bajo de ganancia L y frecuencia de corte $\omega_0 T/L$, la salida será $x_i(n)$. La interpolación por un factor L consiste, por lo tanto, en intercalar $L - 1$ ceros entre las muestras y filtrar posteriormente después la señal resultante.

Ejemplo 7.5.2

Consideremos la señal del Ejemplo 7.5.1, limitada en banda a $\omega_0 = 10.000\pi$ rad/s, por lo que $T_{\max} = 100 \mu s$. Supongamos que $x_a(t)$ se muestrea con período de $T = 25 \mu s$ y se obtiene una señal $x(n)$ con espectro $X(\Omega)$ que se muestra en la Figura 7.5.7(b). Si deseamos diezmar $x(n)$ por un factor de M sin introducir solapamiento, resulta claro observando la Ecuación (7.5.30) que $M \leq (\pi/\omega_0 T) = 4$.

Supongamos que diezmos la señal $x(n)$ con un factor de $M = 3$, de forma que el período efectivo de muestreo es $T' = 75 \mu s$. De la Ecuación (7.5.31) y la Figura 7.5.5(c) se deduce que el espectro de la señal diezmada $X_d(\Omega)$ se calcula aplicando un factor de escala de $1/3$ a la amplitud y la frecuencia de $X(\Omega)$. El espectro resultante se muestra en la Figura 7.5.7(c).

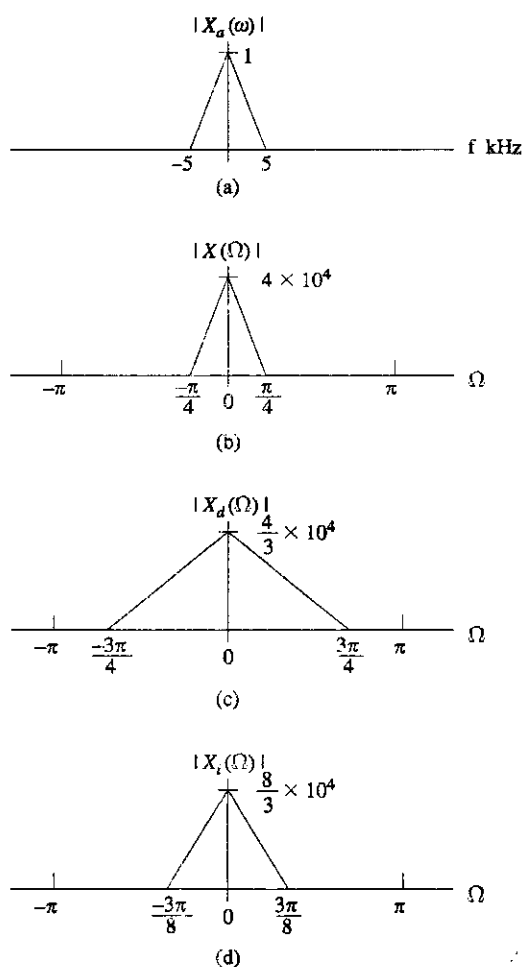


Figura 7.5.7. Espectros del Ejemplo 7.5.2. (a) Espectro analógico. (b) Espectro de la señal muestreada. (c) Espectro de la señal diezmada. (d) Espectro de la señal interpolada tras el diezmo.

Interpolaremos ahora la señal diezmada $x_d(n)$ con un factor de $L = 2$ para formar la señal interpolada $x_i(n)$. De la Ecuación (7.5.33) se desprende que

$$X_i(\Omega) = \begin{cases} 2X_d(2\Omega), & |\Omega| \leq \frac{\omega_0 T'}{L} = \frac{3\pi}{8} \\ 0, & \frac{3\pi}{8} < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

La Figura 7.5.7(d) muestra el espectro de la señal interpolada. De nuestra presentación anterior se deduce que la interpolación se realiza intercalando un cero cada dos muestras de la señal $x_d(n)$ y filtrando paso bajo el resultado con un filtro de ganancia 2 y frecuencia de corte $(3\pi/8)$ rad/s.

Nótese que la combinación de diezmado e interpolación nos da una frecuencia de muestreo efectiva de $T'' = MT/L = 37.5 \mu\text{s}$. En general, escogiendo adecuadamente M y L , podemos cambiar la frecuencia de muestreo por cualquier múltiplo racional.

7.5.3. Conversión A/D y D/A

La aplicación de técnicas de tratamiento digital de señal en áreas como comunicaciones, voz y tratamiento de imagen, por citar sólo unas pocas, se ha facilitado de forma significativa por el rápido desarrollo de nuevas tecnologías y algunas contribuciones teóricas importantes. En estas aplicaciones, las señales analógicas se deben transformar en una secuencia de muestras antes de ser procesadas. Tras el correspondiente proceso, las señales en tiempo discreto se deben volver a transformar en su forma analógica. El término «tratamiento digital de la señal» implica generalmente que, tras el muestreo, la amplitud de la señal se cuantifica con un número finito de niveles y se transforma a un formato binario adecuado para su tratamiento, por ejemplo, por un computador digital. El proceso de transformar una señal analógica en una representación binaria se conoce como conversión *analógico-digital* (A/D), y el proceso de transformar una representación binaria de nuevo en una señal analógica se denomina conversión *digital-analógico* (D/A). La Figura 7.5.8 muestra un diagrama de bloques funcionales para procesar una señal analógica utilizando técnicas de tratamiento digital de señal.

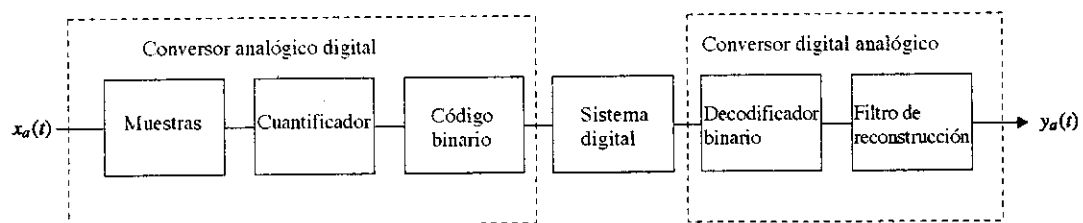


Figura 7.5.8. Diagrama funcional de bloques de los procesos A/D y D/A.

Como ya hemos visto, la operación de muestreo convierte una señal analógica en una señal en tiempo discreto, cuya amplitud puede tomar un continuo de valores. Es decir, la amplitud se representa mediante un número de *precisión infinita*. La operación de cuantificación transforma la amplitud en un número de *precisión finita*. Un codificador binario

transforma este número de precisión finita en una secuencia de unos y ceros. Aunque todas las operaciones que se muestran en la figura pueden producir errores en la representación de la señal analógica en formato digital, en la mayor parte de las aplicaciones los procesos de codificación y decodificación se realizan sin errores significativos. Por lo tanto, no entraremos en detalles sobre estos procesos. Ya hemos presentado la operación de muestreo, los errores asociados y los métodos para reducir esos errores. También hemos presentado algunos esquemas para la reconstrucción de señales muestreadas. En esta sección consideraremos brevemente la cuantificación de amplitud de una señal discreta.

Un cuantificador es esencialmente un dispositivo que asigna un valor entre un conjunto finito de valores a una señal que puede tomar un continuo de valores dentro de su rango. Sea $[x_b, x_h]$ el intervalo de valores D de la señal $x_a(t)$. Dividiremos dicho intervalo en subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ siendo $x_1 = x_b$ y $x_N = x_h$, y asignaremos un valor y_i , $i = 1, 2, \dots, N$ a la señal cuando se cumpla que $x_{i-1} \leq x_a(t) < x_i$. Por lo tanto, N representa el número de niveles del cuantificador. Los valores x_i se denominan niveles de decisión, y los valores y_i se denominan niveles de reconstrucción. Incluso aunque el margen dinámico de la señal de entrada no se conozca de forma exacta, y los valores de x_b y x_h sean tentativos, no será frecuente que aparezcan valores de $x_a(t)$ fuera de este intervalo. Los valores que cumplan que $x_a(t) < x_b$ se asignan a x_b , y los que cumplan que $x_a(t) > x_h$ se asignan a x_h .

Para obtener las mejores prestaciones, los niveles de decisión y de reconstrucción se deben escoger ajustándose a las características de las señales de entrada. Esto en general es un procedimiento complicado. Sin embargo, se han diseñado cuantificadores óptimos para ciertos tipos de señales. Los *cuantificadores óptimos* se usan muy a menudo en la práctica, porque son muy sencillos de implementar. En estos cuantificadores, las diferencias $x_i - x_{i-1}$ e $y_i - y_{i-1}$ se escogen del mismo valor (que se denomina Δ), conocido como el tamaño del paso. El tamaño del paso se relaciona con el margen dinámico D y el número de niveles N :

$$\Delta = \frac{D}{N} \quad (7.5.36)$$

Las Figuras 7.5.9(a) y (b) muestran dos variedades del cuantificador uniforme. Las diferencias entre las dos son que la salida en el caso (a) no tiene asignado un valor de cero. El cuantificador del caso (b) es útil en situaciones en las que el nivel de la señal es muy próximo a cero durante intervalos grandes de tiempo (por ejemplo, en el caso del nivel de la señal de error de un sistema de control).

Como en los cuantificadores que se muestran en las Figuras 7.5.9(a) y (b) tienen respectivamente ocho y siete niveles de salida, si utilizamos una longitud fija de la palabra de código, cada valor de salida se puede representar mediante una palabra de tres bits de longitud, con una palabra de código sobrante para el caso (b). En lo que sigue, limitaremos nuestra exposición al cuantificador del caso (a). Para este caso, con N niveles, cada nivel de salida se puede representar mediante una palabra de código de longitud

$$B = \log_2 N = \log_2 \frac{D}{\Delta} \quad (7.5.37)$$

En análisis apropiado de los errores que se introducen en el proceso de cuantificación requiere el uso de técnicas que están fuera del alcance de este libro. Sin embargo, podemos dar una explicación bastante adecuada de estos errores, si suponemos que la entrada del cuantificador es una señal que crece linealmente con el tiempo con una velocidad de S uni-

dades/s. Entonces la entrada tomará valores en cualquier intervalo específico del cuantificador (por ejemplo, el intervalo $[i\Delta, (i+1)\Delta]$) en un intervalo de tiempo $[T_1, T_2]$, con $T_2 - T_1 = \Delta/S$ como se muestra en la Figura 7.5.10. Se puede comprobar fácilmente que la entrada del cuantificador durante este intervalo de tiempo vale

$$x_a(t) = \frac{\Delta}{T_2 - T_1} (t - T_1) + i\Delta$$

y la salida

$$x_Q(t) = i\Delta + \frac{\Delta}{2}$$

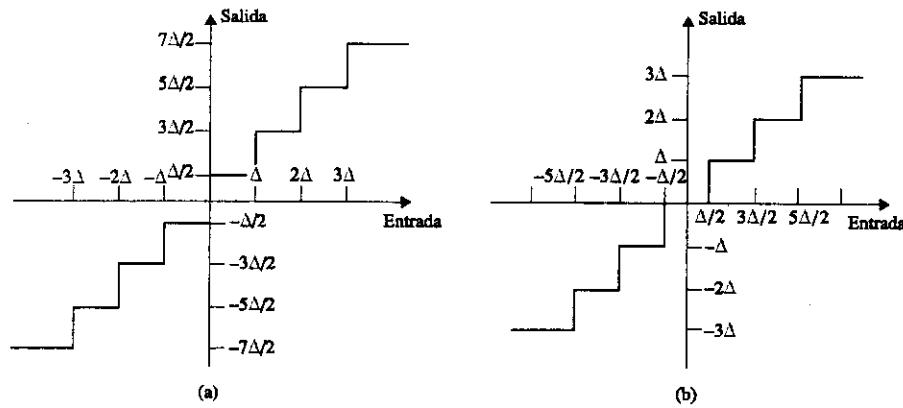


Figura 7.5.9. Relación entrada/salida de los cuantificadores uniformes. (a) Sin salida cero. (b) Con salida cero.

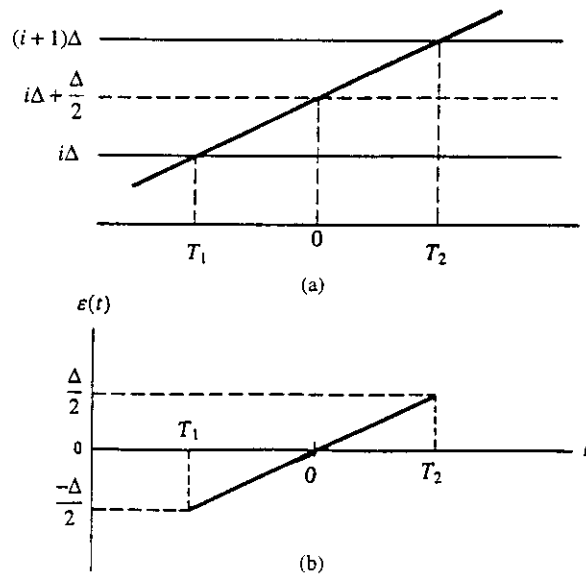


Figura 7.5.10. Error de cuantificación. (a) Entrada del cuantificador. (b) Error.

El error de cuantificación, $e(t)$, se define como la diferencia entre la entrada y la salida. Tenemos que

$$\begin{aligned} e(t) &= x_a(t) - x_Q(t) = \frac{\Delta}{T_2 - T_1} (t - T_1) - \frac{\Delta}{2} \\ &= \frac{\Delta}{T_2 - T_1} \left[t - \frac{T_2 + T_1}{2} \right] \end{aligned} \quad (7.5.38)$$

Es claro que $e(t)$ se incrementa linealmente desde $-\Delta/2$ hasta $\Delta/2$ durante el intervalo $[T_1, T_2]$. El valor cuadrático medio de la señal de error es, por tanto (véase Problema 7.27)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} e^2(t) dt = \frac{\Delta^2}{12} \\ &= \frac{D^2}{12} 2^{-2B} \end{aligned} \quad (7.5.39)$$

donde el último paso se deduce de la Ecuación (7.5.37). E se denomina generalmente potencia de ruido de cuantificación.

Se puede demostrar que si el número de niveles del cuantificador, N , es muy grande, la Ecuación (7.5.39) proporciona una aproximación muy buena al valor cuadrático medio del error de cuantificación para una amplia variedad de señales de entrada.

En conclusión, podemos decir que una medida cuantitativa de la calidad de un cuantificador es la relación señal-ruido (SNR) que se define como el cociente entre la potencia de la señal de entrada al cuantificador P_x y la potencia de ruido de cuantificación E . Aplicando la Ecuación (7.5.39) podemos escribir

$$\text{SNR} = \frac{P_x}{E} = 12 P_x D^{-2} 2^{2B} \quad (7.5.40)$$

En decibelios,

$$\begin{aligned} (\text{SNR})_{\text{dB}} &= 10 \log_{10} \text{SNR} \\ &= 10 \log_{10}(12) + 10 \log_{10} P_x - 20 \log_{10} D + 20B \log_{10}(2) \end{aligned} \quad (7.5.41)$$

Es decir,

$$(\text{SNR})_{\text{dB}} = 10,79 + 10 \log_{10} P_x + 6,02B - 20 \log_{10} D \quad (7.5.42)$$

Como indica la última ecuación, al incrementar la longitud de la palabra del código en un bit se produce aproximadamente una mejora de 6 dB en la SNR del cuantificador. La ecuación demuestra también que el margen dinámico del cuantificador debe adaptarse a la señal de entrada. La elección de un valor muy grande de D reduce la SNR.

Ejemplo 7.5.3 Sea un cuantificador cuya señal de entrada es

$$x_a(t) = A \sin \omega_0 t$$

El margen dinámico de esta señal es $2A$, y la potencia de señal es $P_x = A^2/2$. Utilizando la Ecuación (7.5.41) se obtiene la SNR para esta entrada:

$$(\text{SNR})_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(1,5) + 6,02B = 1,76 + 6,02B$$

Nótese que en este caso D es exactamente igual al margen dinámico de la señal de entrada. La SNR es independiente de la amplitud A de la señal.

7.6. RESUMEN

- Una señal periódica en tiempo discreto $x(n)$ de período N se puede representar mediante el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp \left[j \frac{2\pi}{N} kn \right]$$

- Los coeficientes a_k del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto son

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} kn \right]$$

- Los coeficientes a_k son periódicos de período N , con lo que $a_k = a_{k+N}$.
- El desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto es una suma finita sólo de N términos. Proporciona una representación alternativa *exacta* de la señal temporal, por lo que no se plantean problemas de convergencia ni aparece el fenómeno de Gibbs.
- Si a_k son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de la señal $x(n)$, los coeficientes de $x(n-m)$ valen $a_k \exp[-j(2\pi/N)km]$.
- Si una secuencia periódica $x(n)$ cuyos coeficientes del desarrollo en serie de Fourier son a_k se aplica a la entrada de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(n)$, la expresión de los coeficientes b_k del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de la señal de salida $y(n)$ es

$$b_k = a_k H \left(\frac{2\pi}{N} k \right)$$

donde

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \exp[-j\Omega n]$$

- La transformada de Fourier en tiempo discreto de una secuencia no periódica $x(n)$ es

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp[-j\Omega n]$$

- La expresión de la transformada inversa es

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) \exp[j\Omega n] d\Omega$$

- Las unidades de la variable Ω de la transformada de Fourier en tiempo discreto son radianes.
- La transformada de Fourier en tiempo discreto es periódica en Ω de período 2π , de forma que $X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$.
- Otras propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto son similares a las de la transformada de Fourier en tiempo continuo. En particular, si $y(n)$ es la convolución de $x(n)$ y $h(n)$, entonces,

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

- Cuando una señal analógica $x_a(t)$ se muestrea, la señal resultante se puede considerar como una señal en tiempo continuo $x_s(t)$ con transformada de Fourier $X_s(\omega)$ o como una secuencia en tiempo discreto $x(n)$ con transformada de Fourier en tiempo discreto $X(\Omega)$. La relación entre las dos transformadas es

$$X_s(\omega) = X(\Omega)|_{\Omega=\omega T}$$

- La ecuación anterior se puede utilizar para obtener el modelo de muestreo por modulación de impulsos

$$x_s(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- La transformada $X_s(\omega)$ está relacionada con $X_a(\omega)$:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(\omega + r\omega_s)$$

- La última ecuación se puede utilizar para obtener el *teorema de muestreo*, que proporciona la mínima frecuencia con la que se debe muestrear una señal analógica para que se pueda reconstruir sin errores. Si el ancho de banda de la señal es ω_c , entonces $T < 2\pi/\omega_c$.
- El filtro de reconstrucción ideal es un filtro paso bajo. Los circuitos de retención son filtros de reconstrucción prácticos que permiten aproximar la señal analógica.
- El filtro de retención de orden cero proporciona una aproximación en escalera a la señal analógica.
- El cambio en la frecuencia de muestreo se puede realizar mediante el diezmado y la interpolación. El diezmado por un factor de M implica quedarse con una de cada M muestras. La interpolación por un factor de L requiere la reconstrucción de $L - 1$ muestras perdidas entre cada dos muestras de la señal muestreada original.
- Utilizando una combinación adecuada de valores de M y L , la velocidad de muestreo se puede cambiar por cualquier factor racional.
- La conversión analógico-digital (A/D) es el proceso de representar una señal analógica mediante una cadena de números binarios. Conceptualmente, el proceso se divide en muestreo, cuantificación de amplitud y conversión a un código binario.
- El proceso de conversión digital-analógico (D/A) consiste en la decodificación de la secuencia digital y su paso por un filtro de reconstrucción.
- Un cuantificador produce una salida de un conjunto finito de valores que corresponde a la amplitud de la señal de entrada.
- Los cuantificadores uniformes se utilizan ampliamente en la práctica. En estos cuantificadores, los valores de la salida difieren en un valor constante. La SNR de un cuantificador uniforme se incrementa, aproximadamente, en 6 dB por bit adicional.

7.7. LISTA DE TÉRMINOS IMPORTANTES

Coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto	Periodicidad de la transformada de Fourier en tiempo discreto
Convergencia del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto	Periodicidad de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto
Desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto	Solapamiento
Diezmado	Teorema de muestreo
Filtro de retención de orden cero	Transformada de Fourier en tiempo discreto
Interpolación	Transformada inversa de Fourier en tiempo discreto
Modelo de modulación por impulsos	
Muestreo de señales analógicas	

7.8. PROBLEMAS

- 7.1. Determinar el desarrollo en serie de Fourier de cada una de las siguientes señales en tiempo discreto. Dibujar el módulo y la fase de los coeficientes de Fourier a_k .

(a) $x(n) = \cos \frac{3\pi n}{4}$

(b) $x(n) = 4 \cos \frac{2\pi n}{3} \sin \frac{\pi n}{2}$

(c) $x(n)$ es la extensión periódica de la secuencia $[1, -1, 0, 1, -1]$.

(d) $x(n)$ es periódica de período 8 y

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

(e) $x(n)$ es periódica de período 6 y

$$x(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 5 \end{cases}$$

(f) $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(n-k) + \cos \frac{2\pi n}{3}$

- 7.2. Sea una secuencia periódica $x(n)$ cuyos coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier se indican a continuación. Determinar la secuencia:

(a) $a_k = 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi k}{2} + 2 \cos \frac{\pi k}{4}, \quad 0 \leq k \leq 8$

(b) $a_k = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq 3 \\ 0, & 4 \leq k \leq 7 \end{cases}$

(c) $a_k = \exp[-j\pi k/4], \quad 0 \leq k \leq 7$

(d) $a_k = \{1, 0, -1, 0, 1\}$

- 7.3. Sea a_k el conjunto de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica $x(n)$ de período N . Calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de las siguientes señales en función de a_k :

(a) $x(n - n_0)$

(b) $x(-n)$

(c) $(-1)^n x(n)$

(d) $y(n) = \begin{cases} x(n), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

(Ayuda: $y(n)$ se puede expresar como $\frac{1}{2} [x(n) + (-1)^n x(n)]$).

(e) $y(n) = \begin{cases} x(n), & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$

(f) $y(n) = x_e(n)$

(g) $y(n) = x_o(n)$

- 7.4. Demostrar que dada una señal periódica real $x(n)$, $a_k = a_{N-k}^*$.

- 7.5. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de la salida $y(n)$ cuando cada una de las señales periódicas del Problema 7.1 se introduce a la entrada de un sistema cuya respuesta al impulso es $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$.

- 7.6. Repetir el Problema 7.5 si $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$.

- 7.7. Sean $x(n)$, $h(n)$ e $y(n)$ secuencias periódicas con el mismo período N , y sean a_k , b_k y c_k los respectivos coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier.

- (a) Sea $y(n) = x(n)h(n)$. Demostrar que

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{\langle N \rangle} a_m b_{k-m} = \sum_{\langle N \rangle} a_{k-m} b_m \\ &= a_k \otimes b_k \end{aligned}$$

- (b) Sea $y(n) = x(n) \otimes h(n)$. Demostrar que

$$c_k = N a_k b_k$$

- 7.8. Consideremos las extensiones periódicas de las siguientes parejas de señales:

(a) $x(n) = \{1, 0, 1, 0, 0, 1\}$

$h(n) = \{1, -1, 1, 0, -1, 1\}$

(b) $x(n) = \cos \frac{\pi n}{3}$

$h(n) = \{1, -1, 1, 1, -1, 1\}$

$$(c) \quad x(n) = 2 \cos \frac{\pi n}{2}$$

$$h(n) = \left\{ 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8} \right\}$$

$$(d) \quad x(n) = 1, \quad 0 \leq n \leq 7$$

$$h(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 3 \\ -n+8, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

Sea $y(n) = x(n)h(n)$. Utilizar los resultados del Problema 7.7 para calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $y(n)$.

7.9. Repetir el Problema 7.8 si $y(n) = x(n) \otimes h(n)$.

7.10. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[j\Omega(n-k)] d\Omega = \delta(n-k)$$

7.11. Derivando sucesivamente la Ecuación (7.3.2) con respecto a Ω , demostrar que

$$\mathcal{F}\{n^p x(n)\} = j^p \frac{d^p X(\Omega)}{d\Omega}$$

7.12. Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto determinar $X(\Omega)$ para las siguientes señales:

$$(a) \quad x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq n_0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$(b) \quad x(n) = n \left(\frac{1}{3} \right)^{|n|}$$

$$(c) \quad x(n) = a^n \cos \Omega_0 n u(n), \quad |a| < 1$$

$$(d) \quad x(n) = \exp[j3n]$$

$$(e) \quad x(n) = \exp \left[j \frac{\pi}{8} n \right]$$

$$(f) \quad x(n) = \frac{1}{2} \sin 3n + 4 \cos \frac{\pi}{8} n$$

$$(g) \quad x(n) = \alpha^n [u(n) - u(n - n_0)]$$

$$(h) \quad x(n) = \frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}$$

$$(i) \quad x(n) = \frac{\sin(\pi n/3) \sin(\pi n/2)}{\pi^2 n^2}$$

$$(j) \quad x(n) = \frac{\sin(\pi n/3) \sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

$$(k) \quad x(n) = (n+1)a^n u(n), \quad |a| < 1$$

- 7.13. Calcular las secuencias en tiempo discreto $x(n)$ cuyas transformadas en el intervalo $0 \leq \Omega < 2\pi$ son:

$$(a) \quad X(\Omega) = -j\pi\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\Omega - \frac{4\pi}{3}\right) + j\pi\delta\left(\Omega - \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$(b) \quad X(\Omega) = 4 \sin 5\Omega + 2 \cos \Omega$$

$$(c) \quad X(\Omega) = \frac{4}{[\exp(-j\Omega) - 2]^2}$$

$$(d) \quad X(\Omega) = \frac{1 - \frac{5}{6} \exp[-j\Omega]}{1 + \frac{1}{12} \exp[-j\Omega] - \frac{1}{12} \exp[-j2\Omega]}$$

- 7.14. Demostrar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

- 7.15. Las siguientes señales actúan como entradas de un sistema cuya respuesta al impulso es $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$. Utilizar transformadas de Fourier para calcular en cada caso la correspondiente salida.

$$(a) \quad x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\cos \frac{\pi n}{2}\right) u(n)$$

$$(b) \quad x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) u(n)$$

$$(c) \quad x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$$

$$(d) \quad x(n) = n \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} u(n)$$

- 7.16. Repetir el Problema 7.15 si $h(n) = \delta(n-1) + \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$.

- 7.17. Dado el sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(n) = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

calcular la salida si la entrada es la siguiente:

- (a) Una onda cuadrada periódica de período 6:

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 5 \end{cases}$$

$$(b) \quad x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(n-2k) - \delta(n-1-2k)]$$

7.18. Repetir el Problema 7.17 si

$$h(n) = 2 \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$

7.19. (a) Utilizar la propiedad de desplazamiento temporal para calcular $H(\Omega)$ en los sistemas del Problema 6.18.

(b) Calcular $h(n)$ para esos sistemas mediante la transformada inversa de $H(\Omega)$.

7.20. La respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo discreto es

$$H(\Omega) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{12} \exp[-j\Omega]}{1 + \frac{5}{6} \exp[-j\Omega] + \frac{1}{6} \exp[-j2\Omega]}$$

(a) Calcular la respuesta al impulso del sistema.

(b) Calcular la ecuación en diferencias que representa al sistema.

(c) Calcular la respuesta del sistema a la señal de entrada $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$.

7.21. La respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo discreto es

$$H(\Omega) = \frac{\alpha + \exp[-j\Omega]}{1 + \beta \exp[-j\Omega]}, \quad |\beta| < 1$$

Supóngase β fijo. Calcular α para que $H(\Omega)$ sea una función paso-todo. Es decir, que $|H(\Omega)|$ sea constante para todo Ω (no suponer que β es real).

7.22. (a) Consideremos un sistema causal con respuesta en frecuencia

$$H(\Omega) = \frac{1 + a \exp[-j\Omega] + b \exp[-j2\Omega]}{b + a \exp[-j\Omega] + \exp[-j2\Omega]}$$

demostrar que si a y b son reales, se trata de una función paso-todo.

(b) Sea $H(\Omega) = N(\Omega)/D(\Omega)$, siendo $N(\Omega)$ y $D(\Omega)$ polinomios en $\exp[-j\Omega]$. ¿Puede generalizarse el resultado del apartado (a) para calcular la relación que debe existir entre $N(\Omega)$ y $D(\Omega)$ para que $H(\Omega)$ sea una función paso-todo?

7.23. La señal analógica $x_a(t) = 5 \cos(200\pi t - 30^\circ)$ se muestrea con frecuencia f_s Hz.

(a) Dibujar el espectro de la señal muestreada si f_s vale (i) 150 Hz y (ii) 250 Hz.

(b) Explicar si se puede recuperar $x_a(t)$ a partir de sus muestras y si es así, cómo.

7.24. Obtener la Ecuación (7.5.27) de la respuesta al impulso del interpolador lineal de la Ecuación (7.5.26) y demostrar que la correspondiente respuesta en frecuencia es la que indica la Ecuación (7.5.28).

7.25. Una señal paso bajo de ancho de banda 1,5 KHz se muestrea a 10.000 muestras/s.

- (a) Se desea diezmar la señal muestreada por un factor M . ¿Cuál debe ser el valor máximo de M para que no se introduzca distorsión de solapamiento en la señal diezmada?
- (b) Explicar cómo se puede cambiar la velocidad de muestreo de 10.000 muestras/s a 4.000 muestras/s.

7.26. Una señal analógica cuyo espectro es

$$X_a(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{1.000}, & |\omega| \leq 1.000 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

se muestrea con frecuencia $\omega_s = 10.000$ rad/s.

- (a) Dibujar el espectro de la señal muestreada.
 - (b) Si se desea diezmar la señal muestreada por un factor M ¿Cuál debe ser el valor máximo de M para que no se introduzca solapamiento?
 - (c) Dibujar el espectro de la señal diezmada para $M = 4$.
 - (d) La señal diezmada del apartado (c) se va a procesar mediante un interpolador para obtener una frecuencia de muestreo de 7.500 rad/s. Dibujar el espectro de la señal interpolada.
- 7.27. Comprobar que para el cuantificador uniforme el valor cuadrático medio del error E es igual a $\Delta^2/12$, siendo Δ el tamaño del escalón.
- 7.28. Se desea diseñar un cuantificador uniforme para una señal cuya amplitud está en el intervalo de ± 20 .
- (a) Calcular el número de niveles de cuantificación necesarios para que la SNR del cuantificador sea como mínimo de 5 dB. Suponga que la potencia de señal es 10.
 - (b) Si el margen dinámico de la señal es $[-10, 10]$, ¿cuál es la SNR resultante?
- 7.29. Repetir el Problema 7.28 si la SNR del cuantificador debe ser como mínimo de 10 dB.

La transformada Z

8.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a estudiar la transformada Z, que es el equivalente en tiempo discreto de la transformada de Laplace que estudiamos en el Capítulo 5. Así como la transformada de Laplace es una técnica de análisis en el dominio de la frecuencia adecuada para señales que no tienen transformada de Fourier, la transformada Z hace posible analizar ciertas señales discretas que no tienen transformada de Fourier en tiempo discreto. Como podría esperarse, las propiedades de la transformada Z se parecen mucho a las de la transformada de Laplace, y los resultados son muy semejantes a los que aparecían en el Capítulo 5. Sin embargo, como en el caso de las transformadas de Fourier de señales en tiempo continuo y en tiempo discreto, existen ciertas diferencias.

La relación entre la transformada de Laplace y la transformada Z se puede establecer considerando la secuencia que se obtiene al muestrear una señal analógica $x_a(t)$. En la presentación de las señales muestreadas que hicimos en el Capítulo 7 vimos que la salida del sistema de muestreo se podía considerar como una señal en tiempo continuo

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT) \quad (8.1.1)$$

o como una señal en tiempo discreto

$$x(n) = x_a(nT) \quad (8.1.2)$$

Así, la transformada de Laplace de la señal $x_s(t)$ es

$$\begin{aligned} X_s(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \exp[-st] dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \exp[-nTs] \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

en donde el último paso se deduce de la propiedad de desplazamiento de la función δ . Si realizamos el cambio $z = \exp [Ts]$ tenemos

$$X_s(s)|_{z=\exp[Ts]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)z^{-n} \quad (8.1.4)$$

La suma del lado derecho de la Ecuación (8.1.4) se escribe generalmente como $X(z)$ y permite definir la transformada Z de la señal $x(n)$.

De hecho, ya hemos encontrado la transformada Z en la Sección 7.1, al presentar la respuesta de sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo a entradas exponenciales. Vimos que si la entrada al sistema era $x(n) = z^n$ la salida era

$$y(n) = H(z)z^n \quad (8.1.5)$$

donde $H(z)$ se definía en función de la respuesta al impulso del sistema $h(n)$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (8.1.6)$$

La Ecuación (8.1.6) define la transformada Z de la secuencia $h(n)$. Formalizaremos su definición en la sección siguiente y, posteriormente, profundizaremos en sus propiedades y aplicaciones.

8.2. LA TRANSFORMADA Z

La transformada Z de una secuencia en tiempo discreto $x(n)$ se define así:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (8.2.1)$$

donde z es una variable compleja. Algunas veces denotaremos la transformada Z como $Z[x(n)]$. Si la secuencia es causal la transformada Z se convierte en

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (8.2.2)$$

Para distinguir entre las dos definiciones, como en el caso de la transformada de Laplace, la transformada definida en la Ecuación (8.2.1) se denomina transformada bilateral, y la definida en la Ecuación (8.2.2), transformada unilateral.

Ejemplo 8.2.1 Consideremos la secuencia impulso unidad

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (8.2.3)$$

Aplicando la Ecuación (8.2.1) obtenemos

$$X(z) = 1 \cdot z^0 = 1 \quad (8.2.4)$$

Ejemplo 8.2.2 Sea $x(n)$ una secuencia obtenida muestreando cada T segundos la siguiente función en tiempo continuo

$$x(t) = \exp[-at]u(t) \quad (8.2.5)$$

Entonces

$$x(n) = \exp[-anT]u(n) \quad (8.2.6)$$

con lo que aplicando la Ecuación (8.2.2) obtenemos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-anT]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [\exp[-aT]z^{-1}]^n$$

Utilizando la Ecuación (6.3.7) la expresión anterior se puede escribir en forma cerrada

$$X(z) = \frac{1}{1 - \exp[-aT]z^{-1}} = \frac{z}{z - \exp[-aT]} \quad (8.2.7)$$

Ejemplo 8.2.3 Consideremos las dos secuencias

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (8.2.8)$$

y

$$y(n) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n < 0 \\ 0, & n \geq 0 \end{cases} \quad (8.2.9)$$

Utilizando la definición de transformada Z podemos escribir

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n \quad (8.2.10)$$

Utilizando de nuevo la Ecuación (6.3.7) podemos poner la expresión anterior en forma cerrada

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad (8.2.11)$$

Análogamente tenemos que

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n = - \sum_{m=1}^{\infty} (2z)^m \quad (8.2.12)$$

que se puede expresar en forma cerrada

$$Y(z) = - \frac{2z}{1 - 2z} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad (8.2.13)$$

Como podemos ver, las expresiones de las dos transformadas $X(z)$ e $Y(z)$ son idénticas. Dos secuencias totalmente diferentes poseen la misma transformada Z . La diferencia, por supuesto, como en el caso de la transformada de Laplace, está en las dos diferentes regiones de convergencia de $X(z)$ e $Y(z)$. La región de convergencia se define como aquellos valores de z para los que existe la serie de potencias definida en las Ecuaciones (8.2.1) o (8.2.2), es decir, para los que la suma tiene un valor finito. Como la Ecuación (6.3.7) es una serie geométrica, la suma sólo se puede expresar en forma cerrada si el módulo del sumando es menor que la unidad. Por lo tanto, la expresión de $X(z)$ dada por la Ecuación (8.2.11) solo es válida [es decir, existe $X(z)$] si

$$|\tfrac{1}{2} z^{-1}| < 1 \quad \text{o} \quad |z| > \tfrac{1}{2} \quad (8.2.14)$$

Análogamente, observando la Ecuación (8.2.13) vemos que $Y(z)$ existe si

$$|2z| < 1 \quad \text{o} \quad |z| < \tfrac{1}{2} \quad (8.2.15)$$

Las Ecuaciones (8.2.14) y (8.2.15) definen las regiones de convergencia de $X(z)$ e $Y(z)$, respectivamente. La Figura 8.2.1 muestra estas regiones en el plano complejo z .

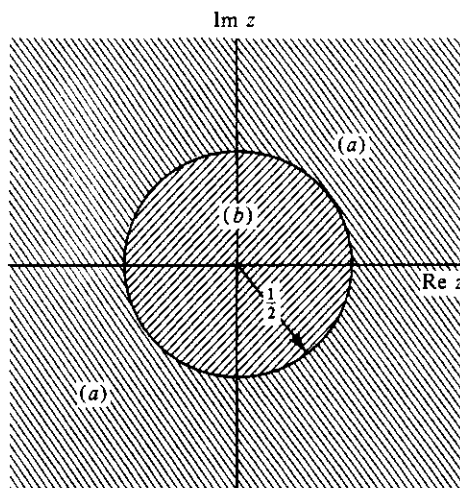


Figura 8.2.1. Regiones de convergencia de las transformadas z del Ejemplo 8.2.3.
(a) Región de convergencia de $X(z)$. (b) Región de convergencia de $Y(z)$.

Del Ejemplo 8.2.3 se deduce que para relacionar de forma única una transformada Z con una función en el dominio del tiempo debemos especificar la región de convergencia de la transformada Z .

8.3. CONVERGENCIA DE LA TRANSFORMADA Z

Consideremos una secuencia $x(n)$ cuya transformada Z es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (8.3.1)$$

Deseamos determinar los valores de z para los que existe $X(z)$. Para ello, representaremos la variable compleja z en forma polar, como $z = r \exp[j\theta]$, y escribiremos

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(r \exp[j\theta])^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n} \exp[-jn\theta] \end{aligned} \quad (8.3.2)$$

Sean $x_+(n)$ y $x_-(n)$ las partes causal y no causal de $x(n)$, respectivamente. Es decir,

$$\begin{aligned} x_+(n) &= x(n)u(n) \\ x_-(n) &= x(n)u(-n-1) \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

Si sustituimos la Ecuación (8.3.3) en la Ecuación (8.3.2) obtenemos

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} x_-(n)r^{-n} \exp[-jn\theta] + \sum_{n=0}^{\infty} x_+(n)r^{-n} \exp[-jn\theta] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} x_-(-m)r^m \exp[jm\theta] + \sum_{n=0}^{\infty} x_+(n)r^{-n} \exp[-jn\theta] \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} |x_-(-m)|r^m + \sum_{n=0}^{\infty} |x_+(n)|r^{-n} \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

Para que exista $X(z)$ cada uno de los dos términos del lado derecho de la Ecuación (8.3.4) debe ser finito. Supongamos que existen constantes M , N , R_- y R_+ que cumplen

$$|x_-(n)| < MR_-^n \quad \text{para } n < 0, \quad |x_+(n)| < NR_+^n \quad \text{para } n \geq 0 \quad (8.3.5)$$

Podemos sustituir esos límites en la Ecuación (8.3.4) con lo que obtenemos

$$X(z) \leq M \sum_{m=1}^{\infty} R_-^m r^m + N \sum_{n=0}^{\infty} R_+^n r^{-n} \quad (8.3.6)$$

Es claro que la primera suma de la Ecuación (8.3.6) es finita si $r/R_- < 1$, y que la segunda suma será finita si $R_+/r < 1$. Podemos combinar las dos relaciones para determinar la región de convergencia de $X(z)$:

$$R_+ < r < R_-$$

La Figura 8.3.1 muestra la región de convergencia en el plano z , que es la región anular comprendida entre los círculos de radios R_- y R_+ . La parte de la transformada correspondiente a la secuencia causal $x_+(n)$ converge en la región donde $r > R_+$ o, equivalentemente, $|z| > R_+$. Es decir, la región de convergencia es la parte exterior del círculo de radio R_+ . Análogamente, la transformada de la secuencia anticausal $x_-(n)$ converge para $r < R_-$ o, equivalentemente, $|z| < R_-$, por lo que la región de convergencia es el interior del círculo de radio R_- . $X(z)$ no existe si $R_- < R_+$.

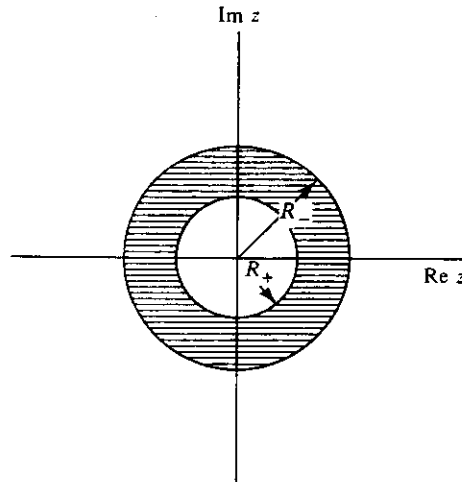


Figura 8.3.1. Región de convergencia de una secuencia general no causal.

Recordando nuestra presentación de la transformada de Fourier de señales en tiempo discreto, sabemos que la variable de frecuencia Ω toma valores en el intervalo $[0, 2\pi]$. Dado un valor fijo de r , una comparación de la Ecuación (8.3.2) con la Ecuación (7.3.12) permite concluir que $X(z)$ se puede interpretar como la transformada de Fourier en tiempo discreto de la señal $x(n)r^{-n}$. Esto equivale a evaluar $X(z)$ sobre un círculo de radio r del plano complejo z . Si hacemos $r = 1$, es decir, z toma valores en el círculo de radio unidad, $X(z)$ se convierte en la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x(n)$, suponiendo que dicha transformada existe. Es decir, que para las secuencias que tienen transformada de Fourier y transformada Z tenemos

$$X(\Omega) = X(z)|_{z = \exp[-j\Omega]} \quad (8.3.7)$$

El círculo de radio unidad se denomina círculo unidad.

En general, si $x(n)$ es la suma de varias secuencias, $X(z)$ sólo existe si hay un conjunto de valores de z para los que la transformada de cada una de las secuencias que forman la suma converge. La región de convergencia es, por tanto, la intersección de las regiones de convergencia de cada una de las secuencias. Si no existe una región de convergencia común, $X(z)$ no existe.

Ejemplo 8.3.1 Consideremos la función

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Claramente, $R_+ = 1/3$ y $R_- = \infty$, con lo que la región de convergencia es

$$|z| > \frac{1}{3}$$

La transformada Z de $x(n)$ es

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

que tiene un polo en $z = 1/3$. La región de convergencia es, por tanto, el exterior del círculo que encierra el polo de $X(z)$. Consideremos ahora la función

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

que es la suma de las dos funciones

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad y \quad x_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Del ejemplo anterior, podemos ver que la región de convergencia de $X_1(z)$ es

$$|z| > \frac{1}{2}$$

mientras que para $X_2(z)$ es

$$|z| > \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la región de convergencia de $X(z)$ es la intersección de las dos regiones:

$$|z| > \text{Máx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Se puede comprobar fácilmente que

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z}{z - \frac{1}{3}} = \frac{2z^2 - \frac{5}{6}z}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}$$

Por lo tanto, la región de convergencia es el exterior del círculo que incluye ambos polos de $X(z)$.

El ejemplo anterior muestra que dada una secuencia causal, la región de convergencia es el exterior de un círculo tal que todos los polos de la transformada $X(z)$ están en su interior. Análogamente, podemos concluir que dada una función anticausal la región de convergencia es el interior de un círculo tal que todos los polos están en el exterior.

Si la región de convergencia es una región anular, los polos de $X(z)$ en el exterior de este anillo corresponden a la parte anticausal de la función, y los polos del interior del anillo corresponden a la parte causal.

Ejemplo 8.3.2 La función

$$x(n) = \begin{cases} 3^n, & n < 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n = 0, 2, 4, \text{ etc.} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n = 1, 3, 5, \text{ etc.} \end{cases}$$

tiene como transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n z^{-n} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

Hagamos los cambios $n = -m$ en la primera suma, $n = 2m$ en la segunda suma y $n = 2m + 1$ en la tercera suma. Entonces

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z\right)^m + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9} z^{-2}\right)^m + \frac{z^{-1}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} z^{-2}\right)^m \\ &= \frac{\frac{1}{3} z}{1 - \frac{1}{3} z} + \frac{1}{1 - \frac{1}{9} z^{-2}} + \frac{\frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}} \\ &= -\frac{z}{z-3} + \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{9}} + \frac{2z}{z^2 - \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Como puede verse, $X(z)$ tiene polos en $z = 3, 1/3, -1/3, 1/2$ y $-1/2$. El polo en 3 corresponde a la parte anticausal, y los otros a la parte causal. La Figura 8.3.2 muestra las posiciones de estos polos en el plano z , así como la región de convergencia que, de acuerdo con nuestra discusión anterior, es $1/2 < |z| < 3$.

Ejemplo 8.3.3 Sea $x(n)$ una secuencia finita que vale cero para $n < n_0$ y $n > n_f$. Entonces

$$X(z) = x(n_0)z^{-n_0} + x(n_0 + 1)z^{-(n_0+1)} + \dots + x(n_f)z^{-n_f}$$

Como $X(z)$ es un polinomio en z (o en z^{-1}), converge para todos los valores de z , excepto en $z = 0$ para $n_f > 0$. Los polos de $X(z)$ están en el infinito si $n_0 < 0$ y en el origen si $n_f > 0$.

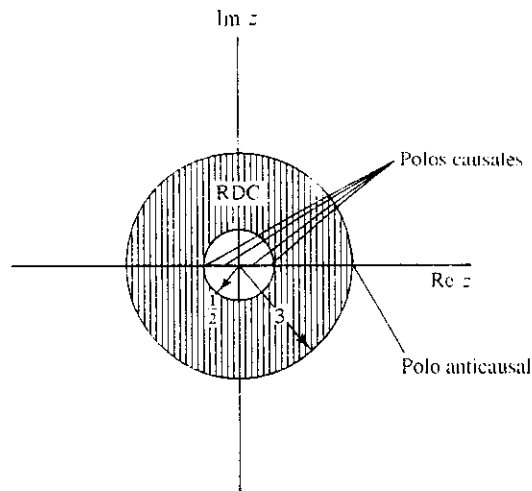


Figura 8.3.2. Posiciones de los polos y región de convergencia del Ejemplo 8.3.2.

Del ejemplo anterior se puede ver que si formamos una secuencia $y(n)$ sumando una secuencia de longitud finita a una secuencia $x(n)$, la región de convergencia de $Y(z)$ es la misma que la de $X(z)$, excepto posiblemente en $z = 0$.

Ejemplo 8.3.4 Consideremos la secuencia *limitada por la izquierda*

$$y(n) = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{(n+5)} u(n+5)$$

Si escribimos la secuencia $y(n)$ como la suma de la secuencia finita $3(1/2)^n[u(n+5) - u(n)]$ y la secuencia $x(n) = 3/32(1/2)^n u(n)$, podemos ver claramente que la región de convergencia de $Y(z)$ es la misma que la de $X(z)$, concretamente, $|z| > 1/2$.

Análogamente, la secuencia

$$y(n) = - \left(\frac{1}{2} \right)^n u(-n+5)$$

se puede considerar como la suma de la secuencia $x(n) = -32(1/2)^n u(-n-1)$ con la secuencia finita $-32(1/2)^n[u(n) - u(n-6)]$. Por lo tanto, se deduce que $Y(z)$ converge para $0 < |z| < 1/2$.

En el resto del capítulo consideraremos únicamente señales y sistemas causales, por lo que utilizaremos solamente la transformada Z unilateral. No obstante, muchas de las propiedades se pueden trasladar a la transformada Z bilateral.

8.4. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Recordemos la definición de transformada Z de una secuencia causal $x(n)$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (8.4.1)$$

La Ecuación (8.4.1) se puede utilizar directamente para obtener la transformada Z de señales en tiempo discreto de uso común, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 8.4.1 (a) Ya vimos que su transformada Z de la función δ es

$$Z[\delta(n)] = 1 \cdot z^0 = 1 \quad (8.4.2)$$

(b) Sea

$$x(n) = \alpha^n u(n)$$

Entonces

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}, \quad |z| > |\alpha| \quad (8.4.3)$$

Haciendo $\alpha = 1$, obtenemos la transformada Z de la función escalón unidad:

$$Z[u(n)] = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1 \quad (8.4.4)$$

(c) Sea

$$x(n) = \cos \Omega_0 n u(n) \quad (8.4.5)$$

Si escribimos $x(n)$ así:

$$x(n) = \frac{1}{2} [\exp[j\Omega_0 n] + \exp[-j\Omega_0 n]] u(n)$$

y utilizamos el resultado del apartado (b), se deduce que

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2} \frac{1}{z - \exp[j\Omega_0]} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - \exp[-j\Omega_0]} \\ &= \frac{z(z - \cos \Omega_0)}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1} \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

Análogamente, la transformada Z de la secuencia

$$x(n) = \sin \Omega_0 n u(n) \quad (8.4.7)$$

es

$$X(z) = \frac{z \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1} \quad (8.4.8)$$

Sea $x(n)$ una secuencia no causal y sean $x_+(n)$ y $x_-(n)$ sus componentes causal y anti-causal, respectivamente, definidos en la Ecuación (8.3.3). Entonces,

$$X(z) = X_+(z) + X_-(z) \quad (8.4.9)$$

Como

$$X_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x_-(n)z^{-n} \quad (8.4.10)$$

realizando el cambio de variable $m = -n$, y aplicando que $x_-(0) = 0$, podemos escribir:

$$X_-(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x_-(-m)z^m \quad (8.4.11)$$

Si llamamos $x_1(m)$ a la secuencia $x_-(-m)$, se deduce que

$$X_-(z) = X_1(z^{-1}) \quad (8.4.12)$$

siendo $X_1(z)$ la transformada Z de la secuencia *causal* $x_-(-n)$.

Ejemplo 8.4.2 Sea la secuencia

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

Entonces

$$x_+(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$x_-(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, \quad n < 0$$

y

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x_-(-n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n > 0 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \delta(n) \end{aligned}$$

Utilizando el Ejemplo 8.4.1, podemos escribir

$$X_+(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

y

$$X_1(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - 1 = \frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

con lo que

$$X_-(z) = -\frac{z}{z - 2}, \quad |z| < 2$$

y

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{z}{z - 2}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

Por lo tanto, es posible utilizar una tabla de transformadas de funciones del tiempo causales para calcular la transformada Z de funciones no causales. La Tabla 8.1 contiene las parejas de transformadas que se han calculado en el Ejemplo 8.4.1, así como algunas otras. Las parejas de transformadas adicionales se pueden calcular directamente utilizando la Ecuación (8.4.1) o utilizando las propiedades de la transformada Z . Seguidamente presentaremos algunas de estas propiedades. Como son similares a las de las otras transformadas que ya hemos presentado, simplemente plantearemos algunas de las más familiares y no las trataremos en detalle.

8.4.1. Linealidad

Sean $x_1(n)$ y $x_2(n)$ dos secuencias cuyas transformadas son respectivamente $X_1(z)$ y $X_2(z)$. Entonces

$$Z[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \quad (8.4.13)$$

siendo a_1 y a_2 constantes arbitrarias.

8.4.2. Desplazamiento temporal

Sea $x(n)$ una secuencia causal cuya transformada es $X(z)$. Entonces, dado cualquier número entero $n_0 > 0$,

$$\begin{aligned} Z[x(n + n_0)] &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n + n_0)z^{-n} \\ &= \sum_{m=n_0}^{\infty} x(m)z^{-(m-n_0)} \\ &= z^{n_0} \left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} - \sum_{m=0}^{n_0-1} x(m)z^{-m} \right] \\ &= z^{n_0} \left[X(z) - \sum_{m=0}^{n_0-1} x(m)z^{-m} \right] \end{aligned} \quad (8.4.14)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} Z[x(n - n_0)] &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n - n_0)z^{-n} \\ &= \sum_{m=-n_0}^{\infty} x(m)z^{-(m+n_0)} \\ &= z^{-n_0} \left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} + \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m)z^{-m} \right] \\ &= z^{-n_0} \left[X(z) + \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m)z^{-m} \right] \end{aligned} \quad (8.4.15)$$

Ejemplo 8.4.3 Consideremos la ecuación en diferencias

$$y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) = \delta(n)$$

con la condición inicial

$$y(-1) = 3$$

Para calcular $y(n)$ para $n \geq 0$, utilizaremos la Ecuación (8.4.15) y tomaremos transformadas en ambos miembros de la ecuación en diferencias, con lo que resulta

$$Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} [Y(z) + y(-1)z] = 1$$

Sustituyendo ahora las condiciones iniciales y reordenando términos

$$Y(z) = \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{5}{2} \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

Utilizando el resultado del Ejemplo 8.4.1(b) se deduce que

$$y(n) = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

Ejemplo 8.4.4 Resolver la ecuación en diferencias

$$y(n+2) - y(n+1) + \frac{2}{9} y(n) = x(n)$$

calculando $y(n)$, $n \geq 0$, para la entrada $x(n) = u(n)$, y las condiciones iniciales $y(1) = 1$ e $y(0) = 1$.

Utilizando la Ecuación (8.4.14) tenemos que

$$z^2[Y(z) - y(0) - y(1)z^{-1}] - z[Y(z) - y(0)] + \frac{2}{9} Y(z) = X(z)$$

Sustituyendo $X(z) = z/(z-1)$ y utilizando las condiciones iniciales dadas obtenemos

$$\left(z^2 - z + \frac{2}{9}\right) Y(z) = \frac{z}{z-1} + z^2 = z \frac{z^2 - z + 1}{z-1}$$

Si expresamos $Y(z)$ en la forma

$$Y(z) = z \frac{z^2 - z + 1}{(z-1)(z-\frac{1}{3})(z-\frac{2}{3})}$$

y descomponemos en fracciones simples la fracción obtenemos

$$\begin{aligned} Y(z) &= z \left[\frac{\frac{9}{2}}{z-1} + \frac{\frac{7}{2}}{z-\frac{1}{3}} - \frac{7}{z-\frac{2}{3}} \right] \\ &= \frac{\frac{9}{2}z}{z-1} + \frac{\frac{7}{2}z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{7z}{z-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Utilizando el resultado del Ejemplo 8.4.1(b),

$$y(n) = \frac{9}{2} u(n) + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 7 \left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$$

8.4.3. Escalado en frecuencia

La transformada Z de la secuencia $a^n x(n)$ es

$$\begin{aligned} Z[a^n x(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) (a^{-1}z)^{-n} \\ &= X(a^{-1}z) \end{aligned} \quad (8.4.16)$$

Ejemplo 8.4.5 Podemos utilizar la propiedad de escalado para calcular la transformada de la señal

$$y(n) = (a^n \cos \Omega_0 n) u(n)$$

a partir de la transformada de

$$x(n) = (\cos \Omega_0 n) u(n)$$

que, utilizando la Ecuación (8.4.6) es

$$X(z) = \frac{z(z - \cos \Omega_0)}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{a^{-1}z(a^{-1}z - \cos \Omega_0)}{a^{-2}z^2 - 2a^{-1}z \cos \Omega_0 + 1} \\ &= \frac{z(z - a \cos \Omega_0)}{z^2 - 2a \cos \Omega_0 z + a^2} \end{aligned}$$

Análogamente, la transformada de

$$y(n) = a^n (\sin \Omega_0 n) u(n)$$

es, utilizando la Ecuación (8.4.8),

$$Y(z) = \frac{az \operatorname{sen} \Omega_0}{z^2 - 2a \cos \Omega_0 z + a^2}$$

8.4.4. Diferenciación con respecto a z

Si derivamos ambos miembros de la Ecuación (8.4.1) con respecto a z, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-n)x(n)z^{-n-1} \\ &= -z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} nx(n)z^{-n} \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$Z[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z) \quad (8.4.17)$$

Derivando sucesivamente con respecto a z, se puede generalizar este resultado:

$$Z[n^k x(n)] = \left(-z \frac{d}{dz} \right)^k X(z) \quad (8.4.18)$$

Ejemplo 8.4.6 Vamos a calcular la transformada de la función

$$y(n) = n(n+1)u(n)$$

Aplicando la Ecuación (8.4.17), tenemos

$$Z[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} Z[u(n)] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

y

$$\begin{aligned} Z[n^2 u(n)] &= \left(-z \frac{d}{dz} \right)^2 Z[u(n)] = -z \frac{d}{dz} \left\{ -z \frac{d}{dz} Z[u(n)] \right\} \\ &= -z \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \end{aligned}$$

con lo que

$$Y(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{2z^2}{(z-1)^3}$$

8.4.5. Valor inicial

Dada una secuencia causal $x(n)$, la Ecuación (8.4.1) se puede desarrollar explícitamente así:

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(n)z^{-n} + \dots \quad (8.4.19)$$

Puede verse entonces que cuando $z \rightarrow \infty$, el término $z^{-n} \rightarrow 0$ para todo $n > 0$, con lo que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0) \quad (8.4.20)$$

Ejemplo 8.4.7 Determinaremos el valor inicial $x(0)$ de una señal cuya transformada es

$$X(z) = \frac{z^3 - \frac{3}{4}z^2 + 2z - \frac{5}{4}}{(z-1)(z-\frac{1}{3})(z^2 - \frac{1}{2}z + 1)}$$

Utilizando el teorema del valor inicial

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 1$$

El teorema del valor inicial es una herramienta de utilidad para comprobar si se ha cometido algún error al calcular la transformada Z de una determinada señal. La descomposición en fracciones simples de $X(z)$ es

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{z-\frac{1}{4}}{z^2-\frac{1}{2}z+1}$$

con lo que

$$x(n) = u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

El valor inicial es $x(0) = 1$, que coincide con el resultado anterior.

8.4.6. Valor final

Aplicando el teorema del desplazamiento temporal, tenemos que

$$Z[x(n) - x(n-1)] = (1 - z^{-1})X(z) \quad (8.4.21)$$

El lado izquierdo de la Ecuación (8.4.21) se puede expresar así:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [x(n) - x(n-1)]z^{-n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [x(n) - x(n-1)]z^{-n}$$

Si hacemos ahora $z \rightarrow 1$, la Ecuación (8.4.21) queda

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [x(n) - x(n-1)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} x(N) = x(\infty) \end{aligned} \quad (8.4.22)$$

suponiendo que existe $x(\infty)$.

Ejemplo 8.4.8 Aplicando el teorema del valor final, se puede calcular el valor final de la señal del Ejemplo 8.4.7

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z^3 - \frac{3}{4}z^2 + 2z - \frac{5}{4}}{z(z - \frac{1}{3})(z^2 - \frac{1}{2}z + 1)} \right]$$

de forma que

$$x(\infty) = 1$$

que coincide de nuevo con el valor final de $x(n)$ dado en el ejemplo anterior.

Ejemplo 8.4.9 Consideremos la señal $x(n) = 2^n u(n)$ cuya transformada Z es

$$X(z) = \frac{z}{z-2}$$

Aplicando el teorema del valor final se obtiene

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-2} = 1$$

Este resultado es claramente incorrecto, ya que $x(n)$ crece sin límite y, por lo tanto, no tiene valor final.

Este ejemplo demuestra que el teorema del valor final se debe utilizar con precaución. Como indicamos anteriormente, sólo produce el valor correcto si el valor final existe.

8.4.7. Convolución

Si la señal $y(n)$ es el resultado de la convolución de dos secuencias $x(n)$ y $h(n)$, utilizando un razonamiento análogo al empleado en la obtención de la propiedad de convolución para la transformada de Fourier en tiempo discreto, se puede demostrar que

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (8.4.23)$$

Teniendo en cuenta que

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n}$$

podemos ver que $y(n)$ es el coeficiente del n -ésimo término en el desarrollo en serie de potencias de $Y(z)$. Se deduce, por tanto, que si multiplicamos dos series de potencias, o polinomios $X(z)$ y $H(z)$, los coeficientes del polinomio resultante se obtienen mediante la convolución de los coeficientes $x(n)$ y $h(n)$.

Ejemplo 8.4.10 Deseamos utilizar la transformada Z para obtener la convolución de las dos secuencias siguientes, que ya se consideraron en el Ejemplo 6.3.4:

$$h(n) = \{1, 2, 0, -1, 1\} \quad \text{y} \quad x(n) = \{1, 3, -1, -2\}$$

Las respectivas transformadas son

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} - z^{-3} + z^{-4}$$

y

$$H(z) = 1 + 3z^{-1} - z^{-2} - 2z^{-3}$$

con lo que

$$Y(z) = 1 + 5z^{-1} + 5z^{-2} - 5z^{-3} - 6z^{-4} + 4z^{-5} + z^{-6} - 2z^{-7}$$

Por lo tanto, la secuencia resultante es

$$y(n) = \{1, 5, 5, -5, -6, 4, 1, -2\}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en el Ejemplo 6.3.4.

La Tabla 8.1 resume las propiedades de la transformada Z . La Tabla 8.2, una tabla de parejas de transformadas Z de funciones causales del tiempo, contiene, además de las transformadas de secuencias en tiempo discreto, las transformadas de diversas funciones temporales muestreadas. Estas transformadas se obtienen mediante sencillas modificaciones de las propiedades presentadas en esta sección, y se dejan como ejercicio para el lector.

Tabla 8.1. Propiedades de la transformada Z

1. Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	(8.4.13)
2. Desplazamiento temporal	$x(n + n_0)$	$z^{n_0} \left[X(z) - \sum_{m=0}^{n_0-1} x(m)z^{-m} \right]$	(8.4.14)
	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} \left[X(z) + \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m)z^{-m} \right]$	(8.4.15)
3. Escalado en frecuencia	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	(8.4.16)
4. Multiplicación para n	$nx(n)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$	(8.4.17)
	$n^k x(n)$	$\left(-z \frac{d}{dz} \right)^k X(z)$	(8.4.18)
5. Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	(8.4.23)

Tabla 8.2. Parejas de transformadas Z

$x(n)$ para $n \geq 0$	$X(z)$	Radio de convergencia $ z > R$
1. $\delta(n)$	1	0
2. $\delta(n - m)$	z^{-m}	0
3. $u(n)$	$\frac{z}{z - 1}$	1
4. n	$\frac{z}{(z - 1)^2}$	1
5. n^2	$\frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}$	1
6. a^n	$\frac{z}{z - a}$	$ a $
7. na^n	$\frac{az}{(z - a)^2}$	$ a $
8. $(n + 1)a^n$	$\frac{z^2}{(z - a)^2}$	$ a $
9. $\frac{(n + 1)(n + 2) \cdots (n + m)a^n}{m!}$	$\frac{z^{m+1}}{(z - a)^{m+1}}$	$ a $
10. $\cos \Omega_0 n$	$\frac{z(z - \cos \Omega_0)}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	1
11. $\sin \Omega_0 n$	$\frac{z \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	1
12. $a^n \cos \Omega_0 n$	$\frac{z(z - a \cos \Omega_0)}{z^2 - 2za \cos \Omega_0 + a^2}$	$ a $
13. $a^n \sin \Omega_0 n$	$\frac{za \sin \Omega_0}{z^2 - 2za \cos \Omega_0 + a^2}$	$ a $
14. $\exp[-anT]$	$\frac{z}{z - \exp[-aT]}$	$ \exp[-aT] $
15. nT	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$	1
16. $nT \exp[-anT]$	$\frac{Tz \exp[-aT]}{[z - \exp[-aT]]^2}$	$ \exp[-aT] $
17. $\cos n\omega_0 T$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	1
18. $\sin n\omega_0 T$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	1
19. $\exp[-anT] \cos n\omega_0 T$	$\frac{z[z - \exp[-aT] \cos \omega_0 T]}{z^2 - 2z \exp[-aT] \cos \omega_0 T + \exp[-2aT]}$	$ \exp[-aT] $
20. $\exp[-anT] \sin n\omega_0 T$	$\frac{z[z - \exp[-aT] \sin \omega_0 T]}{z^2 - 2z \exp[-aT] \cos \omega_0 T + \exp[-2aT]}$	$ \exp[-aT] $

8.5. LA TRANSFORMADA Z INVERSA

Existen varios métodos para obtener una secuencia $x(n)$ dada su transformada Z $X(z)$. El método más directo es utilizar la *integral de inversión*:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz \quad (8.5.1)$$

donde el símbolo $\oint_{\Gamma}$ representa la integración en un contorno cerrado Γ en el plano z en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. El contorno debe estar en la región de convergencia de $X(z)$.

La Ecuación (8.5.1) se puede obtener partiendo de la Ecuación (8.4.1), multiplicando los dos miembros por z^{k-1} e integrando en el contorno Γ :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{k-n-1} dz$$

Por el teorema de la integral de Cauchy,

$$\oint_{\Gamma} z^{k-n-1} dz = \begin{cases} 2\pi j, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

con lo que

$$\oint_{\Gamma} X(z) z^{k-1} dz = 2\pi j x(k)$$

de donde se deduce que

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{k-1} dz$$

La integral del lado derecho de la Ecuación (8.5.1) se puede calcular utilizando el teorema de los residuos. Sin embargo, en muchos casos no es necesario, ya que la transformada inversa se puede obtener empleando otros métodos.

Supongamos para lo que sigue que $X(z)$ es una función racional de z de la forma

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M}{a_0 + a_1 z + \dots + a_N z^N}, \quad M \leq N \quad (8.5.2)$$

cuya región de convergencia no contiene ninguno de sus polos.

8.5.1. Inversión por desarrollo en serie de potencias

Si expresamos $X(z)$ mediante un desarrollo en serie de potencias de z^{-1} , $x(n)$ se puede determinar de forma muy sencilla, identificando el coeficiente del término z^{-n} en el desarrollo en serie. El desarrollo en serie se puede obtener ordenando el numerador y denominador de $X(z)$ en potencias decrecientes de z y dividiendo ambos polinomios.

Ejemplo 8.5.1 Determinar la transformada Z inversa de la función

$$X(z) = \frac{z}{z - 0,1}, \quad |z| > 0,1$$

Como deseamos obtener un desarrollo en serie en potencias de z^{-1} , dividimos en numerador por el denominador, con lo que resulta

$$\begin{array}{r} z - 0,1 \overline{) \begin{array}{l} 1 + 0,1z^{-1} + (0,1)^2z^{-2} + (0,1)^3z^{-3} + \dots \\ z \\ \hline 0,1 \\ 0,1 \phantom{- (0,1)^2z^{-1}} \\ \hline (0,1)^2z^{-1} \\ (0,1)^2z^{-1} - (0,1)^2z^{-2} \\ \hline (0,1)^3z^{-2} \end{array}} \end{array}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$X(z) = 1 + 0,1z^{-1} + (0,1)^2z^{-1} + (0,1)^3z^{-3} + \dots$$

con lo que

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 0,1, \quad x(2) = (0,1)^2, \quad x(3) = (0,1)^3, \quad \text{etc.}$$

Es sencillo observar que esos términos corresponden a la secuencia

$$x(n) = (0,1)^n u(n)$$

Aunque en este ejemplo hemos podido obtener la expresión general de la secuencia $x(n)$, en la mayoría de los casos no resulta tan sencillo identificar el término general mediante la observación de algunos valores de la secuencia. Sin embargo, en los casos en los que sólo estamos interesados en unos cuantos valores de la señal discreta, esta técnica es muy sencilla de aplicar. Por ejemplo, si la señal $x(n)$ del ejemplo anterior representara la respuesta al impulso de un sistema, como tiende a cero muy rápidamente, a efectos prácticos bastaría con calcular sólo los primeros valores de $x(n)$ y suponer que el resto vale cero. El error resultante en nuestro análisis será despreciable en la mayoría de los casos.

Observando la definición de transformada Z es claro que el desarrollo en serie correspondiente a la transformada de una señal causal sólo puede tener potencias negativas de z . Como consecuencia de este resultado, si la secuencia $x(n)$ es causal, el grado del denominador en la expresión de $X(z)$ en la Ecuación (8.5.2) debe ser superior al grado del numerador. Es decir, $N \geq M$.

Ejemplo 8.5.2 Deseamos calcular la transformada inversa de

$$X(z) = \frac{z^3 - z^2 + z - \frac{1}{16}}{z^3 - \frac{5}{4}z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{16}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Realizando la división de polinomios se obtiene el desarrollo en serie

$$X(z) = 1 + \frac{1}{4} z^{-1} + \frac{13}{16} z^{-2} + \frac{57}{64} z^{-3} + \dots$$

de donde se deduce que

$$x(0) = 1, \quad x(1) = \frac{1}{4}, \quad x(2) = \frac{13}{16}, \quad x(3) = \frac{57}{64}, \quad \text{etc.}$$

En este ejemplo no es sencillo determinar una expresión general para $x(n)$ que, como veremos en la sección siguiente, resulta ser

$$x(n) = \delta(n) - 9 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 5n \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 9 \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

8.5.2. Inversión por descomposición en fracciones simples

Para el caso de funciones racionales se puede obtener la descomposición en fracciones simples de $X(z)$ utilizando sus polos, análogamente a como se hacía en el caso de la transformada de Laplace. En vista de la unicidad de la transformada Z , podemos utilizar la tabla de parejas de transformadas para identificar las secuencias correspondientes a los términos de la descomposición en fracciones simples.

Ejemplo 8.5.3 Consideremos la transformada $X(z)$ del Ejemplo 8.5.2:

$$X(z) = \frac{z^3 - z^2 + z - \frac{1}{16}}{z^3 - \frac{5}{4} z^2 + \frac{1}{2} z - \frac{1}{16}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Para obtener la descomposición en fracciones simples, escribiremos primero $X(z)$ como la suma de una constante y una nueva fracción en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador:

$$X(z) = 1 + \frac{\frac{1}{4} z^2 + \frac{1}{2} z}{z^3 - \frac{5}{4} z^2 + \frac{1}{2} z - \frac{1}{16}}$$

Factorizando resulta

$$X(z) = 1 + \frac{\frac{1}{4} z(z + 2)}{(z - \frac{1}{2})^2(z - \frac{1}{4})}$$

Podemos realizar la descomposición en fracciones simples del segundo término e intentar identificar el resultado con términos de la Tabla 8.2. Sin embargo, las parejas de transformadas de esta tabla tienen un factor de z en el numerador. Por lo tanto, escribiremos $X(z)$ así:

$$X(z) = 1 + z \frac{\frac{1}{4} (z + 2)}{(z - \frac{1}{2})^2(z - \frac{1}{4})}$$

Realizamos ahora la descomposición en fracciones simples del término fraccionario, y resulta

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + z \left(\frac{-9}{z - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{5}{2}}{(z - \frac{1}{2})^2} + \frac{9}{z - \frac{1}{4}} \right) \\ &= 1 - 9 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + 5 \frac{z/2}{(z - \frac{1}{2})^2} + 9 \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Aplicando los resultados de la Tabla 8.2 obtenemos

$$x(n) = \delta(n) - 9 \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) + 5n \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) + 9 \left(\frac{1}{4} \right)^n u(n)$$

Ejemplo 8.5.4 Resolver la ecuación en diferencias

$$y(n) - \frac{3}{4} y(n-1) + \frac{1}{8} y(n-2) = 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

con condiciones iniciales

$$y(-1) = 2 \quad y(-2) = 4$$

Este es el problema planteado en el Ejemplo 6.5.4. Para resolverlo, calcularemos primero $Y(z)$ transformando la ecuación en diferencias, y posteriormente utilizaremos la Ecuación (8.4.15):

$$Y(z) - \frac{3}{4} z^{-1} [Y(z) + 2z] + \frac{1}{8} z^{-2} [Y(z) + 4z^2 + 2z] = \frac{2z}{z^2 + 1}$$

Agrupando términos en $Y(z)$ obtenemos

$$\left(1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2} \right) Y(z) = 1 - \frac{1}{4} z^{-1} + \frac{2z}{z^2 + 1}$$

de donde se deduce que

$$Y(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{4} z}{z^2 - \frac{3}{4} z + \frac{1}{8}} + \frac{2z^3}{(z^2 + 1)(z^2 - \frac{3}{4} z + \frac{1}{8})}, \quad |z| > 1$$

Realizando la descomposición en fracciones simples de los términos del lado derecho, siguiendo las líneas del ejemplo anterior obtenemos

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{8}{5} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{8}{17} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{112}{85} z - \frac{96}{85} z^2}{z^2 + 1} \\ &= \frac{13}{5} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{8}{17} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{112}{85} \frac{z}{z^2 + 1} - \frac{96}{85} \frac{z^2}{z^2 + 1} \end{aligned}$$

Los dos primeros términos del lado derecho corresponden a la solución homogénea, y los dos últimos términos a la solución particular. Aplicando los resultados de la Tabla 8.2 resulta

$$y(n) = \frac{13}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{8}{17} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{112}{85} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{96}{85} \cos \frac{n\pi}{2}, \quad n \geq 0$$

que coincide con nuestra solución anterior.

Ejemplo 8.5.5 Vamos a calcular la transformada inversa de la función

$$X(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Descomponiendo directamente en fracciones simples obtenemos

$$X(z) = \frac{4}{z - \frac{1}{2}} - \frac{4}{z - \frac{1}{4}}$$

que se puede escribir así:

$$X(z) = z^{-1} \frac{4z}{z - \frac{1}{2}} - 4z^{-1} \frac{4z}{z - \frac{1}{4}}$$

Utilizando la tabla de transformadas y el teorema de desplazamiento temporal, dado en la Ecuación (8.4.15), podemos obtener la transformada inversa

$$x(n) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - 4 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Alternativamente, podemos escribir

$$X(z) = \frac{z}{z(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$$

y descomponer en fracciones simples como en el ejemplo anterior, con lo que resulta

$$X(z) = z \left(\frac{8}{z} + \frac{8}{z - \frac{1}{2}} - \frac{16}{z - \frac{1}{4}} \right) = 8 + \frac{8z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{16z}{z - \frac{1}{4}}$$

Utilizando directamente la Tabla 8.2, podemos calcular $x(n)$

$$x(n) = 8\delta(n) + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 16 \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Para comprobar que se trata de la misma solución que obtuvimos anteriormente, nótese que para $n = 0$ tenemos

$$x(0) = 8 + 8 - 16 = 0$$

Para $n \geq 1$ tenemos

$$x(n) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n - 16\left(\frac{1}{2}\right)^n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 4\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Por lo tanto, los dos métodos producen la misma solución.

8.6. TRANSFORMADAS Z DE SISTEMAS CAUSALES EN TIEMPO DISCRETO

Ya hemos visto que dado un sistema causal cuya respuesta al impulso es $h(n)$, la salida correspondiente a cualquier señal de entrada $x(n)$ se obtiene mediante la suma de convolución:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (8.6.1)$$

En términos de las correspondientes transformadas Z la salida se expresa así:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (8.6.2)$$

donde

$$H(z) = Z[h(n)] = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (8.6.3)$$

representa la función de transferencia del sistema.

Como puede verse en la Ecuación (8.6.2), y teniendo en cuenta que la transformada Z de una función causal sólo contiene potencias negativas de z , la función de transferencia $H(z)$ de un sistema causal se expresará como el cociente de dos polinomios en z , tal que el grado del denominador será mayor que el grado del numerador. Es decir, si

$$H(z) = \frac{\beta_M z^M + \beta_{M-1} z^{M-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_N z^N + \alpha_{N-1} z^{N-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0} \quad (8.6.4)$$

entonces, si el sistema es causal $N \geq M$. Por otra parte, si escribimos $H(z)$ como el cociente de dos polinomios en z^{-1} , es decir,

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-M+1} + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}} \quad (8.6.5)$$

si el sistema es causal, debe cumplirse que $b_0 \neq 0$.

Dado un sistema descrito por la ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (8.6.6)$$

se puede obtener su función de transferencia calculando la transformada Z de los dos miembros de la ecuación. Nótese que para calcular la respuesta al impulso de un sistema y, por lo tanto, su función de transferencia, el sistema debe estar en condiciones de reposo inicial. Si suponemos condiciones iniciales nulas, podemos utilizar el teorema de desplazamiento y obtener

$$\left[\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right] Y(z) = \left[\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right] X(z) \quad (8.6.7)$$

con lo que

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (8.6.8)$$

La respuesta al impulso correspondiente es

$$h(n) = Z^{-1}[H(z)] \quad (8.6.9)$$

Resulta claro que los polos de la función de transferencia del sistema son los mismos que los valores característicos de la correspondiente ecuación en diferencias. Aplicando las conclusiones de la discusión sobre estabilidad que realizamos en el Capítulo 6, podemos decir que para que un sistema sea estable, los polos deben estar en el interior del círculo unidad en el plano z . En consecuencia, dada una función causal y estable, la región de convergencia debe incluir la circunferencia unidad.

Los siguientes ejemplos ilustran estos resultados.

Ejemplo 8.6.1 Sea la respuesta al escalón de un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal:

$$y(n) = \frac{6}{5} u(n) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) + \frac{2}{15} \left(-\frac{1}{4} \right)^n u(n)$$

Deseamos encontrar la función de transferencia $H(z)$ del sistema. Nótese que

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{6}{5} \frac{z}{(z-1)} - \frac{1}{3} \frac{z}{(z-\frac{1}{2})} + \frac{2}{15} \frac{z}{(z+\frac{1}{4})} \\ &= \frac{z^3 - \frac{1}{4} z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})} \end{aligned}$$

Como

$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - \frac{1}{4} z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})} \\ &= \frac{2}{3} \frac{z}{z+\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (8.6.10)$$

Por lo tanto, la respuesta al impulso del sistema es

$$h(n) = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Como los dos polos del sistema están dentro del círculo unidad, el sistema es estable. La representación del sistema mediante la correspondiente ecuación en diferencias se puede calcular expresando la Ecuación (8.6.10) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})(1 + \frac{1}{4} z^{-1})} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}{1 - \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{1}{8} z^{-2}} \end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$\left[1 - \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{1}{8} z^{-2}\right] Y(z) = \left[1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right] X(z)$$

Tomando la transformada inversa de los dos miembros de la ecuación resulta

$$y(n) - \frac{1}{4} y(n-1) - \frac{1}{8} y(n-2) = x(n) - \frac{1}{4} x(n-1)$$

Ejemplo 8.6.2 Consideremos el sistema descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y(n) - 2y(n-1) + 2y(n-2) = X(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$$

Si transformamos los dos miembros de la ecuación se puede calcular la función de transferencia del sistema. Suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero y utilizando la Ecuación (8.4.15) resulta

$$Y(z) - 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = X(z) + \frac{1}{2} z^{-1}X(z)$$

Con lo que

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{z^2 + \frac{1}{2} z}{z^2 - 2z + 2} \end{aligned}$$

Los ceros de este sistema están en $z = 0$ y $z = -(1/2)$, y los polos en $z = 1 \pm j1$. Como los polos están en el exterior del círculo unidad, el sistema es inestable. La Figura 8.6.1 muestra la posición de los polos y los ceros de $H(z)$ en el plano z . Este gráfico se denomina diagrama polo-cero.

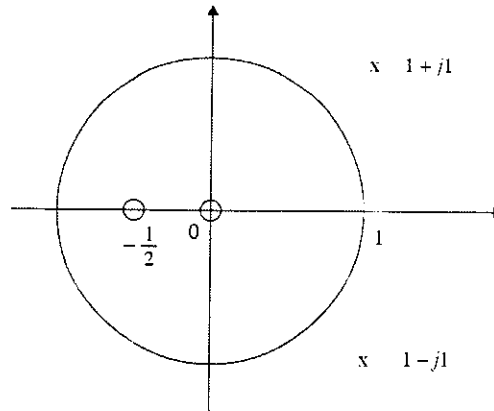


Figura 8.6.1. Diagrama polo-cero del Ejemplo 8.6.2.

La respuesta al impulso del sistema se calcula expresando $H(z)$ de la siguiente forma

$$H(z) = \frac{z(z-1)}{z^2 - 2z + 2} + \frac{3}{2} \frac{\frac{1}{2} z}{z^2 - 2z + 2}$$

y utilizando la Tabla 8.2

$$h(n) = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) u(n) + \frac{3}{2} (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right) u(n)$$

Ejemplo 8.6.3 Consideremos el sistema que se muestra en la Figura 8.6.2 en el que

$$H(z) = \frac{0,8Kz}{(z - 0,8)(z - 0,5)}$$

siendo K una ganancia constante.

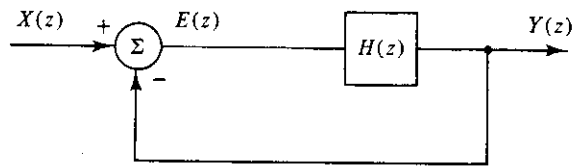


Figura 8.6.2. Diagrama de bloques del sistema de control del Ejemplo 8.6.3.

La función de transferencia del sistema se obtiene teniendo en cuenta que la salida del sumador se puede expresar así:

$$E(z) = X(z) - Y(z)$$

con lo que la salida del sistema es

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)E(z) \\ &= [X(z) - Y(z)]H(z) \end{aligned}$$

Sustituyendo $H(z)$ y simplificando resulta

$$Y(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z)} X(z) = \frac{0,8Kz}{(z - 0,8)(z - 0,5) + 0,8Kz} X(z)$$

La función de transferencia para el sistema de realimentación es, por lo tanto

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,8Kz}{z^2 + (0,8K - 1,3)z + 0,04}$$

Los polos del sistema son las raíces de la ecuación

$$z^2 + (0,8K - 1,3)z + 0,04 = 0$$

Para $K = 1$ las dos raíces son

$$z_1 = 0,1 \quad \text{y} \quad z_2 = 0,4$$

Como ambas raíces están en el interior del círculo unidad, el sistema es estable. Sin embargo, si $K = 4$ las raíces son

$$z_1 = 0,0213 \quad \text{y} \quad z_2 = 1,87875$$

Como una de ellas está ahora fuera del círculo unidad, el sistema es inestable.

8.7. ANÁLISIS DE SISTEMAS DESCRITOS MEDIANTE ECUACIONES DE ESTADO UTILIZANDO LA TRANSFORMADA Z

Como hemos visto ya en muchas ocasiones, el uso de técnicas en el dominio de la frecuencia simplifica considerablemente el análisis de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. En esta sección consideraremos el análisis mediante la transformada Z de sistemas en tiempo discreto, representados por un conjunto de ecuaciones de estado de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(n) + \mathbf{b}x(n), & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0 \\ y(n) &= \mathbf{c}\mathbf{v}(n) + dx(n) \end{aligned} \quad (8.7.1)$$

Como veremos posteriormente, la transformada Z es útil, tanto para obtener la representación mediante las variables de estado a partir de la función de transferencia del sistema, como para obtener la solución de las ecuaciones de estado.

En el Capítulo 6, partiendo de la representación mediante la ecuación en diferencias, obtuvimos dos representaciones alternativas en el espacio de estados. Ahora partiremos de la representación del sistema mediante su función de transferencia y obtendremos dos representaciones más, denominadas formas en paralelo y en cascada. Para ver cómo se puede hacer, consideremos un sistema simple de primer orden descrito por las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} v(n+1) &= av(n) + bx(n) \\ y(n) &= cv(n) + dx(n) \end{aligned} \quad (8.7.2)$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$V(z) = \frac{b}{z - a} X(z)$$

Por tanto, el sistema se puede representar mediante el diagrama de bloques que se muestra en la Figura 8.7.1. Nótese que en lo que se refiere a la relación entre $Y(z)$ y $X(z)$, las ganancias b y c , a la entrada y a la salida, pueden tener valores arbitrarios con tal que su producto sea siempre igual a bc .

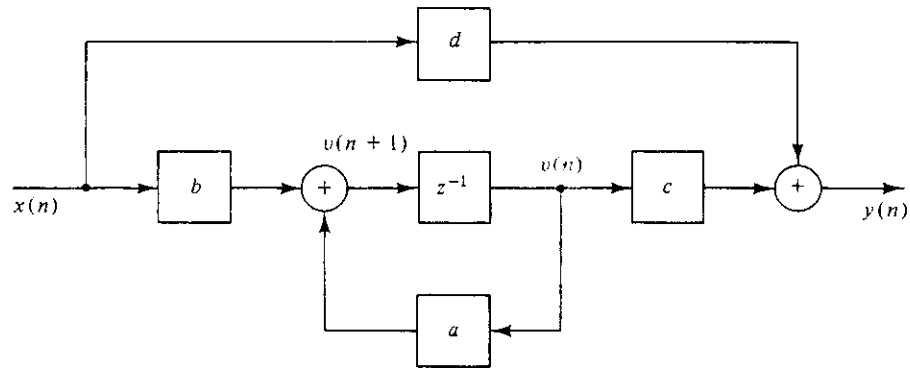


Figura 8.7.1. Diagrama de bloques de un sistema de primer orden descrito en el espacio de estados.

Utilizaremos este diagrama de bloques y la correspondiente Ecuación (8.7.2) para obtener la representación de un sistema general mediante variables de estado. Para ello expresaremos $H(z)$ como una combinación de esos bloques y asociaremos una variable de estado a la salida de cada bloque. Como en el caso de sistemas continuos, utilizaremos la descomposición en fracciones simples mediante los polos de $H(z)$ para obtener la forma en paralelo de las ecuaciones de estado. Representando esos bloques en cascada, obtendremos la otra representación. Para obtener las dos formas presentadas en el Capítulo 6, representaremos el sistema en forma de dos bloques en cascada. Uno de ellos realizará todos los polos y el otro todos los ceros. Si los polos están en el primer bloque y los ceros en el segundo, obtendremos la segunda forma canónica. La primera forma canónica puede obtenerse poniendo los ceros en el primer bloque y los polos en el segundo. Sin embargo, este desarrollo no resulta muy directo, ya que requiere manipular el primer bloque para eliminar términos que contengan potencias positivas de z .

Ejemplo 8.7.1 Consideremos un sistema cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{3z + \frac{3}{4}}{z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}} = \frac{3z + \frac{3}{4}}{(z + \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$$

Descomponiendo $H(z)$ en fracciones simples podemos escribir

$$H(z) = \frac{1}{z + \frac{1}{2}} + \frac{2}{z - \frac{1}{4}}$$

cuyo correspondiente diagrama de bloques se representa en la Figura 8.7.2(a). Utilizando las variables de estado identificadas en la figura obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)V_1(z) = X(z)$$

$$\left(z - \frac{1}{4}\right)V_2(z) = 2X(z)$$

$$Y(z) = V_1(z) + 2V_2(z)$$

Las correspondientes ecuaciones en el dominio del tiempo son

$$v_1(n+1) = -\frac{1}{2}v_1(n) + x(n)$$

$$v_2(n+1) = \frac{1}{4}v_2(n) + 2x(n)$$

$$y(n) = v_1(n) + 2v_2(n)$$

Si utilizamos la representación del diagrama de bloques de la Figura 8.7.2(b), con los estados que se muestran, tenemos

$$\left(z - \frac{1}{4}\right)V_1(z) = X_1(z)$$

$$X_1(z) = \left(3z + \frac{3}{4}\right)V_2(z)$$

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)V_2(z) = X(z)$$

$$Y(z) = V_1(z)$$

que, en el dominio del tiempo es equivalente a

$$v_1(n+1) = \frac{1}{4}v_1(n) + x_1(n)$$

$$x_1(n) = 3v_2(n+1) + \frac{3}{4}v_2(n)$$

$$v_2(n+1) = -\frac{1}{2}v_2(n) + x(n)$$

$$y(n) = v_1(n)$$

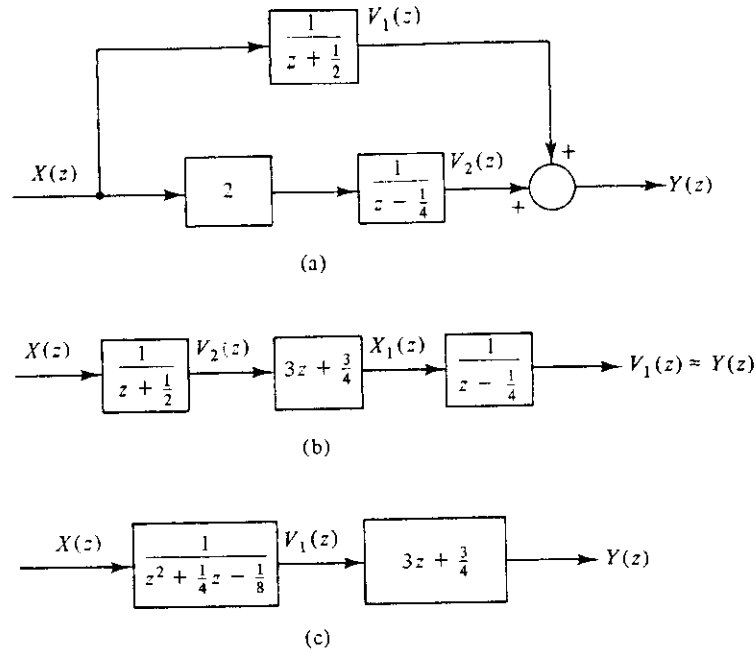


Figura 8.7.2. Representación del diagrama de bloques del Ejemplo 8.7.1.

Eliminando $x_1(n)$ y reordenando las ecuaciones resulta

$$v_1(n+1) = \frac{1}{4} v_1(n) - \frac{3}{4} v_2(n) + 3x(n)$$

$$v_2(n+1) = -\frac{1}{2} v_2(n) + x(n)$$

$$y(n) = v_1(n)$$

Para obtener la segunda forma canónica, utilizaremos el diagrama de bloques de la Figura 8.7.2(c) con lo que se obtiene

$$\left(z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}\right)V_1(z) = X(z)$$

$$Y(z) = \left(3z + \frac{3}{4}\right)V_1(z)$$

Definiendo

$$zV_1(z) = V_2(z)$$

podemos escribir

$$zV_2(z) + \frac{1}{4}V_2(z) - \frac{1}{8}V_1(z) = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{3}{4}V_1(z) + 3V_2(z)$$

Por lo tanto, las correspondientes ecuaciones de estado son

$$v_1(n+1) = v_2(n)$$

$$v_2(n+1) = \frac{1}{8} v_1(n) - \frac{1}{4} v_2(n) + x(n)$$

$$y(n) = \frac{3}{4} v_1(n) + 3v_2(n)$$

Como en el caso de tiempo continuo, para evitar tener que trabajar con números complejos, en sistemas con polos o ceros conjugados éstos se pueden combinar. La representación de los términos de segundo orden resultantes se puede expresar en primera o en segunda forma canónica. Como ejemplo, consideremos el sistema de segundo orden siguiente

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z) \quad (8.7.3)$$

Podemos obtener el diagrama de simulación expresando

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})V(z) \quad (8.7.4a)$$

donde

$$V(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z)$$

o, lo que es lo mismo,

$$V(z) = -a_1 z^{-1} V(z) - a_2 z^{-2} V(z) + X(z) \quad (8.7.4b)$$

Generaremos $V(z)$ como la suma de $X(z)$, $-a_1 z^{-1} V(z)$ y $-a_2 z^{-2} V(z)$ y formaremos $Y(z)$ como la suma de $b_0 V(z)$ y $b_2 z^{-2} V(z)$, con lo que obtenemos el diagrama de simulación que se muestra en la Figura 8.7.3.

Ejemplo 8.7.2 Consideremos un sistema con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + 2,5z^{-1} + z^{-2}}{(1 + 0,5z^{-1} + 0,8z^{-2})(1 + 0,3z^{-1})}$$

que se puede expresar como la combinación en cascada de los sistemas

$$H_1(z) = \frac{1 + 0,5z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1} + 0,8z^{-2}}, \quad H_2(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0,3z^{-1}}$$

Utilizando la Figura 8.7.3 se puede dibujar el diagrama de simulación que se muestra en la Figura 8.7.4.

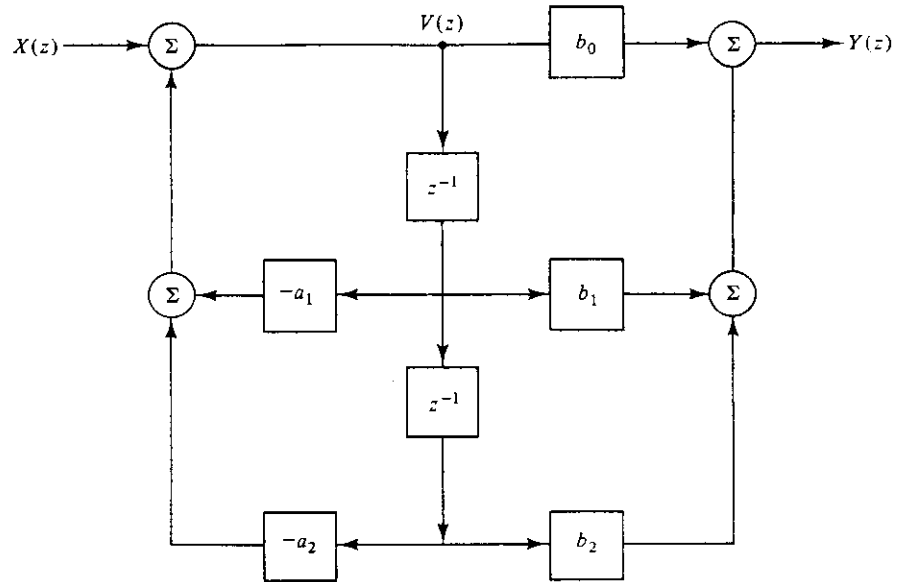


Figura 8.7.3. Diagrama de simulación de un sistema en tiempo discreto de segundo orden.

Empleando las salidas de los retardos como variables de estado, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\hat{V}(z) &= zV_1(z) = -0,3V_1(z) + X_1(z) \\ X_1(z) &= V(z) + 0,5V_2(z) \\ zV_2(z) &= V(z) = -0,5V_2(z) - 0,8V_3(z) + X(z) \\ zV_3(z) &= V_2(z) \\ Y(z) &= \hat{V}(z) + 2V_1(z)\end{aligned}$$

Eliminando $V(z)$ y $\hat{V}(z)$, y expresando las ecuaciones equivalentes en el dominio del tiempo tenemos

$$\begin{aligned}v_1(n+1) &= -0,3v_1(n) - 0,8v_3(n) + x(n) \\ v_2(n+1) &= -0,5v_2(n) - 0,8v_3(n) + x(n) \\ v_3(n+1) &= v_2(n) \\ y(n) &= 1,7v_1(n) - 0,8v_3(n) + x(n)\end{aligned}$$

Podemos ver claramente que utilizando combinaciones de secciones de primer y segundo orden, es posible obtener varias realizaciones diferentes de una misma función de transferencia.

Consideraremos ahora la solución en el dominio de la frecuencia de las ecuaciones de estado representadas en la Ecuación (8.7.1), que repetiremos aquí por conveniencia

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{v}(n) + \mathbf{b}x(n), \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (8.7.5a)$$

$$y(n) = \mathbf{c}\mathbf{v}(n) + d x(n) \quad (8.7.5b)$$

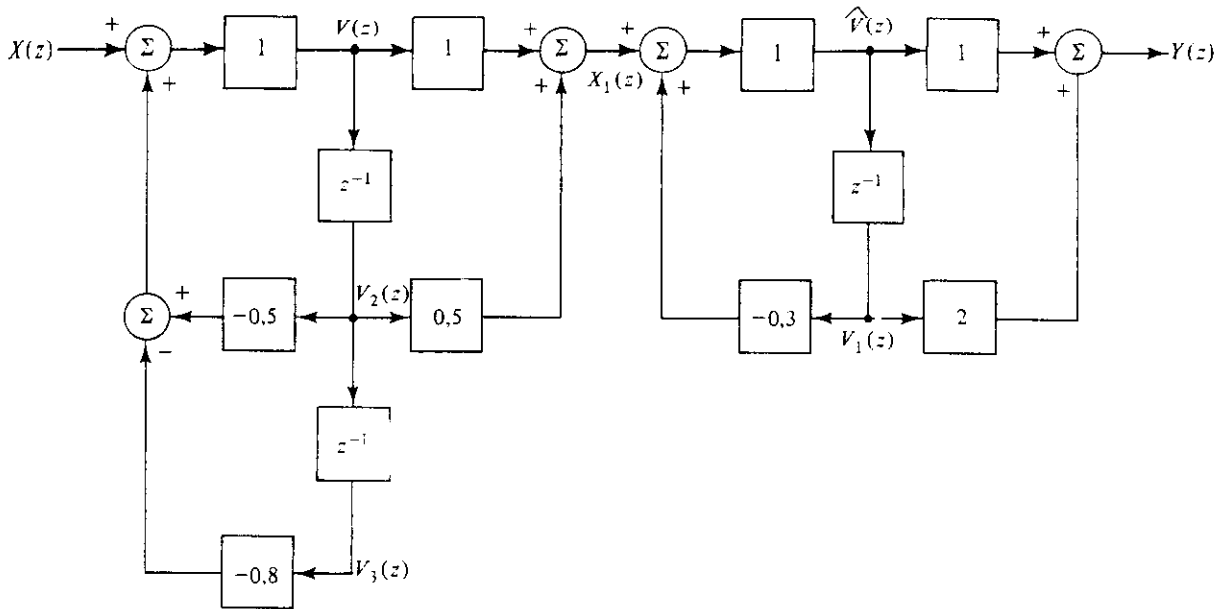


Figura 8.7.4. Diagrama de simulación del Ejemplo 8.7.2.

Aplicando la transformada Z a los dos miembros de la Ecuación (8.7.5a) resulta

$$z[\mathbf{V}(z) - \mathbf{v}_0] = \mathbf{A}\mathbf{V}(z) + \mathbf{b}X(z) \quad (8.7.6)$$

Despejando $\mathbf{V}(z)$ obtenemos

$$\mathbf{V}(z) = z(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}_0 + (\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(z) \quad (8.7.7)$$

De la Ecuación (8.7.5b) se deduce que

$$Y(z) = \mathbf{c}z(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}_0 + \mathbf{c}(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(z) + dX(z) \quad (8.7.8)$$

Si hacemos $\mathbf{v}(0) = 0$ podemos determinar la función de transferencia de este sistema

$$Y(z) = [\mathbf{c}(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d]X(z) \quad (8.7.9)$$

de donde se deduce que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathbf{c}(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d \quad (8.7.10)$$

Recordando la Ecuación (6.7.16), la solución en el dominio del tiempo de las ecuaciones de estado es

$$\mathbf{v}(n) = \Phi(n)\mathbf{v}_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n-1-j)\mathbf{b}x(j) \quad (8.7.11)$$

Calculando la transformada Z de ambos miembros de la Ecuación (8.7.11) resulta

$$\mathbf{V}(z) = \Phi(z)\mathbf{v}_0 + z^{-1}\Phi(z)\mathbf{b}X(z) \quad (8.7.12)$$

Comparando las Ecuaciones (8.7.12) y (8.7.7) obtenemos

$$\Phi(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (8.7.13)$$

o, equivalentemente,

$$\Phi(n) = \mathbf{A}^n = \mathbf{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \quad (8.7.14)$$

La Ecuación (8.7.14) nos proporciona un método alternativo para determinar $\mathbf{A}^n$.

Ejemplo 8.7.3 Consideremos el sistema

$$v_1(n+1) = v_2(n)$$

$$v_2(n+1) = \frac{1}{8}v_1(n) - \frac{1}{4}v_2(n) + x(n)$$

$$y(n) = v_1(n)$$

que se utilizó en los Ejemplos 6.7.2, 6.7.3 y 6.7.4. Encontraremos la respuesta al escalón unidad para el caso de $\mathbf{v}(0) = [1 \ 1]^T$. Como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

se deduce que

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -\frac{1}{8} & z + \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}} \begin{bmatrix} z + \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{8} & z \end{bmatrix}$$

con lo que podemos escribir

$$\Phi(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = z \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}}{z - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{3}}{z + \frac{1}{2}} & \frac{\frac{4}{3}}{z - \frac{1}{4}} - \frac{\frac{4}{3}}{z + \frac{1}{2}} \\ \frac{\frac{1}{6}}{z - \frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{6}}{z + \frac{1}{2}} & \frac{\frac{1}{3}}{z - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{2}{3}}{z + \frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tenemos

$$\mathbf{A}^n = \Phi(n) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en el Ejemplo 6.7.2. Aplicando la Ecuación (8.7.7), para la condición inicial dada,

$$\mathbf{V}(z) = (z\mathbf{I} - A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (z\mathbf{I} - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1}$$

Multiplicando términos y descomponiendo en fracciones simples resulta

$$\mathbf{V}(z) = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} \frac{z}{z-1} + \frac{23}{9} \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{22}{9} \frac{z}{z-\frac{1}{4}} \\ \frac{8}{9} \frac{z}{z-1} - \frac{23}{18} \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{11}{18} \frac{z}{z-\frac{1}{4}} \end{bmatrix}$$

de forma que

$$\mathbf{v}(n) = \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} + \frac{23}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{22}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{8}{9} - \frac{23}{18} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{11}{18} \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$$

Para calcular la salida, nótese que

$$Y(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \end{bmatrix} = V_1(z)$$

y

$$y(n) = v_1(n)$$

Que son exactamente los mismos resultados del Ejemplo 6.7.3. Finalmente tenemos, aplicando la Ecuación (8.7.10),

$$\begin{aligned} H(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} \begin{bmatrix} z+\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{8} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} \\ &= \frac{\frac{4}{3}}{z-\frac{1}{4}} - \frac{\frac{4}{3}}{z+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

con lo que

$$h(n) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 1$$

Como $h(0) = 0$, la última ecuación se puede expresar así

$$h(n) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

que es el resultado que se obtuvo en el Ejemplo 6.7.4.

8.8. RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA Z Y LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La relación entre la transformada Z y la transformada de Laplace de la secuencia de muestras que se obtiene al muestrear la señal analógica $x_a(t)$, se puede obtener muy fácilmente aplicando los resultados sobre señales muestreadas obtenidos en el Capítulo 7. Allí vimos que la salida del sistema de muestreo se puede expresar como la señal en tiempo continuo

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \quad (8.8.1)$$

o como la señal en tiempo discreto

$$x(n) = x_a(nT) \quad (8.8.2)$$

La transformada de Laplace de la Ecuación (8.8.1) es

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \exp[-nTs] \quad (8.8.3)$$

Si hacemos el cambio

$$X_s(s)|_{z=\exp[Ts]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) z^{-n} \quad (8.8.4)$$

El lado derecho de la Ecuación (8.8.4) es $X(z)$, la transformada Z de la secuencia $x(n)$. Por lo tanto, la transformada Z se puede ver como la transformada de Laplace de la función muestreada $x_s(t)$ con el cambio de variable

$$z = \exp[Ts] \quad (8.8.5)$$

La Ecuación (8.8.5) define una transformación del plano s en el plano z . Para determinar la naturaleza de esta transformación haremos $s = \sigma + j\omega$, con lo que

$$z = \exp[\sigma T] \exp[j\omega T]$$

Como $|z| = \exp[\sigma T]$, es claro que si $\sigma < 0$, $|z| < 1$. Por lo tanto, los puntos del semiplano izquierdo del plano s se transforman en puntos del interior del círculo unidad del plano z . Análogamente, como para $\sigma > 0$ tenemos que $|z| > 1$, los puntos del semiplano derecho se transforman en puntos en el exterior del círculo unidad en el plano z . Para $\sigma = 0$, $|z| = 1$, con lo que el eje $j\omega$ del plano s se transforma en la circunferencia unidad en el plano z . El origen del plano s se transforma en el punto $z = 1$.

Finalmente, sea s_k un conjunto de puntos separados verticalmente de un punto cualquiera por múltiplos de la frecuencia de muestreo $\omega_s = 2\pi/T$. Es decir,

$$s_k = s_0 + jk\omega_s, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Entonces tenemos

$$d_k = \exp[Ts_k] = e^{T(s_0 + jk\omega_s)} = \exp[Ts_0] = z_0$$

ya que $\exp[jk\omega_s T] = \exp[j2k\pi]$. Es decir, todos los puntos s_k se transforman en el mismo punto $z_0 = \exp[Ts_0]$ en el plano z . Por lo tanto, el plano s se puede dividir en bandas horizontales de anchura ω_s . Cada una de esas bandas se transforma en el plano z completo. Por conveniencia, escogemos las bandas simétricas con respecto al eje horizontal. La Figura 8.8.1 resume y muestra la transformación entre el plano s y el plano z .

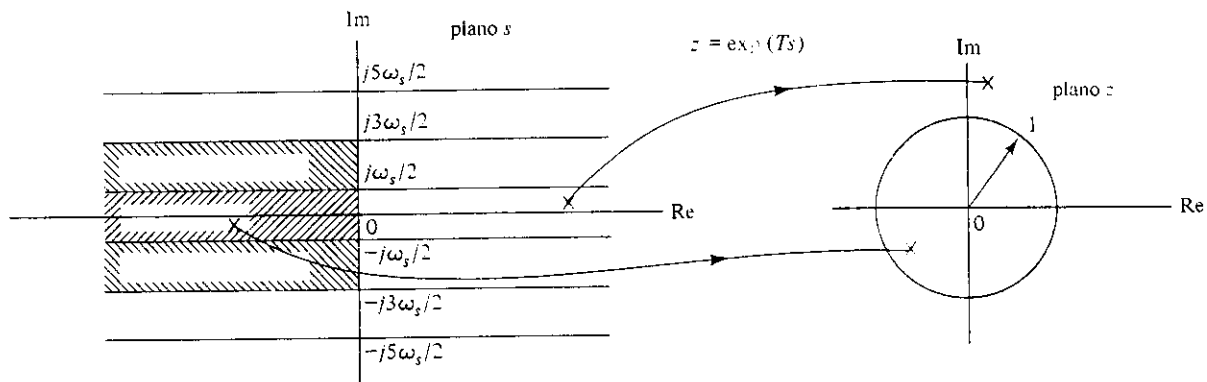


Figura 8.8.1. Transformación del plano s en el plano z mediante la transformación $z = \exp[Ts]$.

Ya hemos visto que $X_s(\omega)$ es periódica de período ω_s . Equivalentemente, $X(\Omega)$ es periódica de período 2π . Esto se ve fácilmente como consecuencia del resultado de que el proceso de muestreo esencialmente divide el plano s en un conjunto de bandas horizontales de anchura ω_s . El hecho de que la transformación de este plano en el plano z no sea única (el mismo punto en el plano z se corresponde con varios puntos del plano s) es consecuencia del hecho de que podemos asociar muchas señales analógicas con un conjunto dado de muestras.

8.9. RESUMEN

- La transformada Z es el equivalente en tiempo discreto de la transformada de Laplace.
- La transformada Z bilateral de la secuencia en tiempo discreto $x(n)$ se define así:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- La transformada Z unilateral de una señal $x(n)$ se define así:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- La región de convergencia de la transformada Z está formada por aquellos valores de z para los que la transformada converge.
- Para secuencias causales, la región de convergencia del plano z es el exterior de un círculo que contiene todos los polos de $X(z)$. Para señales anticausales, la región de convergencia es el interior de un círculo tal que todos los polos de $X(z)$ están en el exterior. Si $x(n)$ consta de parte causal y parte anticausal, la región de convergencia es una región

anular tal que los polos del exterior de esta región corresponden a la parte anticausal de $x(n)$ y los polos en el interior del anillo corresponden a la parte causal.

- La transformada Z de la secuencia anticausal $x_-(n)$ se puede determinar mediante una tabla de transformadas unilaterales:

$$X_-(z) = Z\{x_-(-n)\}$$

- Desarrollar $X(z)$ en fracciones simples e identificar la inversa de cada término mediante una tabla de transformadas Z es el método más conveniente para determinar $x(n)$. Si sólo son de interés los primeros términos de la secuencia, $x(n)$ se puede obtener desarrollando $X(z)$ en serie de potencias de z^{-1} mediante división de polinomios.
- Las propiedades de la transformada Z son similares a las de la transformada de Laplace. Entre las aplicaciones de la transformada Z podemos citar la solución de ecuaciones en diferencias y la realización de la convolución de dos secuencias discretas.
- La propiedad de desplazamiento temporal de la transformada Z se puede utilizar para resolver ecuaciones en diferencias.
- Si $y(n)$ representa la convolución de dos secuencias discretas $x(n)$ y $h(n)$, entonces

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

- La función de transferencia $H(z)$ de un sistema cuya entrada es $x(n)$, con respuesta al impulso $h(n)$ y salida $y(n)$ es

$$H(z) = Z\{h(n)\} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- Los diagramas de simulación para sistemas en tiempo discreto en el dominio z se pueden utilizar para obtener representaciones mediante variables de estado. Las soluciones de las ecuaciones de estado en el dominio z son

$$\mathbf{V}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}_0 + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(z)$$

$$Y(z) = \mathbf{c}\mathbf{V}(z) + dX(z)$$

- La función de transferencia es

$$H(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d$$

- La matriz de transición de estados se puede obtener así:

$$\Phi(n) = \mathbf{A}^n = Z^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

- La relación entre la transformada de Laplace y la transformada Z de la señal analógica muestreada $x_a(t)$ es

$$X(z)|_{z=\exp[Ts]} = X_s(s)$$

- La transformación $z = \exp[Ts]$ representa una correspondencia entre el plano s en el plano z en la que el semiplano izquierdo del plano s se transforma en el interior del círculo unidad del plano z , el eje $j\omega$ se transforma en el círculo unidad, y el semiplano derecho del plano s se transforma en el exterior del círculo unidad. La correspondencia divide el plano s en bandas horizontales de anchura ω_s . Cada una de esas bandas se transforma en el plano z completo.

8.10. LISTA DE TÉRMINOS IMPORTANTES

Correspondencia del plano s con el plano z	Región de convergencia
Desarrollo en serie de potencias	Representaciones mediante variables de estado
Descomposición en fracciones simples	Solución de ecuaciones en diferencias
Diagrama de simulación	Transformada Z bilateral
Función de transferencia	Transformada Z unilateral
Matriz de transición de estados	

8.11. PROBLEMAS

8.1. Determinar la transformada Z y la región de convergencia de las siguientes secuencias:

(a) $x(n) = (-3)^n u(-n-1)$

(b) $x(n) = \begin{cases} 1, & -5 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$

(c) $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ 3^n, & n < 0 \end{cases}$

(d) $x(n) = 2\delta(n) - 2^n u(n)$

8.2. La transformada Z de una secuencia $x(n)$ es

$$X(z) = \frac{z^3 + 4z^2 - \frac{11}{6}}{z^3 + \frac{7}{6}z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{3}}$$

- (a) Dibujar las posiciones de los polos y los ceros de $X(z)$.
 (b) Identificar los polos causales si la región de convergencia es (i) $|z| < 1/3$, (ii) $|z| > 2$.
 (c) Encontrar $x(n)$ en ambos casos.

8.3. Utilizar la definición y las propiedades de la transformada Z para calcular la transformada $X(z)$ de las siguientes secuencias causales:

(a) $x(n) = na^n \sin \Omega_0 n$

(b) $x(n) = n^2 \cos \Omega_0 n$

(c) $x(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n + (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(d) $x(n) = \delta(n-2) + nu(n)$

(e) $x(n) = 2 \exp[-n] \sin\left(\frac{2}{5} \pi n\right)$

8.4. Determinar las transformadas Z que resultan cuando las siguientes señales causales en tiempo continuo se muestrean uniformemente cada T segundos:

(a) $x(t) = t \cos 1.000\pi t$

(b) $x(t) = t \exp[-3(t-1)]$

8.5. Calcular la transformada inversa de las siguientes transformadas Z mediante: (i) desarrollo en serie de potencias y (ii) descomposición en fracciones simples. Utilizar algún paquete de software matemático para verificar la descomposición en fracciones simples. Suponer que las secuencias son causales.

(a) $X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}}$

(b) $X(z) = \frac{(z + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{4})}{(z - \frac{3}{8})(z - \frac{1}{4})}$

(c) $X(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})^3}$

(d) $\frac{z(z+2)}{z^2 + 4z + 3}$

8.6. Calcular la transformada inversa de

$$X(z) = \log(1 - \frac{1}{3} z^{-1})$$

mediante los siguientes métodos:

(a) Utilizando el desarrollo en serie de potencias

$$\log(1 - a) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i}, \quad |a| < 1$$

(b) Derivando $X(z)$ y utilizando las propiedades de la transformada Z .

8.7. Utilizando transformadas Z , calcular la convolución de las siguientes secuencias causales:

(a) $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 10 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$

(b) $h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad x(n) = \begin{cases} 2, & 0 \leq n \leq 5 \\ 1, & 6 \leq n \leq 9 \end{cases}$

(c) $h(n) = \{1, -1, 2, -1, 1\}, \quad x(n) = \{1, 0, -2, 3\}$

8.8. Calcular la respuesta al escalón de un sistema cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{z - 2}{z^2 + \frac{1}{6} z - \frac{1}{6}}$$

8.9. (a) Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias utilizando la transformada Z:

(i) $y(n) - y(n-1) + y(n-2) = x(n)$

$y(-1) = 1, y(-2) = 0, x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(ii) $y(n) - \frac{1}{6} y(n-1) - \frac{1}{6} y(n-2) = x(n) - \frac{1}{2} x(n-1)$

$y(-1) = 0, y(-2) = 0, x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

(b) Comprobar el resultado mediante algún paquete de software matemático.

8.10. Resolver la ecuación en diferencias del Problema 6.17 mediante transformada Z.

8.11. (a) Calcular las funciones de transferencia de los sistemas del Problema 6.17 y dibujar las posiciones de los polos y los ceros en el plano z .

(b) ¿Cuál es la correspondiente respuesta al impulso?

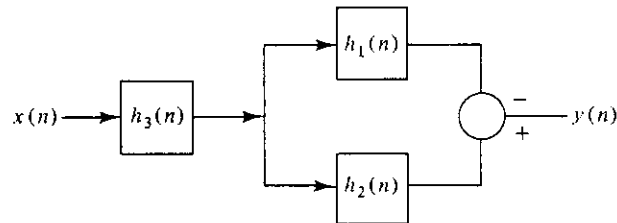
8.12. (a) Cuando se aplica la entrada $x(n) = u(n) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ a un sistema lineal causal e invariante con el tiempo, la salida es

$$y(n) = 6\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) - 6\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Calcular la función de transferencia del sistema.

(b) ¿Cuál es la representación del sistema mediante una ecuación en diferencias?

8.13. Calcular la función de transferencia del sistema



si

$$h_1(n) = (n-1)u(n)$$

$$h_2(n) = \delta(n) + nu(n-1) + \delta(n-2)$$

$$h_3(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

8.14. (a) Demostrar que un criterio simplificado para ver si el polinomio $F(z) = z^2 + a_1 z + a_2$ tiene sus raíces en el interior del círculo unidad del plano z es

$$|F(0)| < 1, \quad F(-1) > 0, \quad F(1) > 0$$

(b) Utilizar este criterio para calcular los valores de K para los que el sistema del Ejemplo 8.6.3 es estable.

- 8.15. La función de transferencia de un sistema lineal, causal e invariante con el tiempo es

$$H(z) = \frac{Kz(1 - \alpha)}{z^2 + (K - 1 - \alpha)z + (1 - K)\alpha}$$

siendo K y α constantes. Calcular el intervalo de valores de K y para los que el sistema es estable, y dibujar esta región en el plano $K - \alpha$.

- 8.16. Obtener una realización de la siguiente función de transferencia mediante la combinación de secciones de primer y segundo orden en cascada y en paralelo.

$$H(z) = \frac{(1 + 0,5z^{-1} + 0,06z^{-2})(1 + 1,7z^{-1} + 0,72z^{-2})}{(1 + 0,4z^{-1} + 0,8z^{-2})(1 - 0,25z^{-1} - 0,125z^{-2})}$$

- 8.17. (a) Calcular la matriz de transición de estados para los sistemas del Problema 6.28, utilizando transformada Z .
 (b) Utilizando la técnica en el dominio de la frecuencia, calcular la respuesta al escalón de esos sistemas suponiendo que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$.
 (c) Calcular la función de transferencia a partir de la representación mediante estados.
 (d) Verificar el resultado utilizando algún paquete de software matemático.
- 8.18. Repetir el Problema 8.17 para las ecuaciones de estado obtenidas en el Problema 6.26.
- 8.19. Una señal analógica paso bajo $x_a(t)$ con un ancho de banda de 3 KHz se muestrea con una velocidad adecuada produciéndose una secuencia en tiempo discreto $x(nT)$.
 (a) ¿Cuál es la velocidad de muestreo para evitar el solapamiento?
 (b) Para la frecuencia de muestreo determinada en el apartado (a), obtener las bandas primaria y secundaria en el plano s .
- 8.20. La señal $x_a(t) = 10 \cos 600\pi t \sin 2.400\pi t$ se muestrea con frecuencias de (i) 800 Hz (ii) 1.600 Hz y (iii) 3.200 Hz.
 (a) Dibujar las frecuencias presentes en $x_a(t)$ como polos en las posiciones adecuadas del plano s .
 (b) Determinar las frecuencias presentes en la señal muestreada para cada frecuencia de muestreo. Indicar las bandas primaria y secundaria en el plano s para cada caso, y dibujar las frecuencias de la señal muestreada como polos en las posiciones apropiadas.
 (c) A partir de los dibujos del apartado (b), ¿se puede determinar la frecuencia de muestreo para conseguir una reconstrucción sin errores de la señal analógica?
 (d) Verificar la respuesta del apartado (c) dibujando el espectro de las señales analógica y muestreada.
- 8.21. En el texto, hemos visto que el filtro de retención de orden cero es una realización del filtro de reconstrucción ideal sencilla de implementar. Sin embargo, el filtro de retención de orden cero sólo proporciona una aproximación en forma de escalera a la señal analógica. Para el filtro de retención de orden cero, la salida en el intervalo $nT \leq t < (n+1)T$ se expresa así:

$$y(t) = x_a(nT) + \frac{t - nT}{T} [x_a(nT) - x_a(nT - T)]$$

Calcular la función de transferencia $G_{h1}(s)$ de este filtro y comparar su respuesta en frecuencia con la del filtro de reconstrucción ideal adaptado al periodo de muestreo T .

- 8.22.** Como vimos en el Capítulo 4, los filtros se utilizan para modificar el contenido en frecuencia de las señales de una manera apropiada. Una técnica de diseño de filtros digitales se basa en la transformación de un filtro analógico en un filtro digital equivalente. Para hacer esto, debemos obtener una relación entre las variables de la transformada de Laplace y la transformada Z. En la Sección 8.8, presentamos esta relación basada en igualar los valores de las muestras de una señal analógica con una señal en tiempo discreto. La relación obtenida es

$$z = \exp [Ts]$$

Podemos obtener otra relación utilizando equivalencias diferentes. Por ejemplo, igualando la función de transferencia en el dominio s del operador derivada y la función de transferencia en el dominio Z de su aproximación mediante diferencias regresivas. Así, podemos escribir

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

o, equivalentemente,

$$z = \frac{1}{1 - sT}$$

Análogamente, igualando el operador integral con la aproximación trapezoidal (véase Problema 6.16) resulta

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

o

$$z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s}$$

- (a) Obtener las dos relaciones alternativas entre los planos s y z .
- (b) Discutir la transformación que se produce entre los planos s y z cuando se utilizan estas dos relaciones.

La transformada discreta de Fourier

9.1. INTRODUCCIÓN

Con la presentación realizada hasta ahora, podemos ver que las técnicas basadas en transformadas tienen un papel muy útil en el análisis de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Entre las muchas aplicaciones de estas técnicas están el análisis espectral de señales, la solución de ecuaciones diferenciales o de ecuaciones en diferencias y el análisis de sistemas en términos de respuesta en frecuencia o de función de transferencia. Con el enorme incremento del uso de hardware digital que se ha producido en los últimos años, el interés se ha centrado en las transformadas que son especialmente adecuadas para su cálculo mediante computador. En este capítulo estudiaremos una de esas transformadas, concretamente la transformada discreta de Fourier (DFT, *Discrete Fourier Transform*), que se puede ver como una extensión lógica de las transformadas de Fourier que se han presentado anteriormente.

Para motivar nuestra definición de DFT, supongamos que estamos interesados en calcular la transformada de Fourier de una señal analógica $x_a(t)$ utilizando un computador digital. Como los computadores sólo pueden almacenar y manejar un conjunto finito de números, es necesario representar $x_a(t)$ mediante un conjunto finito de valores. El primer paso para esto es muestrear la señal para obtener una secuencia discreta $x_a(n)$. Como la señal analógica puede no estar limitada en el tiempo, el paso siguiente es obtener un conjunto finito de muestras de la secuencia discreta mediante truncamiento. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que estas muestras están definidas para valores de n en el intervalo $[0, N - 1]$. Llamemos $x(n)$ a esta secuencia finita, que se puede considerar como el producto de la secuencia infinita $x_a(n)$ con una función de *ventana*

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (9.1.1)$$

con lo que

$$x(n) = x_a(n)w(n) \quad (9.1.2)$$

Como ahora tenemos una secuencia discreta, podemos calcular su transformada de Fourier en tiempo discreto

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp[-j\Omega n] \quad (9.1.3)$$

Pero todavía no tenemos una forma adecuada para el cálculo mediante un computador, ya que Ω es una variable continua que toma valores en el intervalo $[0, 2\pi]$. El paso final, por lo tanto, es evaluar $X(\Omega)$ en un conjunto discreto de valores Ω_k mediante muestreo uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$. Obtenemos entonces

$$X(\Omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp[-j\Omega_k n], \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (9.1.4)$$

donde

$$\Omega_k = \frac{2\pi}{M} k \quad (9.1.5)$$

El número de muestras en frecuencia, M , puede tomar cualquier valor. Sin embargo, podemos tomarlo de valor igual al número de muestras en el tiempo, N . Con esta modificación, y llamando $X(k)$ a $X(\Omega_k)$ finalmente tenemos

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} nk\right] \quad (9.1.6)$$

Un supuesto implícito en nuestro desarrollo es que $x(n)$ puede tener cualquier valor en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Es decir, que $x(n)$ se puede representar con precisión infinita. Sin embargo, un computador sólo puede utilizar representaciones con longitud de palabra finita. Por lo tanto *cuantificaremos* el rango dinámico de la señal con un número finito de niveles. En muchas aplicaciones, el error procedente de la representación de un número de precisión infinita mediante una palabra finita puede hacerse pequeño en comparación con los errores producidos por el muestreo. Esto se puede conseguir escogiendo los niveles de cuantificación de tamaño adecuado. Por lo tanto, supondremos que $x(n)$ puede tomar cualquier valor en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Aunque la Ecuación (9.1.6) se puede considerar como una aproximación a la transformada de Fourier en tiempo continuo de la señal $x_a(t)$, es también la definición de la transformada discreta de Fourier de la secuencia de N puntos $x(n)$. En la Sección 9.6 investigaremos la naturaleza de esta aproximación, y consideraremos la estimación espectral de señales analógicas mediante la DFT. Sin embargo, como veremos en secciones posteriores, aunque la DFT es similar a la transformada de Fourier en tiempo discreto que estudiamos en el Capítulo 7, algunas de sus propiedades son bastante diferentes.

Una de las razones para el amplio uso de la DFT y de otras transformadas discretas es la existencia de algoritmos que permiten su cómputo de manera rápida y eficiente en un computador. Para el caso de la DFT, estos algoritmos se denominan colectivamente transformadas rápidas de Fourier (FFT, *Fast Fourier Transform*). En la Sección 9.5 presentaremos dos populares versiones de FFT.

9.2. LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER Y SU INVERSA

Sea $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ una secuencia de N puntos. Definimos la transformada discreta de Fourier de $x(n)$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} nk \right] \quad (9.2.1)$$

La transformada inversa de Fourier (IDFT) es

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp \left[j \frac{2\pi}{N} nk \right] \quad (9.2.2)$$

Para obtener esta relación, sustituimos n por p en el lado derecho de la Ecuación (9.2.1) y multiplicamos por $\exp[j2\pi nk/N]$ y obtenemos

$$X(k) \exp \left[j \frac{2\pi}{N} nk \right] = \sum_{p=0}^{N-1} x(p) \exp \left[j \frac{2\pi}{N} k(n-p) \right] \quad (9.2.3)$$

Si sumamos ahora en k en el intervalo $[0, N-1]$ obtenemos

$$\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp \left[j \frac{2\pi}{N} nk \right] = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(p) \exp \left[j \frac{2\pi}{N} k(n-p) \right] \quad (9.2.4)$$

En la Ecuación (7.2.12) vimos que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp \left[j \frac{2\pi}{N} k(n-p) \right] = \begin{cases} 0, & n \neq p \\ N, & n = p \end{cases}$$

con lo que el lado derecho de la Ecuación (9.2.4) resulta ser $Nx(n)$, y resulta la Ecuación (9.2.2).

Hemos visto también que $X(\Omega)$ es periódica en Ω período 2π . Por lo tanto, $X(\Omega_k) = X(\Omega_k + 2\pi)$. Esto se puede expresar así:

$$X(k) = X(\Omega_k) = X(\Omega_k + 2\pi) = X\left(\frac{2\pi}{N}(k+N)\right) = X(k+N) \quad (9.2.5)$$

Es decir, $X(k)$ es periódica de período N .

Demostraremos ahora que $x(n)$, obtenida mediante la Ecuación (9.2.2) es también periódica de período N . De esa ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned} x(n+N) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp \left[j \frac{2\pi}{N} (n+N)k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp \left[j \frac{2\pi}{N} nk \right] \\ &= x(n) \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

Es decir, la operación IDFT produce una secuencia periódica, de la que sólo se calculan los N primeros valores, correspondientes a un período. Por lo tanto, en todas las operaciones que involucren la DFT y la IDFT se puede sustituir la secuencia finita $x(n)$ por su extensión periódica. Es de esperar por tanto que exista una conexión entre el desarrollo en serie de Fourier de secuencias periódicas en tiempo discreto que presentamos en el Capítulo 7 y la DFT. De hecho, si comparamos las Ecuaciones (9.2.1) y (9.2.2) con las Ecuaciones (7.2.15) y (7.2.16) vemos que la DFT $X(k)$ de una secuencia finita $x(n)$ se puede interpretar como el coeficiente del desarrollo en serie de Fourier de su extensión periódica $x_p(n)$, multiplicada por el período N (las dos se pueden igualar exactamente incluyendo un factor $1/N$ en la DFT en lugar de en la IDFT).

9.3. PROPIEDADES DE LA DFT

Presentaremos ahora algunas de las propiedades más importantes de la DFT. Como podría esperarse, guardan un paralelismo con las propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto. Al considerar las propiedades de la DFT, es útil recordar que en esencia, estamos sustituyendo una secuencia de N puntos por su extensión periódica. Por lo tanto, las operaciones como el desplazamiento temporal se deben considerar como operaciones sobre una secuencia periódica. Sin embargo, sólo estamos interesados en el intervalo $[0, N - 1]$, con lo que el desplazamiento se puede interpretar como un desplazamiento circular, como se explica en la Sección 6.4.

Como la DFT se calcula en frecuencias separadas $2\pi/N$ del intervalo $[0, 2\pi]$, al considerar la DFT de dos señales simultáneamente, para que tenga sentido cualquier operación las frecuencias correspondientes a la DFT deben ser las mismas. Si este no es el caso, es habitual aumentar las señales con el número de ceros apropiado para que todas las señales consideradas sean de la misma longitud (como se supone que las señales son de longitud finita, al añadir ceros no se cambia la naturaleza esencial de la señal).

9.3.1. Linealidad

Sean $X_1(k)$ y $X_2(k)$ las DFT de dos secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$. Entonces

$$\text{DFT}[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k) \quad (9.3.1)$$

para cualquier valor de las constantes a_1 y a_2 .

9.3.2. Desplazamiento temporal

Para todo número entero n_0 ,

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x(n + n_0)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n + n_0) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} kn\right] \\ &= \sum_{\langle N \rangle} x(m) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} k(m - n_0)\right] \\ &= \exp\left[j \frac{2\pi}{N} kn_0\right] X(k) \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

donde, como ya se ha comentado, el desplazamiento es un desplazamiento circular.

9.3.3. Fórmula de inversión alternativa

Si escribimos la fórmula de la IDFT, Ecuación (9.2.2), de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} nk \right] \right]^* \\ &= \frac{1}{N} \{ \text{DFT} [X^*(k)] \}^* \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

podemos interpretar $x(n)$ como el complejo conjugado de la DFT de $X^*(k)$ multiplicado por $1/N$. Por lo tanto, el mismo algoritmo que se utiliza para calcular la DFT se puede utilizar para calcular la IDFT.

9.3.4. Convolución temporal

Hemos visto en nuestra presentación de anteriores transformadas, que la transformada inversa del producto de dos transformadas corresponde a la convolución de las correspondientes funciones temporales. Con esta perspectiva, determinemos la IDFT de la función $Y(k) = H(k)X(k)$. Tenemos

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IDFT} [Y(k)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \exp \left[j \frac{2\pi}{N} nk \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)X(k) \exp \left[j \frac{2\pi}{N} nk \right] \end{aligned}$$

Utilizando la definición de $H(k)$, obtenemos

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} h(m) \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} mk \right] \right) X(k) \exp \left[j \frac{2\pi}{N} nk \right]$$

Si intercambiamos el orden de suma y utilizamos la Ecuación (9.2.2) obtenemos

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \quad (9.3.4)$$

Una comparación con la Ecuación (6.4.1) muestra que el lado derecho de la Ecuación (9.3.4) corresponde a la convolución periódica de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$.

Ejemplo 9.3.1 Consideremos la convolución periódica de las secuencias

$$h(n) = \{1, 3, -1, -2\} \quad \text{y} \quad x(n) = \{1, 2, 0, -1\}$$

Tomaremos $N = 4$, con lo que $\exp[j(2\pi/N)] = j$. Utilizando la Ecuación (9.2.1) podemos calcular las DFT de las dos secuencias:

$$H(0) = h(0) + h(1) + h(2) + h(3) = 1$$

$$H(1) = h(0) + h(1)\exp\left[-j\frac{\pi}{2}\right] + h(2)\exp[-j\pi] + h(3)\exp\left[-j\frac{3\pi}{2}\right] = 2 - j5$$

$$H(2) = h(0) + h(1)\exp[-j\pi] + h(2)\exp[-j2\pi] + h(3)\exp[-j3\pi] = -1$$

$$H(3) = h(0) + h(1)\exp\left[-j\frac{3\pi}{2}\right] + h(2)\exp[-j3\pi] + h(3)\exp\left[-j\frac{9\pi}{2}\right] = 2 + j5$$

y

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 2$$

$$X(1) = x(0) + x(1)\exp\left[-j\frac{\pi}{2}\right] + x(2)\exp[-j\pi] + x(3)\exp\left[-j\frac{3\pi}{2}\right] = 1 - 3j$$

$$X(2) = x(0) + x(1)\exp[-j\pi] + x(2)\exp[-j2\pi] + x(3)\exp[-j3\pi] = 0$$

$$X(3) = x(0) + x(1)\exp\left[-j\frac{3\pi}{2}\right] + x(2)\exp[-j3\pi] + x(3)\exp\left[-j\frac{9\pi}{2}\right] = 1 + 3j$$

con lo que

$$Y(0) = H(0)X(0) = 2$$

$$Y(1) = H(1)X(1) = -13 - j11$$

$$Y(2) = H(2)X(2) = 0$$

$$Y(3) = H(3)X(3) = -13 + j11$$

Podemos utilizar ahora la Ecuación (9.2.2) para calcular $y(n)$

$$y(0) = \frac{1}{4}[Y(0) + Y(1) + Y(2) + Y(3)] = -6$$

$$y(1) = \frac{1}{4}\left[Y(0) + Y(1)\exp\left[j\frac{\pi}{2}\right] + Y(2)\exp[j\pi] + Y(3)\exp\left[j\frac{3\pi}{2}\right]\right] = 6$$

$$y(2) = \frac{1}{4}(Y(0) + Y(1)\exp[j\pi] + Y(2)\exp[j2\pi] + Y(3)\exp[j3\pi]) = 7$$

$$y(3) = \frac{1}{4}\left[Y(0) + Y(1)\exp\left[j\frac{3\pi}{2}\right] + Y(2)\exp[j3\pi] + Y(3)\exp\left[j\frac{9\pi}{2}\right]\right] = -5$$

que es el mismo resultado que el obtenido en el ejemplo 6.4.1.

9.3.5. Relación con la transformada de Fourier en tiempo discreto y con la transformada Z

Observando la Ecuación (9.2.1), vemos que la DFT de una secuencia de N puntos $x(n)$ se puede escribir así:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp[-j\Omega n] \Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}k} \\
 &= X(\Omega) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}k}
 \end{aligned}
 \quad (9.3.5)$$

Es decir, la DFT de la secuencia $x(n)$ es la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(\Omega)$ evaluada en N puntos equiespaciados en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Dada una secuencia para la que existen tanto la transformada de Fourier en tiempo discreto como la transformada Z , aplicando la Ecuación (8.3.7) se deduce que

$$X(k) = X(z) \Big|_{z = \exp[j2\pi/N]k} \quad (9.3.6)$$

con lo que la DFT se puede ver como la transformada Z evaluada en N puntos equiespaciados de la circunferencia unidad del plano z .

9.3.6. Representación matricial de la DFT

La definición de DFT expresada en la Ecuación (9.2.1) se puede expresar de forma compacta como una operación matricial sobre el *vector de datos* $\mathbf{x} = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N-1)]^T$. Por conveniencia, denotaremos el término $\exp[-j2\pi/N]$ como W_N . Podemos escribir entonces

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9.3.7)$$

Sea $\mathbf{W}$ la matriz cuyo elemento (k, n) -ésimo $[\mathbf{W}]_{kn}$ es igual a W_N^{kn} . Es decir,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdot & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdot & W_N^{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdot & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (9.3.8)$$

Se deduce entonces que el *vector transformado* $\mathbf{X} = [X(0)X(1)\dots X(N-1)]^T$ se puede obtener así:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x} \quad (9.3.9)$$

La matriz $\mathbf{W}$ se denomina generalmente matriz de la DFT. Claramente, $[\mathbf{W}]_{kn} = [\mathbf{W}]_{nk}$, por lo que $\mathbf{W}$ es simétrica ($\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$).

Utilizando la Ecuación (9.2.2) podemos escribir

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad (9.3.10)$$

Como $W_N^{-1} = W_N^*$, donde $*$ representa el complejo conjugado, se deduce que la relación que define la IDFT se puede expresar también en forma matricial

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \mathbf{X} \quad (9.3.11)$$

Despejando $\mathbf{x}$ en la Ecuación (9.3.9) obtenemos

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X} \quad (9.3.12)$$

Por lo tanto, se deduce que

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \quad (9.3.13)$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{W}^* \mathbf{W} = N \mathbf{I}_N \quad (9.3.14)$$

donde $\mathbf{I}_N$ es la matriz identidad de dimensión $N \times N$. Como $\mathbf{W}$ es una matriz simétrica, la Ecuación (9.3.14) se puede escribir así:

$$\mathbf{W}^{*T} \mathbf{W} = N \mathbf{I}_N \quad (9.3.15)$$

En general, una matriz $\mathbf{A}$ que satisface la relación $\mathbf{A}^{*T} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ se denomina *matriz unitaria*. Una matriz real $\mathbf{A}$ que satisface la relación $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ se denomina *matriz ortogonal*. La matriz $\mathbf{W}$, tal como se ha definido en la Ecuación (9.3.8) no es estrictamente una matriz unitaria, como puede verse en la Ecuación (9.3.15). Sin embargo, como se apuntó en la Sección 9.2, el factor $1/N$ se puede utilizar tanto en la expresión de la DFT como en la de la IDFT. Por lo tanto, si asociamos un factor de $1/\sqrt{N}$ en las dos relaciones de la DFT y la IDFT y hacemos $W_N = 1/\sqrt{N} \exp[-j2\pi/N]$ en la definición de la matriz $\mathbf{W}$ de la Ecuación (9.3.8), se deduce que

$$\mathbf{X} = \mathbf{W} \mathbf{x} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \mathbf{W}^* \mathbf{X} \quad (9.3.16)$$

siendo $\mathbf{W}$ una matriz unitaria. La DFT es por tanto una *transformación unitaria*. Sin embargo, a menudo se la denomina simplemente como una *transformación ortogonal*.

Existen otras transformadas ortogonales de utilidad que se pueden definir sustituyendo la matriz de la DFT en la Ecuación (9.3.8) por otras matrices unitarias u ortogonales. Por ejemplo, podemos citar la transformada de Walsh-Hadamard y la transformada discreta del coseno, que tienen aplicaciones en áreas como el tratamiento de voz y de imagen. Como en el caso de la DFT, la utilidad de estas transformadas surge de la existencia de algoritmos rápidos y eficientes para su cómputo.

9.4. CONVOLUCIÓN LINEAL MEDIANTE LA DFT

Hemos visto que uno de los principales usos de las transformadas es el análisis de sistemas lineales invariantes con el tiempo. Dado un sistema lineal invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es $h(n)$, la salida para una entrada $x(n)$ es la convolución *lineal* de las dos secuencias. Sin embargo, el producto $H(k)X(k)$ de las dos DFT corresponde a la convolución *periódica* de $x(n)$ y $h(n)$. Una pregunta que surge naturalmente es si se puede utilizar la DFT para realizar una convolución lineal. Para responder a esta pregunta, supongamos que las secuencias $h(n)$ y $x(n)$ son de longitud M y N , respectivamente, por lo que $h(n)$ es cero fuera del intervalo $[0, M-1]$ y $x(n)$ es cero fuera del intervalo $[0, N-1]$. Supondremos también que $M < N$.

Recordemos que el Capítulo 6 definimos la convolución periódica de dos secuencias de igual longitud como la convolución de sus extensiones periódicas. Para las dos secuencias $x(n)$ y $h(n)$ que estamos considerando aquí, podemos aumentar ambas con ceros hasta la

longitud $K \geq \text{Max}(M, N)$, y formar las secuencias extendidas $h_a(n)$ y $x_a(n)$ respectivamente. Podemos definir ahora la convolución periódica de K puntos, $y_p(n)$, de las secuencias como la convolución de sus extensiones periódicas. Nótese que mientras que $y_p(n)$ es una secuencia de K puntos, la convolución lineal de las secuencias $h(n)$ y $x(n)$, $y_l(n)$, tiene una longitud $L = M + N - 1$.

Como muestra el ejemplo 6.4.2, para $K \leq L$, $y_p(n)$ corresponde a la secuencia que se obtiene sumando, o *solapando en el tiempo*, los últimos $L - K$ valores de $y_l(n)$ con los primeros $L - K$ puntos. Por lo tanto, los primeros $L - K$ puntos de $y_p(n)$ no se corresponden con los de $y_l(n)$, mientras que los restantes $2K - L$ puntos serán los mismos en ambas secuencias. Claramente, si hacemos $K = L$, $y_p(n)$ e $y_l(n)$ serán idénticas.

La mayor parte de las rutinas disponibles para el cálculo eficiente de la DFT suponen que la longitud de la secuencia es una potencia de 2. En ese caso, K se elige como la mínima potencia de 2 que es mayor que L . Si $K > L$, los primeros L puntos de $y_p(n)$ serán idénticos a los de $y_l(n)$, y los $K - L$ valores restantes serán cero.

Demostraremos ahora que la convolución periódica de K puntos de $h(n)$ y $x(n)$ coincide con la convolución lineal de las dos funciones cuando $K = L$. Si tenemos en cuenta que

$$y_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \quad (9.4.1)$$

y que $h(m)$ vale cero para $m \in [0, M-1]$, y que $x(n-m)$ es cero para $(n-m) \in [0, N-1]$, resulta que

$$0 \leq n \leq M-1:$$

$$\begin{aligned} y_l(n) &= \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m) \\ &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(n)x(0) \end{aligned}$$

$$M \leq n \leq N-1:$$

$$\begin{aligned} y_l(n) &= \sum_{m=n-M+1}^n h(m)x(n-m) \\ &= h(n-M+1)x(M-1) + h(n-M+2)x(M-2) \\ &\quad + \dots + h(n)x(0) \end{aligned}$$

$$N \leq n \leq M+N-2:$$

$$\begin{aligned} y_l(n) &= \sum_{m=n-M+1}^{N-1} h(m)x(n-m) \\ &= h(n-M+1)x(M-1) \\ &\quad + \dots + h(N-1)x(n-N+1) \end{aligned} \quad (9.4.2)$$

Por otra parte,

$$y_p(n) = \sum_{m=0}^{K-1} h_a(m)x_a(n-m) \quad (9.4.3)$$

Como la secuencia $x_a(n-m)$ se obtiene mediante el desplazamiento circular de $x_a(n)$, se deduce que

$$x_a(n-m) = \begin{cases} x_a(n-m), & m \leq n \\ x_a(n-m+K), & n+1 \leq m \leq K-1 \end{cases} \quad (9.4.4)$$

con lo que

$$y_p(n) = h_a(0)x_a(n) + \dots + h_a(n)x_a(0) + h_a(n+1)x_a(K-1) + h_a(n+2)x_a(K-2) + \dots + h_a(K-1)x_a(n+1) \quad (9.4.5)$$

Si utilizamos ahora el hecho de que

$$h_a(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad x_a(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (9.4.6)$$

podemos comprobar fácilmente que $y_p(n)$ coincide con $y_i(n)$ en el intervalo $0 \leq n \leq N+M-2$ y que vale cero en el intervalo $N+M-1 \leq n \leq K-1$.

En resumen, para realizar la convolución lineal de una secuencia $h(n)$ de M puntos con otra secuencia $x(n)$ de N puntos mediante la DFT, se expanden ambas secuencias con ceros hasta formar dos secuencias de K puntos, $h_a(n)$ y $x_a(n)$, con $K \geq M+N-1$. Calculamos el producto de las correspondientes DFT, $H_a(k)$ y $X_a(k)$, y obtenemos su IDFT

$$y_i(n) = \text{IDFT}[H_a(k)X_a(k)] \quad (9.4.7)$$

9.5. TRANSFORMADAS RÁPIDAS DE FOURIER

Como indicamos anteriormente, una de las principales razones de la popularidad de la DFT es la existencia de algoritmos eficientes para su cálculo. Recordemos que la DFT de la secuencia $x(n)$ se obtiene mediante la expresión

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} nk \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (9.5.1)$$

Por conveniencia, llamaremos W_N al término $\exp[-j2\pi/N]$, con lo que

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (9.5.2)$$

que se puede desarrollar explícitamente así:

$$X(k) = x(0)W_N^0 + x(1)W_N^k + x(2)W_N^{2k} + \dots + x(N-1)W_N^{(N-1)k} \quad (9.5.3)$$

De la Ecuación (9.5.3) se deduce que la determinación de cada valor de $X(k)$ requiere N multiplicaciones complejas y N sumas complejas, donde hemos incluido en la cuenta las multiplicaciones triviales por los factores ± 1 y $\pm j$, para poder disponer de un método simple de comparación de la complejidad computacional de los diferentes algoritmos. Como tenemos que evaluar $X(k)$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$, la determinación directa de la DFT requiere N^2 multiplicaciones complejas y N^2 sumas complejas, lo que puede resultar prohibitivo para valores altos de N . Por lo tanto, los procedimientos para reducir la carga computacional son de considerable interés. Estos procedimientos se denominan algorit-

mos de transformada rápida de Fourier (FFT, *Fast Fourier Transform*). La idea básica de todos ellos es dividir la secuencia dada en subsecuencias de menor longitud, y combinar después adecuadamente las DFT para obtener la DFT de la secuencia original.

En esta sección, obtendremos dos versiones del algoritmo FFT suponiendo que la longitud de los datos, N , es una potencia de 2. Es decir, que N es de la forma $N = 2^P$, siendo P un entero positivo. Por tanto, $N = 2, 4, 8, 16, 32$, etc. Por eso estos algoritmos se denominan de base 2.

9.5.1. Algoritmo de diezmado en el tiempo

En el algoritmo de diezmado en el tiempo, $x(n)$ se divide en dos subsecuencias, cada una de ellas de longitud $N/2$, agrupando las muestras de índice par y las muestras de índice impar. $X(k)$ en la Ecuación (9.5.3) se puede escribir así

$$X(k) = \sum_{n \text{ par}} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n \text{ impar}} x(n)W_N^{nk} \quad (9.5.4)$$

Haciendo $n = 2r$ en la primera suma y $n = 2r + 1$ en la segunda, podemos escribir

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} g(r)W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} h(r)W_N^{2rk} \end{aligned} \quad (9.5.5)$$

donde $g(r) = x(2r)$ y $h(r) = x(2r+1)$.

Nótese que la DFT de una secuencia de $N/2$ puntos, $y(n)$, se calcula mediante la expresión

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} y(n)W_{N/2}^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} y(n)W_N^{2nk} \end{aligned} \quad (9.5.6)$$

donde el último paso se deduce de la relación

$$W_{N/2} = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N/2}\right] = \left(\exp\left[-j \frac{2\pi}{N}\right]\right)^2 = W_N^2 \quad (9.5.7)$$

Así, la Ecuación (9.5.5) se puede escribir

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9.5.8)$$

siendo $G(k)$ y $H(k)$ las DFT de $N/2$ puntos de las secuencias $g(r)$ y $h(r)$, respectivamente. Como $G(k)$ y $H(k)$ son periódicas de período $N/2$, la Ecuación (9.5.8) se puede expresar

$$\begin{aligned} X(k) &= G(k) + W_N^k H(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= G(k) + W_N^{k+N/2} H(k) \end{aligned} \quad (9.5.9)$$

Los pasos para determinar $X(k)$ se pueden ilustrar dibujando un *diagrama de flujo de señal* correspondiente a la Ecuación (9.5.9). En este diagrama asociaremos un *nodo* a cada señal. Las interrelaciones entre los nodos se indican dibujando apropiadamente líneas (ramas) con flechas que apuntan en la dirección del flujo de señal. Por lo tanto, en cada rama hay una señal de entrada y una señal de salida. Asociaremos un peso a cada rama que determina la transmisión entre las señales de entrada y de salida. Cuando no se indique en el diagrama, el peso en cada rama se supondrá que vale 1. La señal en cada nodo es la suma de las salidas de todas las ramas que entran en el nodo. La Figura 9.5.1 ilustra estos conceptos y muestra el diagrama de flujo de señal para los cálculos involucrados en la Ecuación (9.5.9) para un valor concreto de k . La Figura 9.5.2 muestra el diagrama de flujo de señal para el cálculo de $X(k)$ para una secuencia de ocho puntos. Como se puede ver en el diagrama, para determinar $X(k)$ se calculan primero las dos DFT de cuatro puntos $G(k)$ y $H(k)$ de las secuencias $g(r) = \{x(0), x(2), x(4), x(6)\}$ y $h(r) = \{x(1), x(3), x(5), x(7)\}$ y se combinan de forma adecuada.

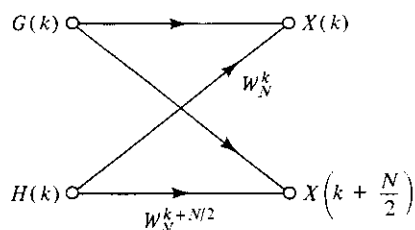


Figura 9.5.1. Diagrama de flujo de señal para la Ecuación (9.5.9).

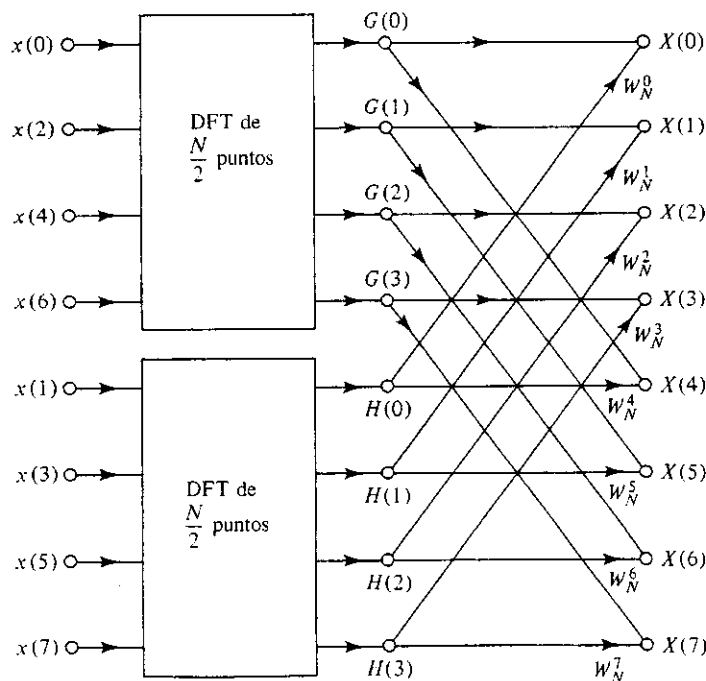


Figura 9.5.2. Diagrama de flujo de la primera etapa del algoritmo de diezrado en el tiempo para $N = 8$.

Podemos determinar el número de operaciones necesarias para calcular $X(k)$ utilizando este procedimiento. Cada una de las DFT requiere $(N/2)^2$ multiplicaciones complejas y $(N/2)^2$ sumas complejas. La combinación de las dos DFT requiere N multiplicaciones complejas y N sumas complejas. Por tanto, el cálculo de $X(k)$ mediante la Ecuación (9.5.8) requiere $N + N^2/2$ sumas y multiplicaciones complejas, que se puede comparar con N^2 multiplicaciones y sumas complejas necesarias para el cálculo directo.

Como $N/2$ es también un número par, podemos considerar utilizar el mismo procedimiento para determinar las DFT de $N/2$, $G(k)$ y $H(k)$ calculando primero las DFT de $N/4$ puntos de las secuencias escogidas apropiadamente y combinándolas posteriormente. Para $N = 8$, esto implica dividir la secuencia $g(r)$ en dos subsecuencias $\{x(0), x(4)\}$ y $\{x(2), x(6)\}$, y la secuencia $h(r)$ en las subsecuencias $\{x(1), x(5)\}$ y $\{x(3), x(7)\}$. La Figura 9.5.3 muestra los cálculos resultantes para obtener $G(k)$ y $H(k)$.

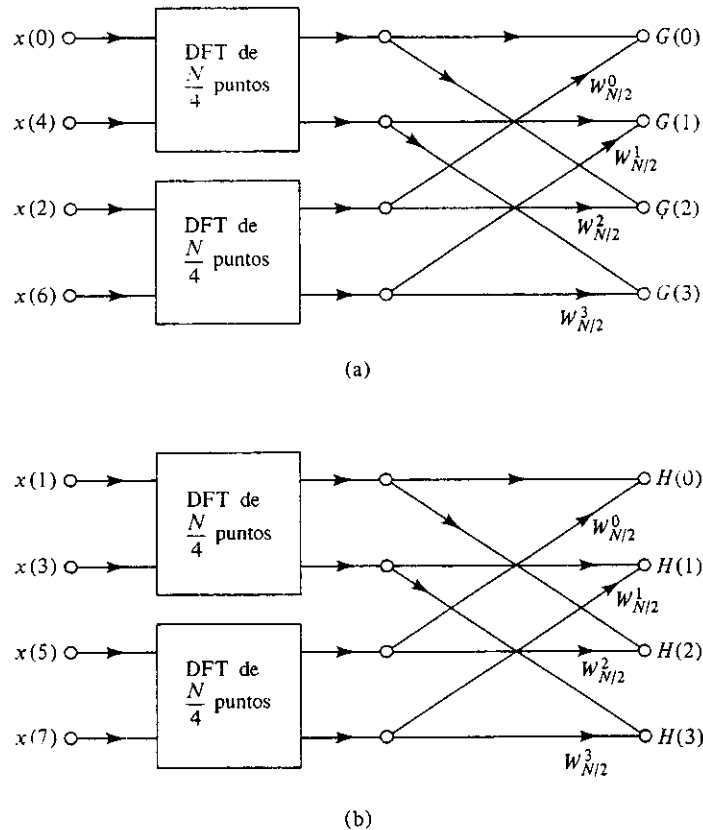


Figura 9.5.3. Diagrama de flujo para el cálculo de la DFT de cuatro puntos.

Claramente, este procedimiento se puede continuar subdividiendo sucesivamente las subsecuencias hasta que se obtengan conjuntos de dos puntos. La Figura 9.5.4 muestra el cálculo de la DFT de una secuencia de dos puntos $y(n) = \{y(0), y(1)\}$. El diagrama de flujo completo para el cálculo de una DFT de ocho puntos se muestra en la Figura 9.5.5.

Un cuidadoso examen del diagrama de flujo de la última figura permite hacer varias observaciones. En primer lugar, el número de etapas del diagrama es 3, que es igual a $\log_2 8$. En general, el número de etapas es igual a $\log_2 N$. En segundo lugar, cada etapa del

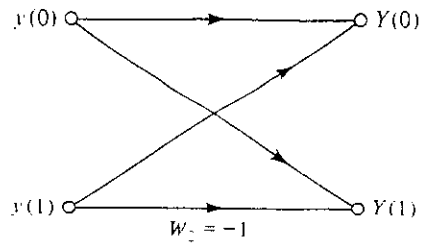


Figura 9.5.4. Diagrama de flujo para el cálculo de una DFT de dos puntos.

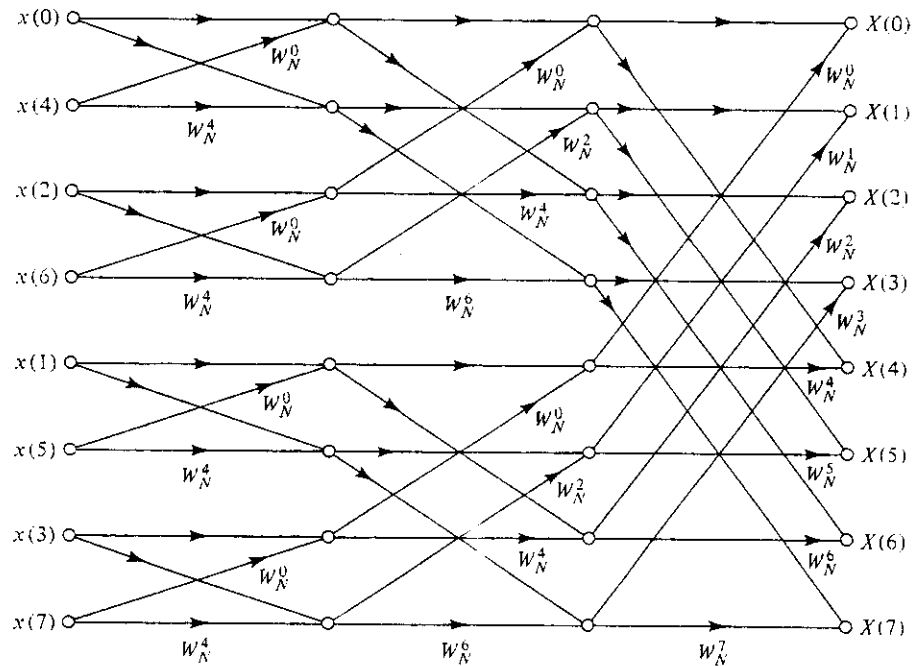


Figura 9.5.5. Diagrama de flujo completo para el cálculo de la DFT para $N = 8$.

proceso requiere ocho multiplicaciones y sumas complejas. Para un valor cualquiera de N , son necesarias N multiplicaciones y sumas complejas, con lo que el número de operaciones total es de $N \log_2 N$.

El ordenamiento de la entrada al diagrama de flujo, que es 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7 se determina mediante *inversión de bits* a partir de los números naturales 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Para obtener el orden resultante de la inversión de bits, se invierte el orden de los bits de la representación binaria de los números en su orden natural y se obtienen sus equivalentes en decimal, como muestra la Tabla 9.1.

Finalmente, el procedimiento permite el *cálculo con sustitución*, es decir, los resultados de cualquier etapa se pueden almacenar en las mismas posiciones que la entrada a dicha etapa. Para ilustrar esta idea, consideremos el cálculo de $X(0)$ y $X(4)$. Ambos cálculos requieren disponer como entrada de las cantidades $G(0)$ y $H(0)$. Como $G(0)$ y $H(0)$ no son necesarios para calcular ningún otro valor de $X(k)$, una vez se han determinado $X(0)$ y $X(4)$, se pueden almacenar en las posiciones asignadas a $G(0)$ y $H(0)$. Similarmente, las posiciones de $G(1)$ y $H(1)$ se pueden utilizar para almacenar $X(1)$ y $X(5)$, y así sucesivamente. Por tanto, sólo son necesarias $2N$ posiciones de almacenamiento para realizar el cálculo completo.

Tabla 9.1. Orden de inversión de bits para $N = 8$

Número decimal	Representación binaria	Representación en orden de inversión de bits	Equivalente en decimal
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

9.5.2. Algoritmo de diezmado en frecuencia

El algoritmo de diezmado en frecuencia se obtiene esencialmente dividiendo la secuencia de salida $X(k)$ en subsecuencias menores, en lugar de dividir la secuencia de entrada $x(n)$. Para obtener este algoritmo, agruparemos los primeros $N/2$ puntos y los últimos $N/2$ puntos de la secuencia de entrada $x(n)$. Podemos escribir

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)W_N^{nk} + W_N^{N/2k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right)W_N^{nk} \quad (9.5.10)
 \end{aligned}$$

Una comparación con la Ecuación (9.5.6) muestra que aunque las dos sumas del lado derecho de la Ecuación (9.5.10) se realizan sobre $N/2$ valores de n , no representan una DFT. Se pueden combinar los dos términos de la Ecuación (9.5.10) si tenemos en cuenta que $W_N^{Nk/2} = (-1)^k$, con lo que se obtiene

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nk} \quad (9.5.11)$$

Sea

$$g(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)$$

y

$$h(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \quad (9.5.12)$$

con $0 \leq n \leq (N/2) - 1$.

Si k es par, se puede hacer $k = 2r$ y escribir la Ecuación (9.5.11) de la siguiente forma

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(n)W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(n)W_{N/2}^{rn} \quad (9.5.13)$$

Similarmente, haciendo $k = 2r + 1$ se obtiene la expresión para valores impares de k .

$$X(2r + 1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} h(n)W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} h(n)W_{N/2}^{rn} \quad (9.5.14)$$

Las Ecuaciones (9.5.13) y (9.5.14) representan las DFT de $N/2$ puntos de las secuencias $G(k)$ y $H(k)$, respectivamente. Por tanto, el cálculo de $X(k)$ requiere formar primero las secuencias $g(n)$ y $h(n)$ y calcular después sus DFT para obtener los valores pares e impares de $X(k)$. La Figura 9.5.6 muestra el caso de $N = 8$. En dicha figura, podemos ver que $G(0) = X(0)$, $G(1) = X(2)$, $G(2) = X(4)$, $G(3) = X(6)$, $H(0) = X(1)$, $H(1) = X(3)$, $H(2) = X(5)$ y $H(3) = X(7)$.

Podemos proceder para determinar las dos DFT de $N/2$ puntos $G(k)$ y $H(k)$ calculando por separado los valores pares e impares utilizando un procedimiento similar. Es decir, formamos las secuencias

$$\begin{aligned} g_1(n) &= g(n) + g\left(n + \frac{N}{4}\right) \\ g_2(n) &= \left[g(n) - g\left(n + \frac{N}{4}\right) \right] W_{N/2}^n \end{aligned} \quad (9.5.15)$$

y

$$\begin{aligned} h_1(n) &= h(n) + h\left(n + \frac{N}{4}\right) \\ h_2(n) &= \left[h(n) - h\left(n + \frac{N}{4}\right) \right] W_{N/2}^n \end{aligned} \quad (9.5.16)$$

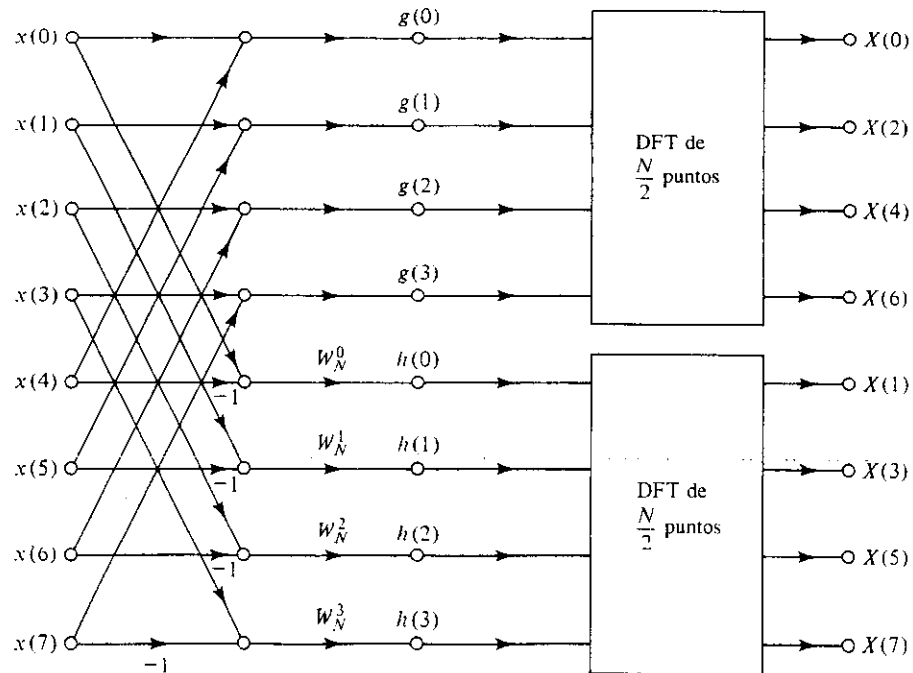


Figura 9.5.6. Primera etapa del diagrama de diezmo en frecuencia.

Entonces las DFT de $N/4$ puntos, $G_1(k)$, $G_2(k)$ y $H_1(k)$, $H_2(k)$ corresponden a los valores pares e impares de $G(k)$ y $H(k)$, respectivamente, como muestra la Figura 9.5.7 para $N = 8$.

Podemos continuar este procedimiento hasta que tengamos un conjunto de secuencias de dos puntos que, como puede verse en la Figura 9.5.4, se realizan sumando y restando los valores de las entradas. La Figura 9.5.8 muestra el diagrama de flujo completo para el cálculo de una DFT de 8 puntos. Como se puede ver en la figura, la entrada en este caso está en su orden natural, y la salida en el orden correspondiente a la inversión de bits. Sin embargo, las otras observaciones realizadas en referencia al algoritmo de diezmo en el tiempo, como el número de operaciones y la sustitución de variables en los pasos intermedios aplican también en el algoritmo de diezmo en frecuencia. Se puede modificar el diagrama de flujo de señal de la Figura 9.5.7 para obtener un algoritmo de diezmo en frecuencia en el que la entrada está en el orden correspondiente a la inversión de bits y la salida en orden natural. Podemos obtener también un algoritmo de diezmo en el tiempo en el que la entrada esté en orden natural. En ambos casos, se pueden modificar los diagramas para obtener un algoritmo en el que la entrada y la salida estén en orden natural. Pero en este caso no se mantiene la propiedad del algoritmo por la que se pueden ir sobrescribiendo los valores intermedios. Finalmente, como se indicó anteriormente [véase Ecuación (9.3.3)], el algoritmo FFT se puede utilizar para calcular la IDFT de una forma eficiente.

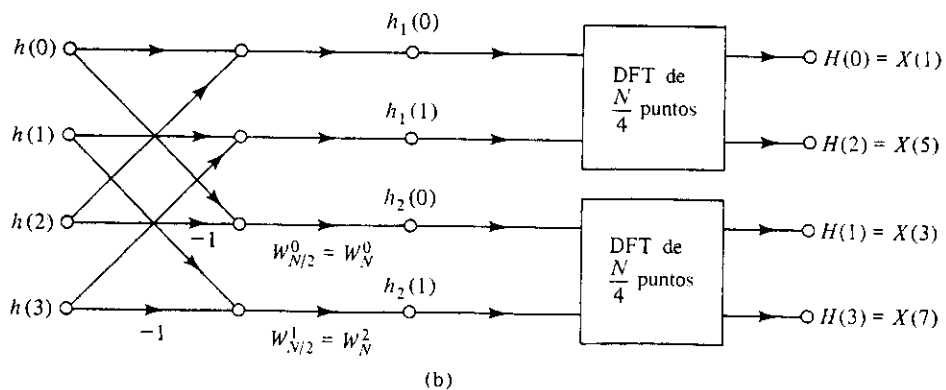
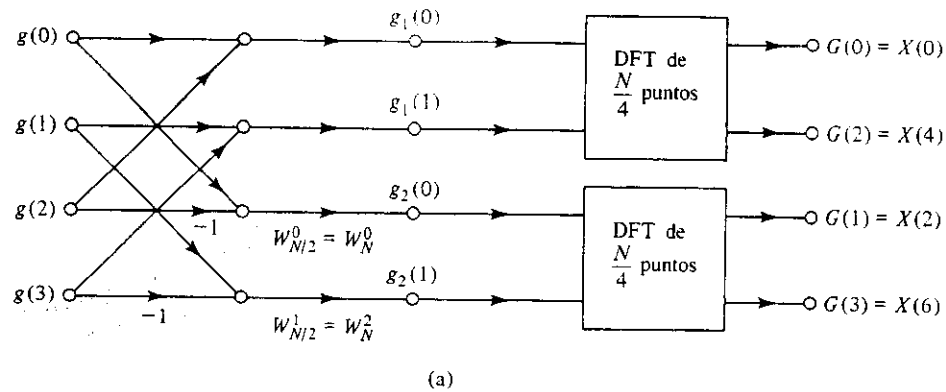


Figura 9.5.7. Diagrama de flujo de las DFT de $N/4$ puntos de $G(k)$ y $H(k)$, $N = 8$.

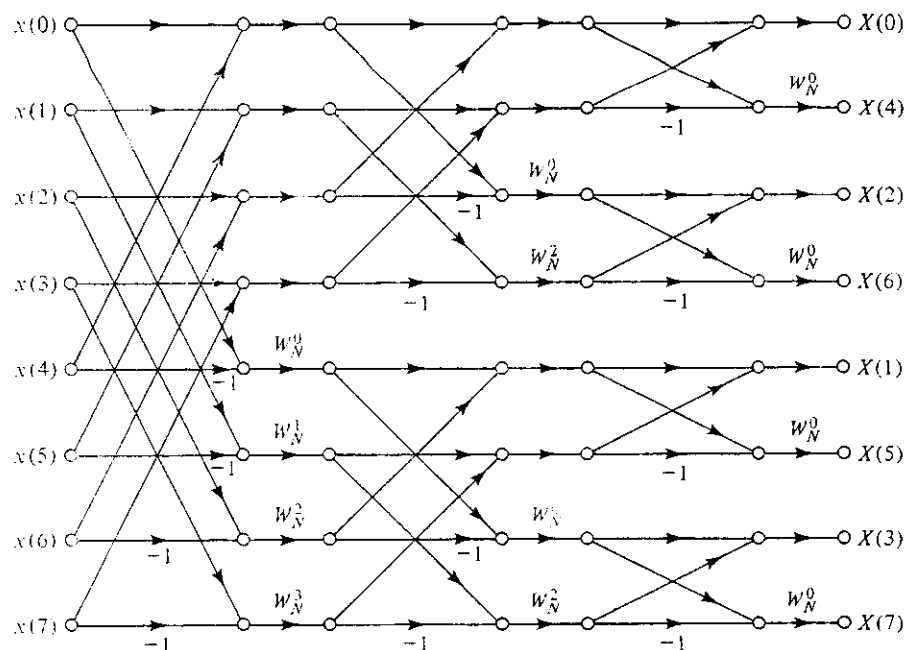


Figura 9.5.8. Diagrama de flujo completo para el algoritmo de decimado en frecuencia $N = 8$.

9.6. ESTIMACIÓN ESPECTRAL DE SEÑALES ANALÓGICAS MEDIANTE LA DFT

La DFT representa una transformación al dominio de la frecuencia de una señal temporal $x(n)$ de longitud finita y es similar a otras transformaciones en el dominio de la frecuencia que ya hemos presentado, con algunas diferencias significativas. Sin embargo, como hemos visto, para señales analógicas $x_a(t)$, la DFT se puede considerar como una aproximación a la transformada de Fourier en tiempo continuo $X_a(\omega)$. Por tanto es de interés estudiar la precisión de la aproximación de la DFT al verdadero espectro de la señal.

Como se indicó anteriormente, el primer paso en la obtención de la DFT de la señal $x_a(t)$ es convertirla en una señal en tiempo discreto $x_s(t)$ mediante muestreo uniforme. El proceso de muestreo, como vimos, se puede modelar multiplicando la señal $x_a(t)$ por el tren de impulsos

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

con lo que tenemos

$$x_s(t) = x_a(t)p_T(t) \quad (9.6.1)$$

La correspondiente transformada de Fourier se obtiene aplicando la Ecuación (7.5.12):

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\omega + n\omega_s) \quad (9.6.2)$$

Estos pasos y los demás necesarios para la obtención de la DFT de la señal $x_a(t)$, se ilustran en la Figura 9.6.1. Las figuras de la izquierda corresponden a las funciones en el dominio del tiempo, y las de la derecha corresponden a sus transformadas de Fourier. La Figura 9.6.1(a) muestra una señal analógica típica que se multiplica por el tren de impulsos que se muestra en la Figura 9.6.1(b) resultando la señal muestreada de la Figura 9.6.1(c). La transformada de Fourier del tren de impulsos $p_T(t)$, que se muestra también en la Figura 9.6.1(b), es un tren de impulsos de peso $1/T$ en el dominio de la frecuencia, y la separación entre impulsos es de ω_s . El espectro de la señal muestreada es la convolución de las funciones en el dominio transformado que se muestran en las Figuras 9.6.1(a) y 9.6.1(b), y es por tanto una versión solapada del espectro de la señal analógica, como se muestra en la Figura 9.6.1(c). Por tanto, el espectro de la señal muestreada es la repetición periódica, con período ω_s , del espectro de la señal analógica $x_a(t)$.

Si la señal $x_a(t)$ es de banda limitada, podemos evitar los errores de solapamiento muestreando a una frecuencia superior a la de Nyquist. Si la señal no es de banda limitada, los efectos del solapamiento no se pueden evitar, pero se pueden minimizar escogiendo la máxima frecuencia de muestreo posible. En muchas aplicaciones, es habitual filtrar paso bajo la señal analógica previamente al muestreo para minimizar los errores de solapamiento.

El segundo paso del procedimiento es truncar la señal muestreada multiplicándola por una función de ventana $w(t)$. La longitud de la ventana de datos T_0 se relaciona con el número de puntos de datos N y el intervalo de muestreo T mediante la expresión

$$T_0 = NT \quad (9.6.3)$$

La Figura 9.6.1(d) muestra la función ventana rectangular

$$w_R(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \leq t < T_0 - \frac{T}{2} \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (9.6.4)$$

El desplazamiento de $T/2$ desde el origen se introduce para evitar tener muestras de datos en los puntos de discontinuidad de la ventana. La transformada de Fourier es

$$W_R(\omega) = T_0 \frac{\sin \omega T_0/2}{\omega T_0/2} \exp \left[-\frac{j\omega(T_0 - T)}{2} \right] \quad (9.6.5)$$

y la Figura 9.6.1(e) muestra la función muestreada ya truncada. La correspondiente transformada de Fourier se obtiene mediante la convolución de las dos transformadas $X_s(\omega)$ y $W_R(\omega)$. El efecto de esta convolución es introducir un rizado en el espectro.

El paso final es muestrear el espectro en puntos equiespaciados en el dominio de la frecuencia. Como el número de puntos en frecuencia en el intervalo $0 \leq \omega < \omega_s$ es igual al número de puntos de datos, N , el espaciado entre las muestras de frecuencia es ω_s/N , o equivalentemente, $2\pi/T_0$, como se puede ver utilizando la Ecuación (9.6.3). Como hemos supuesto que la señal muestreada en el dominio del tiempo se puede modelar como la modulación (multiplicación) de la señal analógica $x_a(t)$ por el tren de impulsos $p_T(t)$, la operación de muestreo en el dominio de la frecuencia se puede modelar como producto de la transformada $X_s(\omega) * W_R(\omega)$ por el tren de impulsos en el dominio de la frecuencia:

$$p_{r_a}(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - m \frac{2\pi}{T_0} \right) \quad (9.6.6)$$

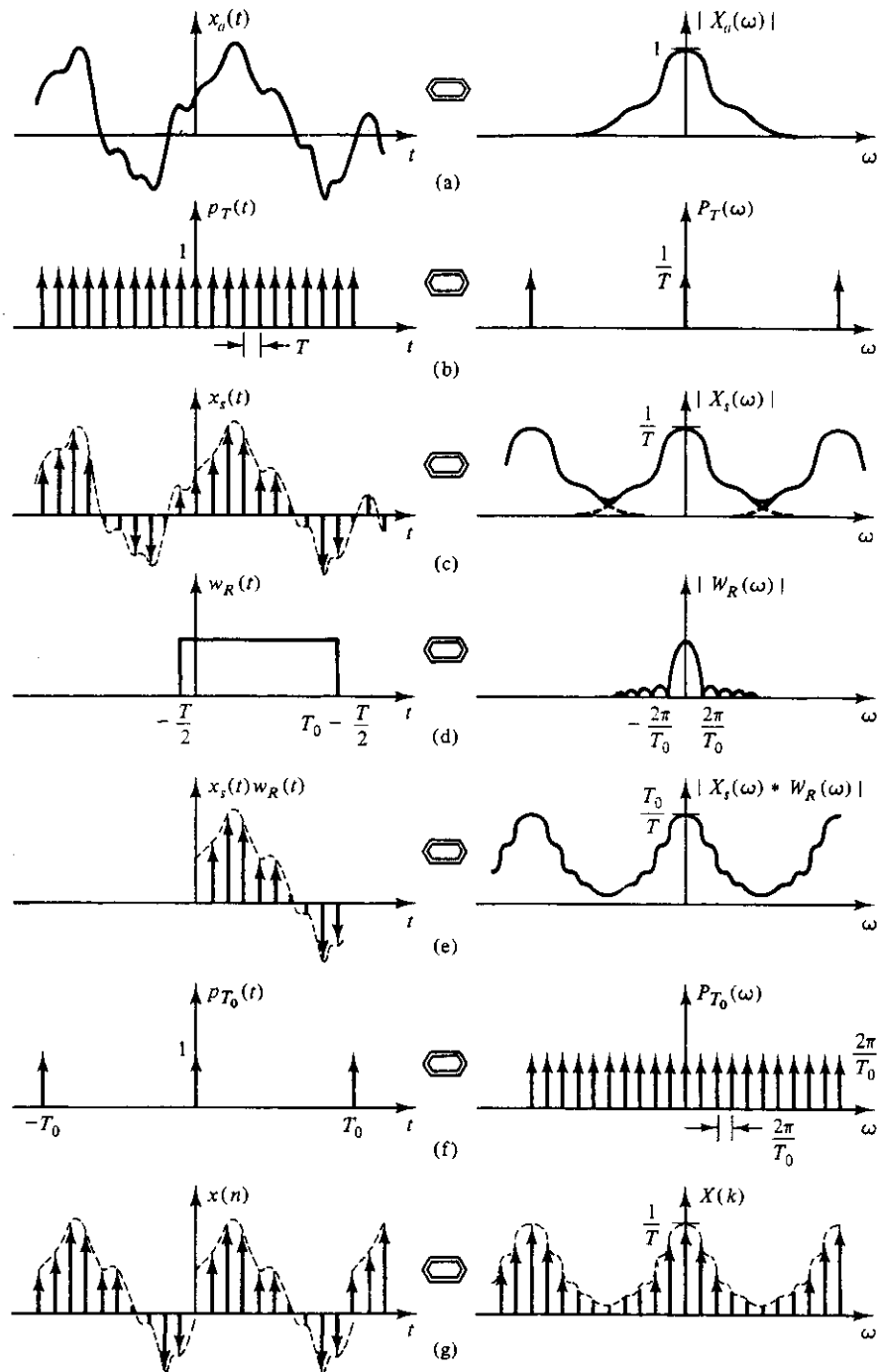


Figura 9.6.1. Transformada discreta de Fourier de una señal analógica (Adaptada con permiso de E. Oran Bringham, *The Fourier Transform*, Prentice-Hall, 1987).

Nótese que la transformada inversa de $p_{T_0}(\omega)$ es también un tren de impulsos, como se muestra en la Figura 9.6.1(f):

$$p_{T_0}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0) \quad (9.6.7)$$

Como la multiplicación en el dominio del tiempo corresponde a la convolución en el dominio de la frecuencia, la operación de muestreo en el dominio de la frecuencia produce la convolución de la señal $x_s(t)w_R(t)$ con el tren de impulsos $p_{T_0}(t)$. El resultado, como muestra la Figura 9.6.1(g) es la extensión periódica de la señal $x_s(t)w_R(t)$ con período T_0 . Este resultado se deduce también de la simetría entre las operaciones en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, de donde se puede esperar que el muestreo en el dominio de la frecuencia cause solapamiento en el dominio del tiempo. También se puede ver como una reformulación de nuestra anterior conclusión de que en operaciones que involucran la DFT, la secuencia original resulta sustituida por su extensión periódica.

Como ilustra la Figura 9.6.1, para una señal analógica general $x_a(t)$, el espectro que se obtiene mediante la DFT es algo diferente del verdadero espectro $X_s(\omega)$. El proceso de determinar la DFT de $x_a(t)$ introduce dos fuentes principales de error: la primera, por supuesto, es el error de solapamiento producido por el muestreo. Como se comentó anteriormente, los errores de solapamiento se pueden reducir incrementando la frecuencia de muestreo o filtrando previamente la señal para eliminar las componentes de alta frecuencia.

La segunda fuente de error es la operación de enventanado, que es equivalente a convolucionar el espectro de la señal muestreada con la transformada de Fourier de la ventana. Desafortunadamente, esto introduce rizados en el espectro debido a que la operación de convolución causa que las componentes de la señal en $x_s(t)$ a cualquier frecuencia se expandan o se produzcan fugas en otras frecuencias. Para que no haya fugas, la transformada de Fourier de la función de ventana debería ser una delta. Esto corresponde a una ventana que es constante todo el tiempo, es decir, que no se realiza enventanado. Por lo tanto, el enventanado causa inevitablemente fugas. Podemos intentar minimizar las fugas escogiendo una función de ventana cuya transformada de Fourier sea tan parecida a una función delta como sea posible. La ventana rectangular generalmente no se utiliza, ya que no se aproxima muy bien a la función delta. Para la ventana rectangular definida así:

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (9.6.8)$$

La respuesta en frecuencia es

$$W_R(\Omega) = \exp \left[-j\Omega \frac{(N-1)}{2} \right] \frac{\text{sen } \Omega N/2}{\text{sen } \Omega/2} \quad (9.6.9)$$

La Figura 9.6.2 muestra $|W_R(\Omega)|$, que consiste en un lóbulo principal que se extiende desde $\Omega = -2\pi/N$ a $2\pi/N$, y un conjunto de lóbulos laterales. El área encerrada bajo los lóbulos laterales, que es un porcentaje significativo del área bajo el lóbulo principal, contribuye a expandir el espectro de la DFT.

Se puede demostrar que las funciones de ventana que se atenúan suavemente hacia cero en ambos extremos dan mucho mejores resultados. Para estas ventanas, el área bajo los lóbulos laterales es un porcentaje mucho menor del área bajo el lóbulo principal. Un ejemplo es la ventana de Hamming, definida así:

$$w_H(n) = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (9.6.10)$$

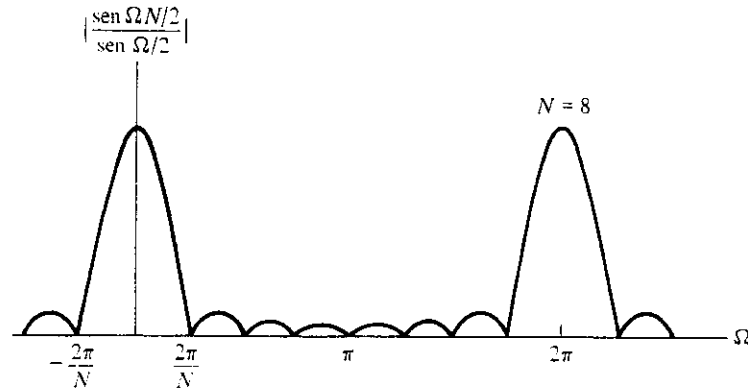


Figura 9.6.2. Módulo del espectro de la ventana rectangular.

La Figura 9.6.3(a) compara las ventanas rectangular y la de Hamming. Las Figuras 9.6.3(b) y 9.6.3(c) muestran los espectros de amplitud de las ventanas rectangular y de Hamming, respectivamente. Convencionalmente, se dibujan utilizando unidades de decibelios (dB). Como se puede ver en la figura, mientras que la ventana rectangular tiene un lóbulo principal más estrecho que la ventana de Hamming, la atenuación de los lóbulos laterales es mucho mayor en esta última.

Un factor que se debe considerar es la *resolución en frecuencia*, que se refiere a la separación entre las muestras en el dominio de la frecuencia. Si la resolución en frecuencia es demasiado baja, las muestras en frecuencia pueden estar muy separadas, y podemos perder información importante del espectro. Por ejemplo, podemos suponer que existe un solo pico en una frecuencia donde el espectro tiene realmente dos picos muy cercanos. La resolución en frecuencia es

$$\Delta\omega = \frac{\omega_s}{N} = \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{T_0} \quad (9.6.11)$$

donde T_0 indica la longitud de la ventana de datos. Observando la Ecuación (9.6.11) podemos ver que para mejorar la resolución en frecuencia, es necesario usar un registro de datos más largo. Si la longitud del registro de datos es fija y necesitamos más resolución en el espectro, podemos añadir ceros a la secuencia, incrementando así el número de muestras de N hasta algún valor $N_0 > N$. Esto es equivalente a utilizar una ventana de mayor duración, $T_1 > T_0$, sobre la señal modificada, definida ahora así:

$$x(t) = \begin{cases} x_a(t), & 0 \leq t \leq T_0 \\ 0, & T_0 < t \leq T_1 \end{cases} \quad (9.6.12)$$

Ejemplo 9.6.1

Supongamos que deseamos utilizar la DFT para calcular el espectro de una señal analógica que se ha filtrado previamente con un filtro paso bajo con frecuencia de corte de 10 kHz. Se desea una resolución en frecuencia menor de 0,1 Hz.

El teorema de muestreo nos indica que la mínima frecuencia de muestreo para esta señal es de 20 kHz, con lo que

$$T \leq 0,05 \text{ ms}$$

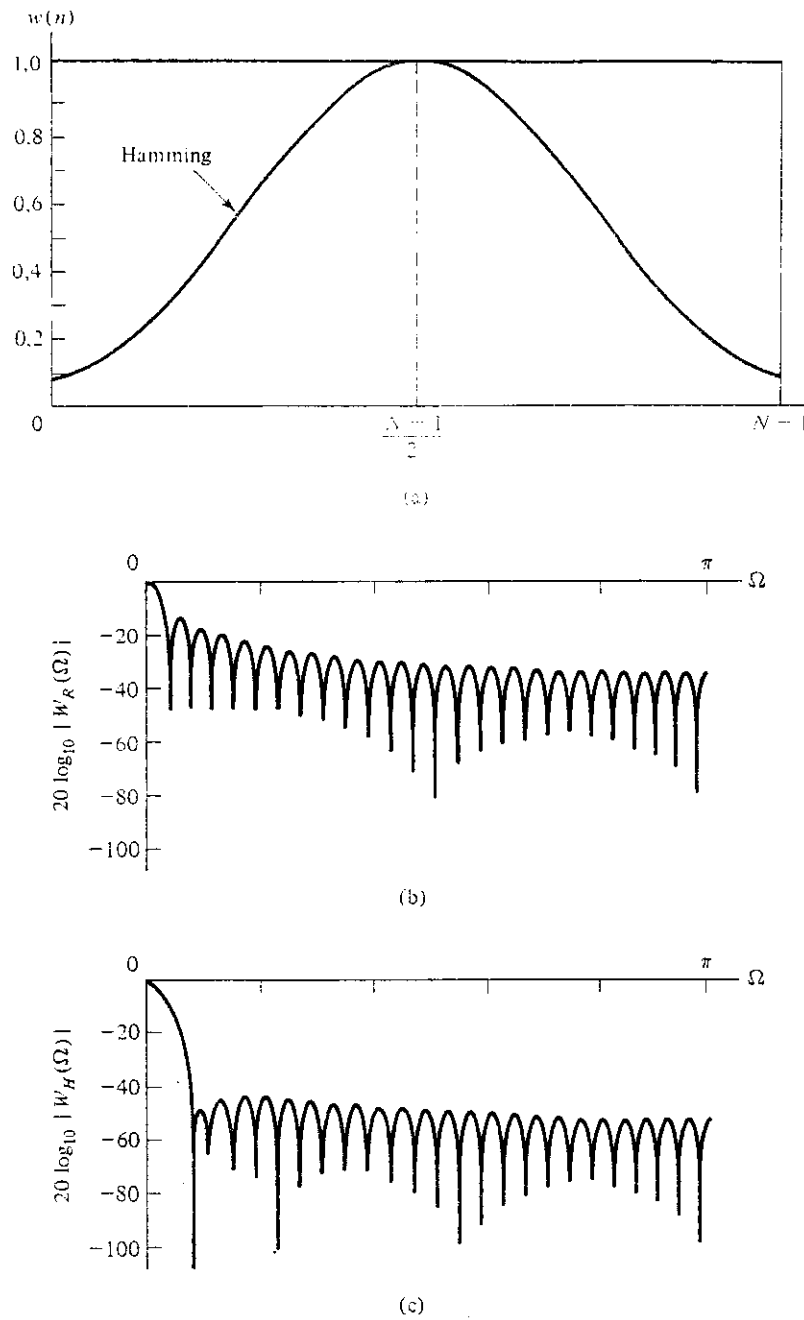


Figura 9.6.3. Comparación de las ventanas rectangular y de Hamming. (a) Funciones temporales. (b) Espectro de la ventana rectangular. (c) Espectro de la ventana de Hamming.

La duración de la ventana de datos se puede determinar a partir de la resolución deseada en frecuencia Δf

$$T_0 = \frac{1}{\Delta f} \geq 10 \text{ s}$$

de donde se deduce que

$$N = \frac{T_0}{T} \geq 2 \times 10^5$$

Suponiendo que deseamos utilizar una rutina de FFT de base 2, el valor de N será 262.144 ($= 2^{18}$), que es la mínima potencia de 2 que satisface la restricción de N . Si escogemos $f_s = 20$ kHz, T_0 debe valer 13,1072 s.

Ejemplo 9.6.2 En este ejemplo ilustraremos el uso de la DFT para calcular el espectro de Fourier de señales analógicas. Consideremos la señal

$$x_a(t) = \cos 400\pi t$$

Como la señal tiene una sola frecuencia, su transformada de Fourier en tiempo continuo será una pareja de funciones δ en ± 200 Hz.

La Figura 9.6.4 muestra el módulo del espectro de la señal obtenido mediante la DFT, $X(k)$, para longitudes de datos de 32, 64 y 128 muestras. La señal se ha muestreado con una frecuencia de 2 kHz, considerablemente mayor que la frecuencia de Nyquist, de 400 Hz. Como se puede ver en la figura, en cada caso el espectro calculado mediante la DFT tiene dos picos. Si llamamos k_p a la posición del primer pico, el segundo pico se produce en todos los casos en la posición $N - k_p$. Esto es lo que cabría esperar, ya que $X(-k) = X(N - k)$. Las frecuencias analógicas correspondientes a los dos picos se calculan como $f_0 = \pm k_p T/N$.

La Figura 9.6.5 muestra los resultados de aplicar una ventana de Hamming a la señal muestreada para longitudes de datos de 32, 64 y 128 muestras. El espectro obtenido mediante la DFT muestra de nuevo dos picos situados en las mismas posiciones que antes.

Tanto para el caso de utilizar ventana rectangular como de utilizar ventana de Hamming, el primer pico se produce en $k_p = 3, 6$ y 13 para $N = 32, 64$ y 128 muestras, respectivamente. Esto corresponde a las frecuencias analógicas de 187,5 Hz, 187,5 Hz y 190,0625 Hz. Por lo tanto, a medida que el número de muestras de datos crece, el pico se sitúa cada vez más cerca de la frecuencia analógica real. Nótese que los picos se van haciendo cada vez más estrechos a medida que N crece (y por tanto la resolución en el dominio de la frecuencia digital).

Las figuras muestran también que el espectro que se obtiene utilizando la ventana de Hamming es algo más suave que el resultante de utilizar una ventana rectangular.

Supongamos que añadimos otra frecuencia a nuestra señal analógica, con lo que la señal ahora es

$$x_b(t) = \cos 400\pi t + \cos 440\pi t$$

Para resolver las dos sinusoides presentes en la señal, la resolución en frecuencia Δf debe ser menor de 20 Hz. La duración de la ventana de datos, T_0 , debe escogerse por tanto mayor de $1/20$ s. Si la frecuencia de muestreo es de 2 kHz, el número de muestras en tiempo discreto, N , necesarias para resolver las dos frecuencias debe ser mayor que 100.

La Figura 9.6.6 muestra el espectro de esta señal obtenido mediante la DFT para longitudes de datos de 64, 128 y 256 muestras utilizando una ventana rectangular, y la Figura 9.6.7 muestra los correspondientes resultados utilizando una ventana de Hamming. Con ambas ventanas, una DFT de 64 puntos es incapaz de resolver los dos picos. Para una

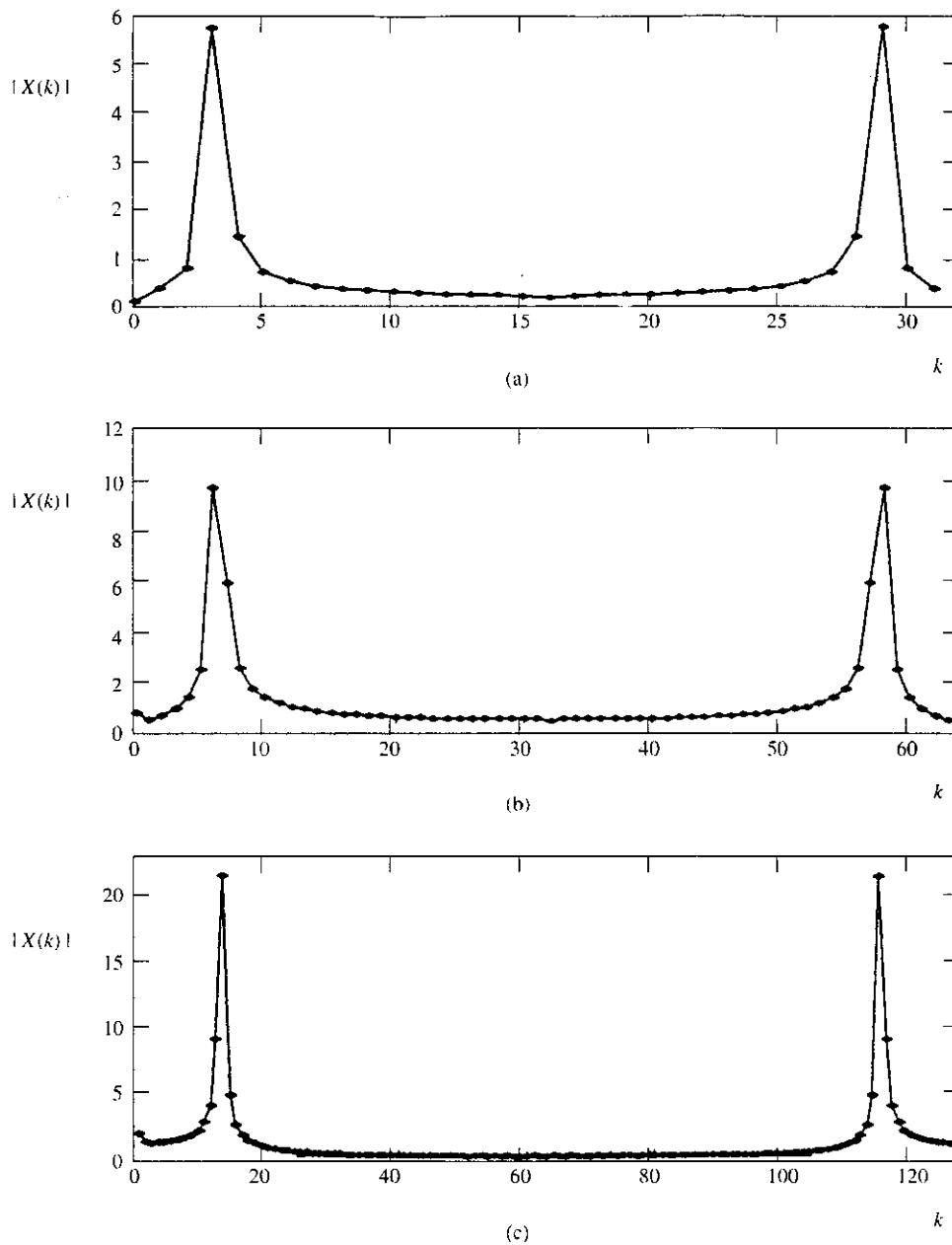


Figura 9.6.4. Espectro de la señal analógica $x_a(t)$ calculado mediante la DFT con una ventana rectangular. (a) $N = 32$, (b) $N = 64$, (c) $N = 128$.

ventana de longitud 128, aparecen dos valores grandes de $|X(k)|$ en las posiciones $k = 13$ y 14. Las correspondientes frecuencias en el dominio analógico son 203,125 Hz, y 218,75 Hz, respectivamente. Por lo tanto, aunque las dos frecuencias no aparecen como picos separados en el espectro obtenido mediante la DFT, es posible identificarlas.

Para $N = 256$, hay dos picos claramente identificables en el espectro en $k = 26$ y 28, que corresponden a los valores de 203,125 Hz y 218,75 Hz en el dominio de la frecuencia analógica.

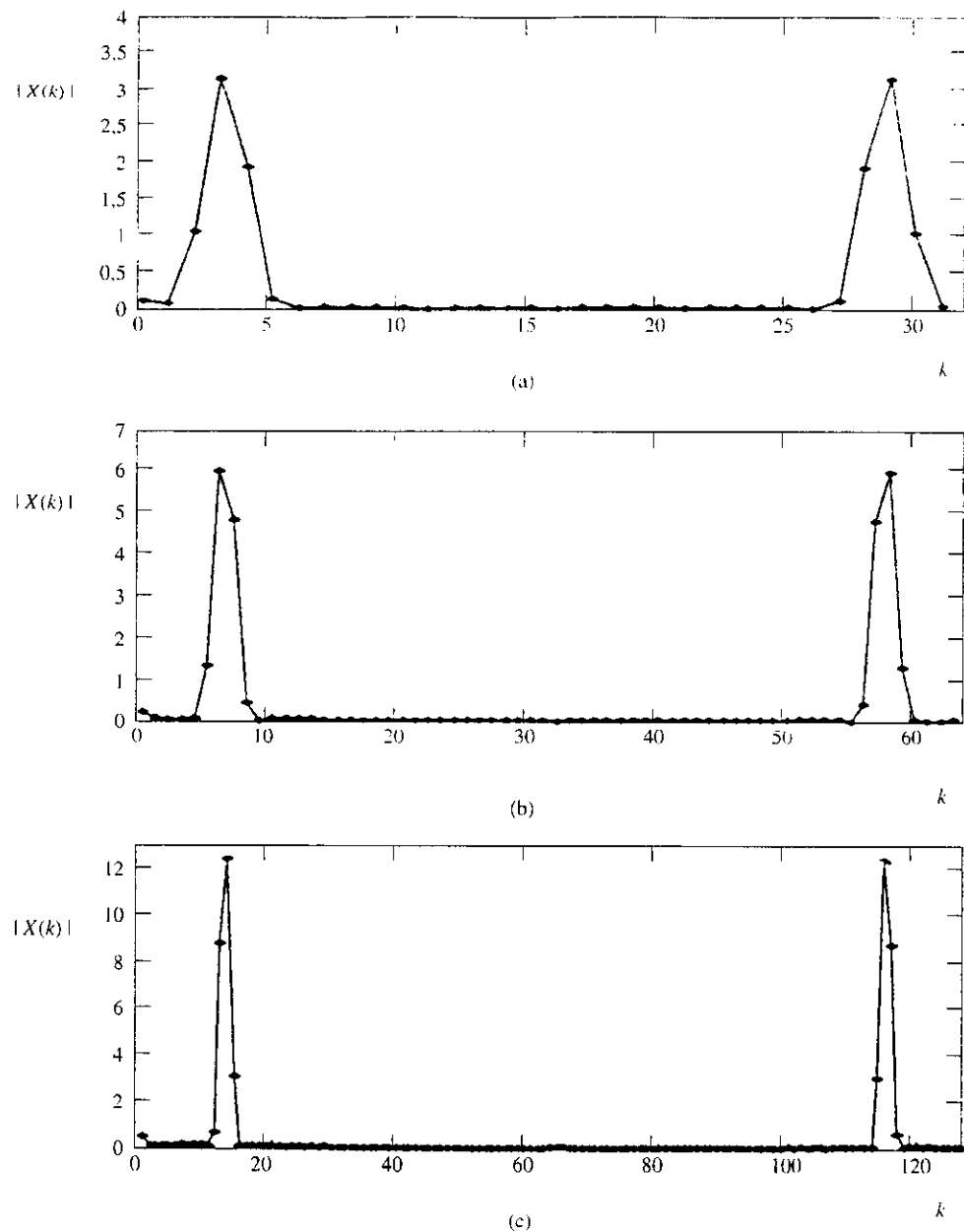


Figura 9.6.5. Espectro de la señal analógica $x_a(t)$ calculado mediante la DFT con una ventana Hamming. (a) $N = 32$ (b) $N = 64$ (c) $N = 128$.

9.7. RESUMEN

- La transformada discreta de Fourier (DFT) de una secuencia de finita $x(n)$ de longitud N se define así:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

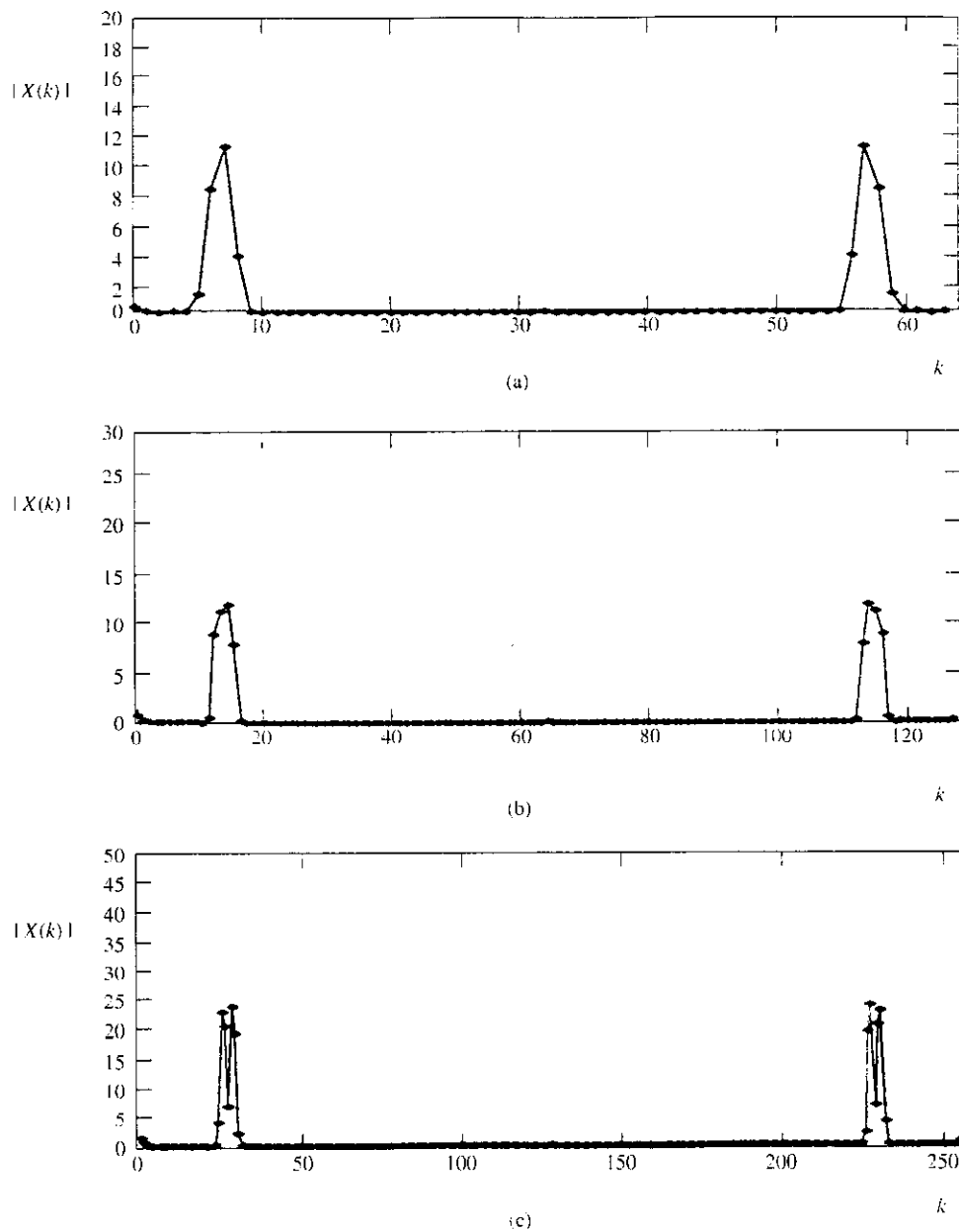


Figura 9.6.6. Espectro de la señal analógica $x_b(t)$ calculado mediante la DFT con una ventana rectangular. (a) $N = 64$, (b) $N = 128$, (c) $N = 256$.

donde

$$W_N = \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} \right]$$

- La transformada discreta de Fourier inversa (IDFT) se define así:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

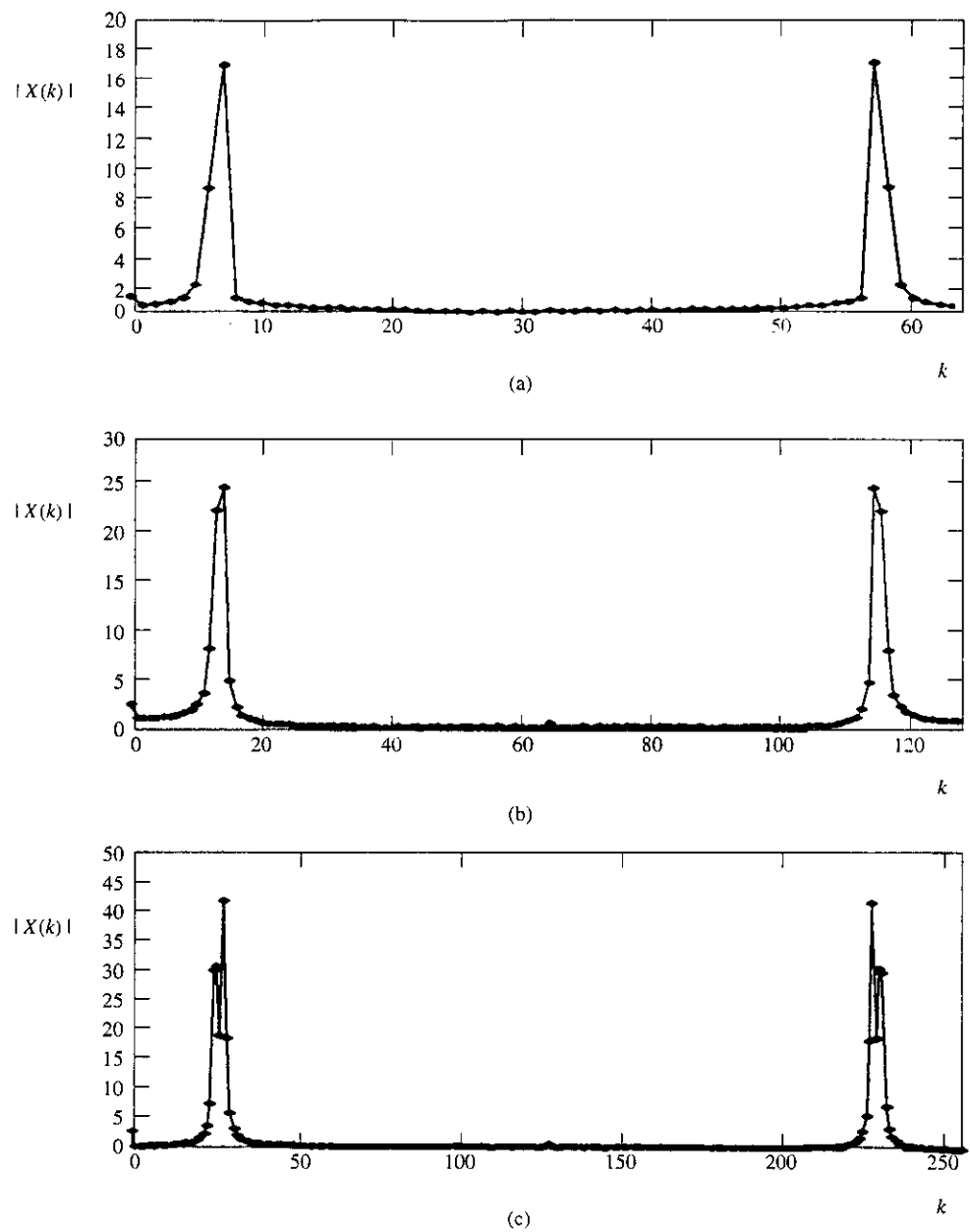


Figura 9.6.7. Espectro de la señal analógica $x_b(t)$ calculado mediante la DFT con una ventana Hamming. (a) $N = 64$, (b) $N = 128$, (c) $N = 256$.

- La DFT de una secuencia de N puntos se relaciona con la transformada Z mediante la expresión

$$X(k) = X(z)|_{z=w_N^k}$$

- La secuencia $X(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ es periódica de período N . La secuencia $x(n)$ que se obtiene determinando la IDFT de $X(k)$ es también periódica de período N .

- En todas las operaciones en las que intervienen la DFT y la IDFT, la secuencia $x(n)$ se reemplaza de hecho por su extensión periódica $x_p(n)$.
- $X(k)$ es igual a Na_k , donde a_k es el coeficiente del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de $x_p(n)$.
- Las propiedades de la DFT son similares a las de las otras transformadas de Fourier, con algunas diferencias significativas. En particular, la DFT realiza la convolución cíclica o periódica en lugar de la convolución lineal necesaria para el análisis de sistemas LTI.
- Para realizar la convolución lineal de una secuencia de N puntos con otra de M puntos, ambas secuencias se deben ampliar con ceros hasta una longitud de $N + M - 1$.
- Los algoritmos para el cálculo eficiente y rápido de la DFT en computador se conocen como algoritmos de transformada rápida de Fourier (FFT).
- Para secuencias cuya longitud es una potencia entera de 2, los algoritmos FFT más comúnmente utilizados son el de diezmado en el tiempo y el de diezmado en frecuencia.
- Para que se puedan sobrecribir los resultados intermedios de las etapas del algoritmo FFT, tanto para el caso de diezmado en el tiempo como en el caso de diezmado en frecuencia, las entradas deben estar en el orden correspondiente a la inversión de bits.
- La DFT proporciona un método adecuado para la determinación aproximada del espectro de señales analógicas. Sin embargo, hay que tener cuidado de minimizar los errores causados por el muestreo y el enventanado de la señal analógica, necesarios para obtener una secuencia en tiempo discreto de longitud finita.
- Los errores de solapamiento se pueden reducir escogiendo una frecuencia de muestreo mayor, o filtrando previamente la señal analógica. Los errores de enventanado se pueden reducir escogiendo una función de ventana que descienda a cero gradualmente en ambos extremos.
- La resolución espectral en el dominio analógico es directamente proporcional a la longitud de los datos.

9.8. LISTA DE TÉRMINOS IMPORTANTES

Algoritmo de diezmado en el tiempo	Reducción del error
Algoritmo de diezmado en frecuencia	Relleno con ceros
Convolución lineal	Resolución espectral
Convolución periódica	Solapamiento
Enventanado	Sustitución de valores intermedios
Espectro analógico	Transformada discreta de Fourier (DFT)
Filtrado previo	Transformada discreta de Fourier inversa (IDFT)
Orden correspondiente a inversión de bits	Transformada rápida de Fourier (FFT)
Periodicidad de la DFT y de la IDFT	

9.9. PROBLEMAS

9.1. Calcular la DFT de las siguientes secuencias de N puntos:

$$(a) \quad x(n) = \begin{cases} 1, & n = n_0, \quad 0 < n_0 < N - 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

(b) $x(n) = (-1)^n$

(c) $x(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$

9.2. Demostrar que si $x(n)$ es una secuencia real, $X(N - k) = X^*(k)$.

9.3. Sea $x(n)$ una secuencia de N puntos cuya DFT es $X(k)$. Calcular en función de $X(k)$ la DFT de las siguientes secuencias:

(a) $y_1(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

(b) $y_2(n) = x(N - n - 1), \quad 0 \leq n \leq N - 1$

(c) $y_3(n) = x(2n), \quad 0 \leq n \leq N - 1$

(d) $y_4(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & N \leq n \leq 2N - 1 \end{cases}$

9.4. Sea $x(n)$ una secuencia real de ocho puntos, y sea

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq 7 \\ x(n - 8), & 8 \leq n \leq 15 \end{cases}$$

Calcular $Y(k)$ suponiendo que

$$X(0) = 1; \quad X(1) = 1 + 2j; \quad X(2) = 1 - j; \quad X(3) = 1 + j; \quad \text{y} \quad X(4) = 2$$

9.5. (a) Utilizando la DFT, calcular la convolución periódica de las siguientes secuencias:

(i) $x(n) = \{1, -1, -1, 1, -1, 1\}$ y $h(n) = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$

(ii) $x(n) = \{1, -2, -1, 1\}$ y $h(n) = \{1, 0, 0, 1\}$

(b) Comprobar los resultados utilizando algún paquete de software matemático.

9.6. Repetir el Problema 9.5 calculando ahora la convolución lineal.

9.7. Sea $X(\Omega)$ la transformada de Fourier de la secuencia $x(n) = (1/3)^n u(n)$, y sea $y(n)$ una secuencia de ocho puntos cuya DFT, $Y(k)$, corresponde a ocho muestras de $X(\Omega)$ equiespaciadas en frecuencia. Es decir,

$$Y(k) = X\left(\frac{2\pi}{8}k\right) \quad k = 0, 1, \dots, 7$$

¿Cómo es $y(n)$?

9.8. Demostrar la relación de Parseval para la DFT:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

9.9. Supongamos que deseamos calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto de una secuencia de N puntos $x(n)$, obteniendo dicha transformada en M puntos

equiespaciados en el intervalo $[0, 2\pi]$. Explicar cómo podemos utilizar la DFT para ello si (a) $M > N$ y (b) $M < N$.

- 9.10. Sea $x(n)$ una secuencia de N puntos. Se desea calcular 128 muestras equiespaciadas de su espectro $X(\Omega)$ en el intervalo $7\pi/16 \leq \Omega \leq 15\pi/16$, utilizando un algoritmo FFT con base 2. Describir un procedimiento para obtener dichas muestras si (i) $N = 1.000$, (ii) $N = 120$.
- 9.11. Supongamos que deseamos calcular la DFT de una secuencia $x(n)$ de N puntos utilizando un procesador hardware que sólo puede realizar FFT de M puntos, siendo M un múltiplo entero de N . Suponiendo que las necesidades adicionales para almacenamiento y realización de sumas o multiplicaciones están disponibles, demostrar cómo puede realizarse.
- 9.12. Dada una secuencia $x(n)$ de seis puntos, podemos calcular su DFT dividiéndola en tres DFT de dos puntos que se pueden combinar para obtener $X(k)$. Dibujar un diagrama de flujo de señal para obtener $X(k)$ mediante este procedimiento.
- 9.13. Dibujar un diagrama de flujo de señal para calcular una DFT de nueve puntos mediante la suma de tres DFT de tres puntos.
- 9.14. Se desea realizar el análisis espectral de datos analógicos que se han filtrado previamente a 20 kHz, con una resolución menor que 0.25 Hz, mediante un algoritmo de base 2. Determinar la longitud de datos necesaria, T_0 .
- 9.15. Para la señal analógica del Problema 9.14, ¿cuál es la resolución en frecuencia si la señal se muestrea a 40 kHz, obteniéndose 4.096 muestras?
- 9.16. Una señal analógica $x_a(t)$ de 24 s. de duración se muestrea con una frecuencia de $42\frac{2}{3}$ Hz y se calcula la DFT de las muestras resultantes.
- ¿Cuál es la resolución en frecuencia en el dominio analógico?
 - ¿Cuánto vale la separación de las muestras en frecuencia digital para la DFT realizada?
 - ¿Cuál es el máximo valor de frecuencia analógica para el que no se produce solapamiento?
- 9.17. Los siguientes valores representan la DFT, $X(k)$, de una señal analógica $x_a(t)$ que se ha muestreado, obteniéndose 16 muestras:

$$X(0) = 2, X(3) = 4 - j4, X(5) = -2, X(8) = -\frac{1}{2}, X(11) = -2, X(13) = 4 + j4$$

El resto de los valores es cero.

- Calcular $x(n)$.
- ¿Cuánto vale la resolución en frecuencia digital?
- Suponiendo que el intervalo de muestreo es de 0,25 s., calcular la resolución en frecuencia analógica. ¿Cuál es la duración de la señal analógica, T_0 ?
- Para la frecuencia de muestreo del apartado (c), ¿cuál es la máxima frecuencia analógica que se puede representar en $x_a(t)$ para que no se produzca solapamiento?
- Calcular T_0 para conseguir una resolución en frecuencia dos veces superior a la del Apartado (c).

- 9.18. Dadas dos secuencias reales de N puntos, $f(n)$ y $g(n)$, se pueden obtener simultáneamente sus DFT calculando la DFT de la secuencia compleja

$$x(n) = f(n) + jg(n)$$

Para demostrar cómo, seguiremos estos pasos:

- (a) Sea $h(n)$ una secuencia real de N puntos. Demostrar que

$$\operatorname{Re}\{H(k)\} = H_e(k) = \frac{H(k) + H(N-k)}{2}$$

$$\operatorname{Im}\{H(k)\} = H_o(k) = \frac{H(k) - H(N-k)}{2}$$

- (b) Sea $h(n)$ imaginaria pura. Demostrar que

$$\operatorname{Re}\{H(k)\} = H_o(k)$$

$$\operatorname{Im}\{H(k)\} = H_e(k)$$

- (c) Utilizar los resultados de los Apartados (a) y (b) para demostrar que

$$F(k) = X_{Re}(k) + jX_{Io}(k)$$

$$G(k) = X_{Io}(k) - jX_{Re}(k)$$

donde $X_{Re}(k)$ y $X_{Io}(k)$ representan la parte par e impar de $X_R(k)$, la parte real de $X(k)$, y $X_{Io}(k)$ y $X_{Re}(k)$ representan la parte par e impar de $X_I(k)$, la parte imaginaria de $X(k)$.

- 9.19. (a) La señal $x_a(t) = 4 \cos(2\pi t/3)$ se muestrea en instantes discretos con período T y se generan 32 puntos de la secuencia $x(n)$. Calcular la DFT de la secuencia si $T = 15/16$, y dibujar el módulo y la fase de la secuencia. Para calcular la DFT, utilizar una ventana rectangular.
- (b) Determinar la transformada de Fourier de $x_a(t)$ y comparar su módulo y fase con los resultados del Apartado (a).
- (c) Repetir los Apartados (a) y (b) si $T = 0,1$ s.
- 9.20. Repetir el Problema 9.19 con una ventana de Hamming. Comentar los resultados.
- 9.21. Se desea determinar la transformada de Fourier de la señal modulada en amplitud $x_a(t) = 10 \cos(2.000\pi t) \cos(100\pi t)$ utilizando la DFT. Escoger la duración de observación de la señal, T_0 , para distinguir claramente todas las frecuencias de $x_a(t)$. Suponer un período de muestreo de $T = 0,4$ ms.
- (a) Utilizando una ventana rectangular, calcular la DFT de la señal muestreada para $N = 128$, $N = 256$ y $N = 512$ muestras.
- (b) Determinar la transformada de Fourier de $x_a(t)$, y comparar su módulo y su fase con los resultados del Apartado (a).
- 9.22. Repetir el Problema 9.21 con una ventana de Hamming. Comentar los resultados.

Diseño de filtros analógicos y digitales

10.1. INTRODUCCIÓN

Hemos visto anteriormente que si aplicamos una determinada entrada a un sistema, aparecerá modificada o transformada a su salida. Típicamente, lo que deseamos es diseñar un sistema que transforme las entradas de una manera específica. Los sistemas que se diseñan para eliminar ciertas componentes no deseadas de la señal de entrada se denominan filtros. Cuando esas componentes no deseadas se describen en función de sus contenidos en frecuencia, los filtros, como se indicó en el Capítulo 4, se denominan filtros selectivos en frecuencia. Aunque muchas aplicaciones requieren únicamente el diseño de filtros simples, que se pueden diseñar con procedimientos directos, el diseño de filtros más complicados requiere el uso de técnicas sofisticadas. En este capítulo consideraremos algunas técnicas para el diseño de filtros selectivos en frecuencia, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto.

Como se indicó en el Capítulo 4, un filtro selectivo en frecuencia ideal deja pasar ciertas frecuencias sin modificarlas, y elimina completamente las otras frecuencias. El intervalo de frecuencias que se dejan pasar sin atenuación se denomina banda de paso del filtro, y el intervalo de frecuencias que se eliminan se denomina banda eliminada. Por tanto, para filtros ideales en tiempo continuo, el módulo de la función de transferencia es $|H(\omega)| = 1$ en la banda de paso y $|H(\omega)| = 0$ en la banda eliminada. Los filtros selectivos en frecuencia se clasifican en paso bajo, paso alto, paso banda y banda eliminada, dependiendo de la banda de frecuencias que se deja pasar sin atenuación o que se elimina completamente. La Figura 10.1.1 muestra las características de estos filtros.

Para el caso de filtros discretos, las definiciones son similares, con la diferencia de que el intervalo de frecuencias de interés es en este caso $0 \leq \Omega < 2\pi$, ya que $H(\Omega)$ es ahora una función periódica de período 2π . La Figura 10.1.2 muestra los equivalentes en tiempo discreto de los filtros que se muestran en la Figura 10.1.1.

En la práctica, no se pueden obtener filtros que presenten una transición abrupta entre las bandas de paso y las bandas eliminadas. Esto se puede ver fácilmente si consideramos la respuesta al impulso de un filtro paso bajo ideal, que es no causal, y por tanto, no es

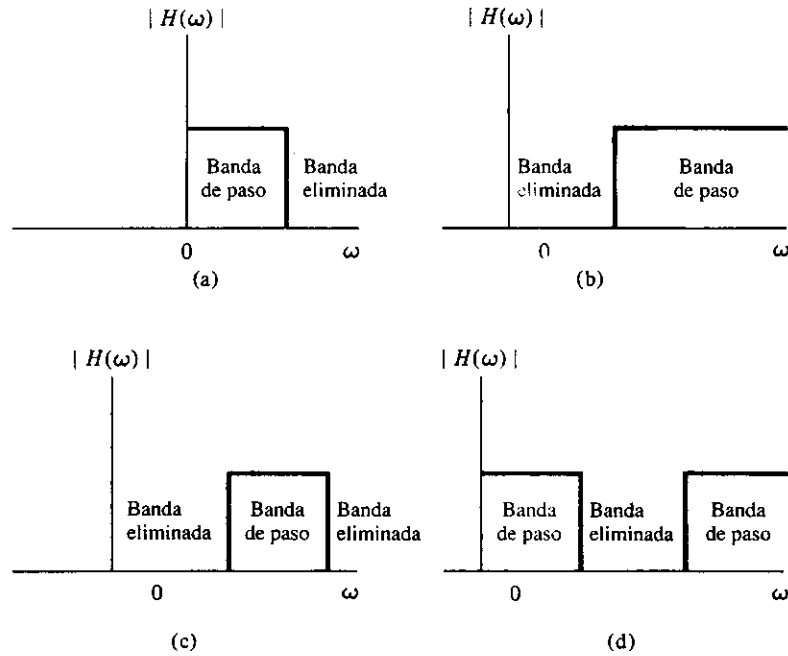


Figura 10.1.1. Filtros ideales selectivos en frecuencia en tiempo continuo.

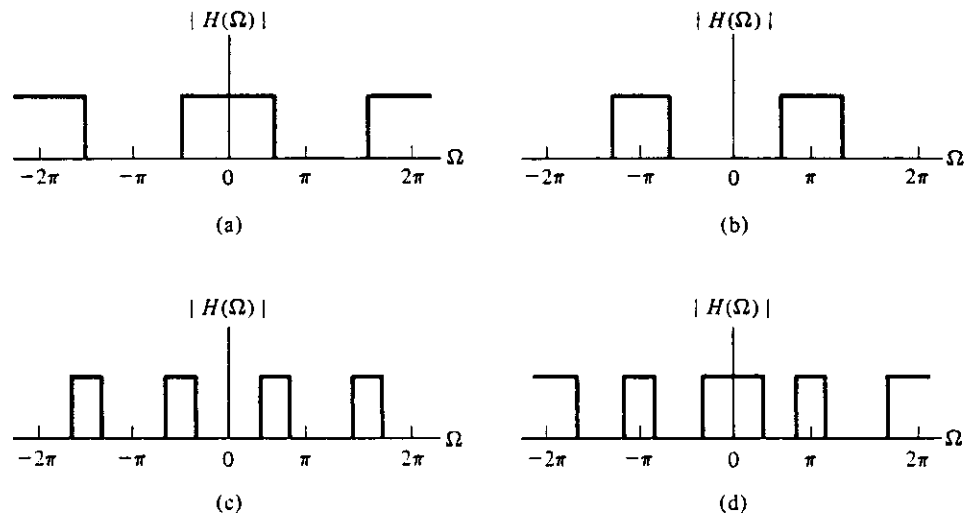


Figura 10.1.2. Filtros ideales selectivos en frecuencia en tiempo discreto.

físicamente realizable. Para obtener filtros prácticos, tenemos que relajar por tanto, nuestros requerimientos sobre $|H(\omega)|$ (o sobre $|H(\Omega)|$) en las bandas de paso y en las bandas eliminadas, permitiendo desviaciones de la respuesta ideal, y tendremos que especificar una banda de transición entre las bandas de paso y las bandas eliminadas. Para el caso de un filtro paso bajo en tiempo continuo, las especificaciones serán de la forma

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 &\leq |H(\omega)| \leq 1 + \delta_1, & |\omega| \leq \omega_p \\ |H(\omega)| &\leq \delta_2, & |\omega_s| \leq \omega \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

donde ω_p y ω_s son las frecuencias de corte de la banda de paso y la banda eliminada, como se muestra en la Figura 10.1.3.

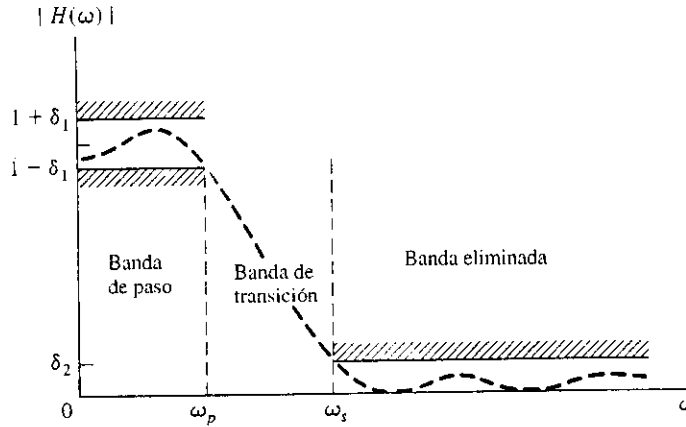


Figura 10.1.3. Especificación de un filtro paso bajo práctico.

Frecuentemente, el filtro se especifica con ganancia de pico unidad. Las correspondientes especificaciones de la respuesta en frecuencia del filtro se pueden determinar fácilmente aplicando a la Figura 10.1.3 un factor de escala en amplitud de $1/(1 + \delta_1)$. Las especificaciones para filtros en tiempo discreto tienen una forma similar

$$\begin{aligned} |H(\Omega) - 1| &\leq \delta_1, & |\Omega| &\leq \Omega_p \\ |H(\Omega)| &\leq \delta_2, & \Omega_s &\leq |\Omega| \leq \pi \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

Dado un conjunto de especificaciones, el diseño de filtro consiste en obtener una aproximación analítica a las características del filtro deseadas, en forma de una función de transferencia: $H(s)$ para sistemas en tiempo continuo y $H(z)$ para sistemas en tiempo discreto. Una vez determinada la función de transferencia, se puede obtener una realización del filtro como se indicó en anteriores capítulos. En la Sección 10.3 consideraremos el diseño de dos filtros analógicos estándar, y en la Sección 10.4 examinaremos el diseño de filtros digitales.

En nuestra presentación sobre diseño de filtros consideraremos únicamente filtros paso bajo ya que, como se indica en la sección siguiente, un filtro paso bajo se puede convertir en otro tipo de filtro mediante la adecuada transformación de frecuencia. Por tanto, dada una especificación de cualquier otro tipo de filtro, se puede transformar en la especificación equivalente de un filtro paso bajo. Se obtiene la función de transferencia $H(s)$ (o $H(z)$) de este filtro paso bajo y se transforma dicha función para pasar al intervalo de frecuencia deseado.

10.2. TRANSFORMACIONES DE FRECUENCIA

Como ya hemos indicado, las transformaciones en frecuencia son útiles para transformar un tipo de filtro selectivo en frecuencia en otro tipo. Por ejemplo, supongamos que tenemos la función de transferencia de un filtro paso bajo en tiempo continuo, $H(s)$, con una

frecuencia de corte normalizada a la unidad. Verificaremos ahora que la transformación que lo convierte en un filtro paso bajo con frecuencia de corte ω_c es

$$s^* = s\omega_c \quad (10.2.1)$$

donde s^* representa la variable de frecuencia transformada. Como

$$\omega^* = \omega\omega_c \quad (10.2.2)$$

resulta claro que el intervalo de frecuencia $0 \leq |\omega| \leq 1$ se transforma en el nuevo intervalo $0 \leq |\omega^*| \leq \omega_c$. Es decir, $H(s^*)$ representa un filtro paso bajo de frecuencia de corte ω_c . De forma más general, la transformación

$$s^* = s \frac{\omega_c}{\omega_c} \quad (10.2.3)$$

transforma un filtro paso bajo con frecuencia de corte ω_c en un filtro paso bajo con frecuencia de corte ω_c^* . Análogamente, la transformación

$$s^* = \frac{\omega_c}{s} \quad (10.2.4)$$

convierte un filtro paso bajo normalizado en un filtro paso alto con frecuencia de corte ω_c . Esto se puede comprobar fácilmente si tenemos en cuenta que en este caso

$$\omega^* = -\frac{\omega_c}{\omega} \quad (10.2.5)$$

con lo que el punto $|\omega| = 1$ se transforma en el punto $|\omega^*| = \omega_c$, y el intervalo $|\omega| \leq 1$ se transforma en el intervalo $\omega_c \leq |\omega^*| \leq \infty$.

A continuación consideraremos la transformación de frecuencia del filtro paso bajo normalizado en un filtro paso banda con frecuencias de corte inferior y superior de ω_{c_1} y ω_{c_2} , respectivamente. La transformación necesaria se expresa en función del ancho de banda del filtro,

$$BW = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} \quad (10.2.6)$$

y de la frecuencia

$$\omega_0 \sqrt{\omega_{c_2} \omega_{c_1}} \quad (10.2.7)$$

y es

$$s = \frac{\omega_0}{BW} \left(\frac{s^*}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s^*} \right) \quad (10.2.8)$$

Esta transformación convierte el punto $\omega = 0$ en los puntos $\omega^* = \pm \omega_0$ y el segmento $|\omega| \leq 1$ en los segmentos $\omega_{c_1} \leq |\omega^*| \leq \omega_{c_2}$.

Finalmente, el filtro de banda eliminada se obtiene mediante la transformación

$$s = \frac{BW}{\omega_0 \left(\frac{s^*}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s^*} \right)} \quad (10.2.9)$$

donde BW y ω_0 se definen análogamente al caso del filtro paso banda. La Tabla 10.1 resume estas transformaciones.

Tabla 10.1. Transformaciones de frecuencia partiendo de la respuesta de un filtro paso bajo analógico

Tipo de filtro	Transformación
Paso bajo	$\frac{s^*}{\omega_c}$
Paso alto	$\frac{\omega_c}{s^*}$
Paso banda	$\frac{\omega_0}{BW} \left(\frac{s^*}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s^*} \right), \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_{c_2} \omega_{c_1}}$
Banda eliminada	$\frac{BW}{\omega_0 \left(\frac{s^*}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s^*} \right)}, \quad BW = \omega_{c_2} - \omega_{c_1}$

Consideraremos ahora transformaciones similares para el caso de tiempo discreto. Supongamos que tenemos un filtro paso bajo en tiempo discreto con una frecuencia de corte de Ω_c , y que deseamos obtener un filtro paso bajo de frecuencia de corte Ω_c^* . La transformación necesaria es

$$z^* = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z} \quad (10.2.10)$$

Esta transformación se puede escribir de forma más conveniente

$$(z^*)^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (10.2.11)$$

Haciendo $z = \exp[j\Omega]$ en el lado derecho de la Ecuación (10.2.11), se obtiene

$$z^* = \exp \left[j \tan^{-1} \frac{(1 - \alpha^2) \sin \Omega}{2\alpha + (1 + \alpha^2) \cos \Omega} \right] \quad (10.2.12)$$

Por tanto, la transformación convierte el círculo unidad del plano z en el círculo unidad en el plano z^* . El valor de α necesario se determina haciendo $z^* = \exp[j\Omega_c^*]$ y $\Omega = \Omega_c$ en la Ecuación (10.2.11) con lo que resulta

$$\alpha = \frac{\sin [(\Omega_c - \Omega_c^*)/2]}{\sin [(\Omega_c + \Omega_c^*)/2]} \quad (10.2.13)$$

Las transformaciones para convertir un filtro paso bajo en un filtro paso alto, paso banda o banda eliminada se pueden definir de forma similar y se muestran en la Tabla 10.2.

Tabla 10.2. Transformaciones de frecuencia partiendo de la respuesta de un filtro paso bajo digital

Tipo de filtro	Transformación	Fórmulas asociadas
Paso bajo	$(z^*)^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{\Omega_c - \Omega_c^*}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\Omega_c + \Omega_c^*}{2}}$ $\Omega_c^* = \text{frecuencia de corte deseada}$
Paso alto	$-\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos \frac{\Omega_c^* - \Omega_c}{2}}{\cos \frac{\Omega_c^* + \Omega_c}{2}}$
Paso banda	$\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos \frac{\Omega_{c_2}^* + \Omega_{c_1}^*}{2}}{\cos \frac{\Omega_{c_2}^* - \Omega_{c_1}^*}{2}}$ $k = \cot \frac{\Omega_{c_2}^* - \Omega_{c_1}^*}{2} \tan \frac{\Omega_c}{2}$ $\Omega_{c_1}^*, \Omega_{c_2}^* = \text{frecuencias de corte inferior y superior deseadas, respectivamente}$
Banda eliminada	$\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos \frac{\Omega_{c_2}^* + \Omega_{c_1}^*}{2}}{\cos \frac{\Omega_{c_2}^* - \Omega_{c_1}^*}{2}}$ $k = \tan \frac{\Omega_{c_2}^* - \Omega_{c_1}^*}{2} \tan \frac{\Omega_c}{2}$

10.3. DISEÑO DE FILTROS ANALÓGICOS

El diseño de filtros prácticos, parte de un conjunto de especificaciones preestablecidas, como las que se indican en la Ecuación (10.1.1), o se muestran en la Figura 10.1.2. Existen diferentes procedimientos para el diseño de filtros analógicos, y nosotros consideraremos aquí el diseño de dos tipos estándar de filtros, concretamente los filtros de Butterworth y de Chebyshev. Los filtros de Butterworth proporcionan una aproximación a la característica del filtro paso bajo ideal que se aproxima a cero suavemente. Los filtros de Chebyshev proporcionan una aproximación que oscila en la banda de paso, y decrece monótonamente en la banda de transición y en la banda eliminada.

10.3.1. El filtro de Butterworth

El filtro de Butterworth se caracteriza por su función de amplitud

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega)^{2N}} \quad (10.3.1)$$

donde N indica el orden del filtro. Se puede ver claramente en la ecuación que la amplitud decrece monótonamente con ω , y tiene un valor máximo de 1 en $\omega = 0$. Para $\omega = 1$, el módulo vale siempre $1/\sqrt{2}$ para todo N . Por tanto, el filtro de Butterworth normalizado tiene una frecuencia de corte a 3 dB igual a la unidad.

La Figura 10.3.1 muestra la amplitud de este filtro en función de ω para diversos valores de N . El parámetro N determina lo próximo que se encuentra el filtro de Butterworth al filtro ideal. Se puede ver que la aproximación mejora al aumentar N .

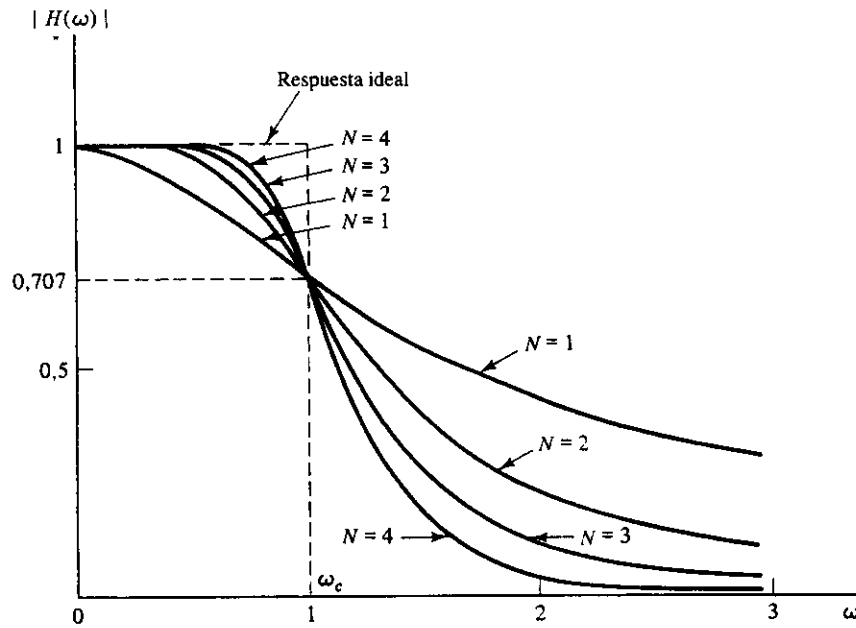


Figura 10.3.1. Gráfica de amplitud del filtro de Butterworth normalizado.

La aproximación de Butterworth se denomina maximalmente plana, ya que para un valor de N dado, tiene un número máximo de derivadas de la función de amplitud que es cero en el origen. De hecho, las primeras $2N - 1$ derivadas de $|H(\omega)|$ son cero en $\omega = 0$, como se puede ver desarrollando $|H(\omega)|$ en serie de potencias en $\omega = 0$:

$$|H(\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{2} \omega^{2N} + \frac{3}{8} \omega^{4N} - \dots \quad (10.3.2)$$

Para obtener la función de transferencia del filtro $H(s)$ utilizamos

$$\begin{aligned} H(s)H(-s)|_{s=j\omega} &= |H(\omega)|^2 \\ &= \frac{1}{1 + \left[\frac{(j\omega)^2}{j^2} \right]^N} \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

con lo que

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j} \right)^{2N}} \quad (10.3.4)$$

De la Ecuación (10.3.4) se deduce que los polos de $H(s)$ son las raíces de la ecuación

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{j}\right)^{2N} &= -1 \\ &= \exp[j(2k-1)\pi] \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1 \end{aligned} \quad (10.3.5)$$

y por lo tanto valen

$$s_k = \exp[j(2k+N-1)\pi/2N] \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1 \quad (10.3.6)$$

Sustituyendo $s_k = \sigma_k + j\omega_k$, podemos expresar las partes reales e imaginarias de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \cos\left(\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{2k-1}{N}\frac{\pi}{2}\right) \\ \omega_k &= \sin\left(\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{2k-1}{N}\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

Como se observa en la Ecuación (10.3.6), la Ecuación (10.3.5) tiene $2N$ raíces en la circunferencia unidad, separadas uniformemente en intervalos de $\pi/2N$ radianes. Como $2k-1$ no puede ser par, no habrá raíces en el eje $j\omega$, y habrá exactamente N raíces en los semiplanos izquierdo y derecho. Los polos y los ceros de $H(s)$ son imágenes especulares de los polos y los ceros de $H(-s)$. Por lo tanto, para obtener una función de transferencia estable, basta con asociar a $H(s)$ los polos del semiplano izquierdo.

Como ejemplo, para $N=3$, aplicando la Ecuación (10.3.6), las raíces son

$$\begin{aligned} s_0 &= \exp\left[j\frac{\pi}{3}\right], & s_1 &= \exp\left[j\frac{2\pi}{3}\right], & s_2 &= \exp[j\pi], \\ s_3 &= \exp\left[j\frac{4\pi}{3}\right], & s_4 &= \exp\left[j\frac{5\pi}{3}\right], & s_5 &= 1 \end{aligned}$$

como muestra la Figura 10.3.2.

Para obtener una función de transferencia estable, escogemos como polos de $H(s)$ las raíces del semiplano izquierdo, y resulta

$$H(s) = \frac{1}{[s - \exp[j2\pi/3]][s - \exp[j\pi]][s - \exp[j4\pi/3]]} \quad (10.3.8)$$

El denominador se puede desarrollar así:

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 1)} \quad (10.3.9)$$

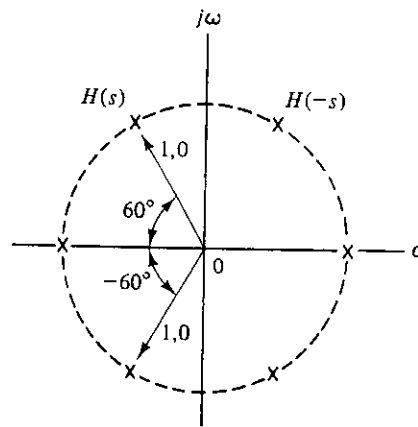


Figura 10.3.2. Raíces del polinomio de Butterworth normalizado $N = 3$.

La Tabla 10.3 contiene los denominadores de las funciones de transferencia de Butterworth para valores de N desde $N = 1$ hasta $N = 8$. Cuando se multiplican esos factores, el resultado es un polinomio de la forma

$$S(s) = a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + 1 \quad (10.3.10)$$

Tabla 10.3. Polinomios de Butterworth (forma factorizada)

n	
1	$s + 1$
2	$s^2 + \sqrt{2}s + 1$
3	$(s^2 + s + 1)(s + 1)$
4	$(s^2 + 0,7653s + 1)(s^2 + 1,84776s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0,6180s + 1)(s^2 + 1,6180s + 1)$
6	$(s^2 + 0,5176s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)(s^2 + 1,9318s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0,4450s + 1)(s^2 + 1,2456s + 1)(s^2 + 1,8022s + 1)$
8	$(s^2 + 0,3986s + 1)(s^2 + 1,1110s + 1)(s^2 + 1,6630s + 1)(s^2 + 1,9622s + 1)$

La Tabla 10.4 contiene los coeficientes del polinomio para N desde 1 hasta 8.

Tabla 10.4. Polinomios de Butterworth

n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1							
2	$\sqrt{2}$	1						
3	2	2	1					
4	2,613	3,414	2,613	1				
5	3,236	5,236	5,236	3,236	1			
6	3,864	7,464	9,141	7,464	3,864	1		
7	4,494	10,103	14,606	14,606	10,103	4,494	1	
8	5,126	13,128	21,828	25,691	21,848	13,138	5,126	1

Para obtener un filtro con frecuencia de corte a 3 dB de valor ω_c , sustituiremos s por s/ω_c en $H(s)$. La correspondiente función de amplitud es

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}} \quad (10.3.11)$$

Consideremos ahora el diseño de un filtro paso bajo de Butterworth que satisfaga las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &\geq 1 - \delta_1, & |\omega| &\leq \omega_p \\ &\leq \delta_2, & |\omega| &> \omega_s \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

Como el filtro de Butterworth está definido por los parámetros N y ω_c , se necesitan dos ecuaciones para determinarlos. Dada la naturaleza monótona de la respuesta en frecuencia, se puede ver claramente que las especificaciones se cumplen si escogemos

$$|H(\omega_p)| = 1 - \delta_1 \quad (10.3.13)$$

y

$$|H(\omega_s)| = \delta_2 \quad (10.3.14)$$

Sustituyendo estas relaciones en la Ecuación (10.3.11) resulta

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{1 - \delta_1}\right)^2 - 1$$

y

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N} = \frac{1}{\delta_2^2} - 1$$

Eliminando ω_c de las dos ecuaciones anteriores y despejando N resulta

$$N = \frac{1}{2} \left[\frac{\log \frac{\delta_1(2 - \delta_1)\delta_2^2}{(1 - \delta_1)^2(1 - \delta_2^2)}}{\log \frac{\omega_p}{\omega_s}} \right] \quad (10.3.15)$$

Como N debe ser entero el valor que se obtiene de la Ecuación (10.3.15) se redondea al entero más cercano. Este valor de N se puede utilizar en la Ecuación (10.3.13) o en la Ecuación (10.3.14) para calcular ω_c . Si ω_c se determina mediante la Ecuación (10.3.13) las especificaciones de la banda de paso se cumplen exactamente, mientras que las de la banda eliminada se cumplen en exceso. Pero si utilizamos la Ecuación (10.3.14), ocurre lo contrario. Los pasos para determinar $H(s)$ se resumen a continuación:

1. Determinar N utilizando la Ecuación (10.3.15) utilizando los valores de δ_1 , δ_2 , ω_p y ω_s . Redondear al entero más cercano.
2. Determinar ω_c utilizando la Ecuación (10.3.13) o la (10.3.14).
3. Para el valor de N calculado en el paso 1, determinar el polinomio del denominador del filtro de Butterworth normalizado, utilizando la Tabla 10.3 o la Tabla 10.4 (para valores de $N \leq 8$) o utilizando la Ecuación (10.3.8), y formar $H(s)$.

4. Calcular la función de transferencia no normalizada sustituyendo s por s/ω_c en la función $H(s)$ calculada en el paso 3. El filtro que se obtiene tendrá una ganancia en continua de valor unidad. Si se desea otro valor de ganancia en continua, $H(s)$ se debe multiplicar por el valor de ganancia deseado.

Ejemplo 10.3.1 Deseamos diseñar un filtro de Butterworth con una atenuación inferior a 1 dB para $|\omega| \leq 2.000$ rad/s y superior a 15 dB para $|\omega| \geq 5.000$ rad/s. A partir de las especificaciones

$$20 \log_{10}(1 - \delta_1) = -1 \quad \text{y} \quad 20 \log_{10} \delta_2 = -15$$

se obtiene que $\delta_1 = 0,1087$ y $\delta_2 = 0,1778$. Sustituyendo estos valores en la Ecuación (10.3.15) se obtiene un valor de N de 2,6045. Por lo tanto, escogemos un valor para N de 3, y obtenemos el filtro normalizado utilizando la Tabla 10.3

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Utilizando la Ecuación (10.3.14) se obtiene $\omega_c = 2.826,8$ rad/s.
El filtro no normalizado es por tanto igual a

$$H(s) = \frac{1}{(s/2.826,8)^3 + 2(s/2.826,8)^2 + 2(s/2.826,8) + 1}$$

$$\frac{(2.826,8)^3}{s^3 + 2(2.826,8)s^2 + 2(2.826,8)^2s + (2.826,8)^3}$$

La Figura 10.3.3 muestra una gráfica del módulo del filtro en función de ω . Como puede verse en dicha gráfica, el filtro cumple las especificaciones de la banda eliminada, y cumple en exceso las especificaciones de la banda de paso.

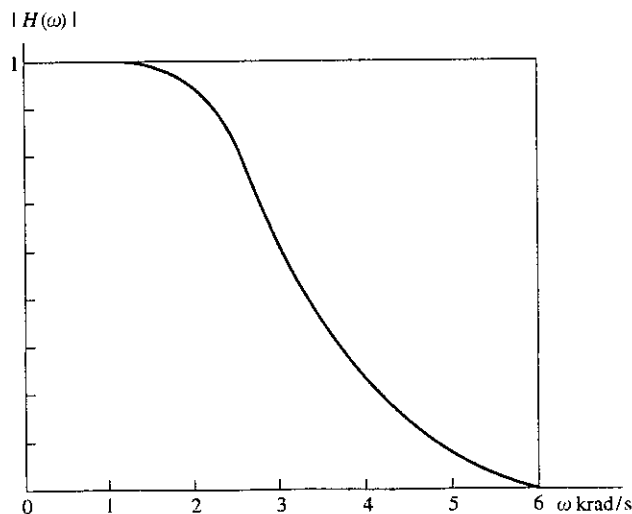


Figura 10.3.3. Función de amplitud del filtro de Butterworth del Ejemplo 10.3.1.

10.3.2. El filtro de Chebyshev

El filtro de Butterworth proporciona una buena aproximación a la característica del filtro paso bajo ideal para valores de ω cercanos a cero, pero presenta una baja tasa de caída en la banda de transición. Consideraremos ahora el filtro de Chebyshev, que presenta rizado en la banda de paso, pero presenta una banda de transición más abrupta. Por lo tanto, para un mismo orden el filtro de Chebyshev tiene una banda de transición menor que el filtro de Butterworth.

Como la obtención de la aproximación Chebyshev es bastante complicada, no proporcionaremos aquí los detalles, sino que presentaremos sólo los pasos necesarios para determinar $H(s)$ a partir de las especificaciones.

El filtro de Chebyshev se basa en los polinomios de Chebyshev, definidos así:

$$\begin{aligned} C_N(\omega) &= \cos(N \cos^{-1} \omega), & |\omega| \leq 1 \\ &= \cosh(N \cosh^{-1} \omega), & |\omega| > 1 \end{aligned} \quad (10.3.16)$$

Los polinomios de Chebyshev se pueden definir también mediante la fórmula de recurrencia

$$C_N(\omega) = 2\omega C_{N-1}(\omega) - C_{N-2}(\omega) \quad (10.3.17)$$

con $C_0(\omega) = 1$ y $C_1(\omega) = \omega$.

El filtro paso bajo de Chebyshev de orden N se define en función de $C_N(\omega)$:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\omega)} \quad (10.3.18)$$

Para determinar el comportamiento del filtro, notemos que para todo N los ceros de $C_N(\omega)$ se localizan en el intervalo $|\omega| \leq 1$. Además, para $|\omega| \leq 1$, $|C_N(\omega)| \leq 1$, y para $|\omega| > 1$, $|C_N(\omega)|$, se incrementa rápidamente a medida que $|\omega|$ crece. Por tanto, en el intervalo $|\omega| \leq 1$, $|H(\omega)|^2$ oscila alrededor de la unidad de forma que el valor máximo es 1 y el mínimo es $1/(1 + \varepsilon^2)$. A medida que $|\omega|$ crece, $|H(\omega)|^2$ se aproxima a cero rápidamente, proporcionando así una aproximación al filtro paso bajo ideal.

La función de amplitud correspondiente al filtro de Chebyshev se muestra en la Figura 10.3.4. Como se puede ver en la figura, $|H(\omega)|$ presenta un rizado entre 1 y $1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$. Como $C_N^2(1) = 1$ para todo N , se deduce que para $\omega = 1$,

$$|H(1)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad (10.3.19)$$

Para valores grandes de ω (es decir, para valores en la banda de paso), $|H(\omega)|$ se puede aproximar así:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\varepsilon C_N(\omega)} \quad (10.3.20)$$

La atenuación en dB (o pérdidas) con respecto al valor en $\omega = 0$ se puede expresar así:

$$\begin{aligned} \text{pérdidas} &= -20 \log_{10} |H(\omega)| \\ &= 20 \log \varepsilon + 20 \log C_N(\omega) \end{aligned} \quad (10.3.21)$$

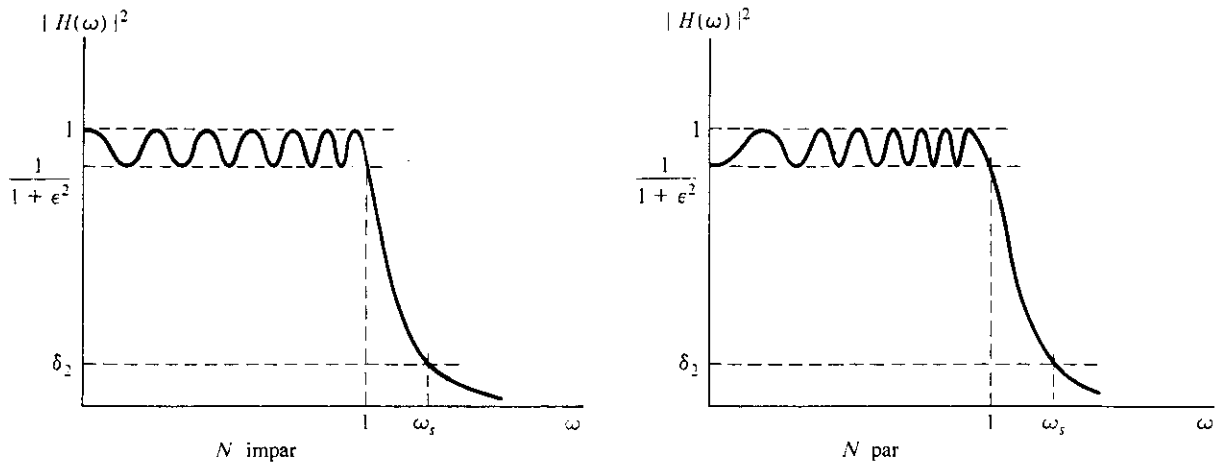


Figura 10.3.4. Característica de amplitud de la aproximación de Chebyshev.

Para valores grandes de ω , $C_N(\omega)$ se puede aproximar por $2^{N-1}\omega^N$, con lo que tenemos

$$\text{pérdidas} = 20 \log \varepsilon + 6(N - 1) + 20 N \log \omega \quad (10.3.22)$$

Las Ecuaciones (10.3.19) y (10.3.22) se pueden utilizar para determinar los dos parámetros N y ε , necesarios para el filtro de Chebyshev. El parámetro ε se determina utilizando las especificaciones de la banda de paso mediante la Ecuación (10.3.19). Este valor se utiliza después en la Ecuación (10.3.22), junto con las especificaciones de la banda eliminada, para determinar N . Para calcular $H(s)$ utilizaremos el parámetro

$$\beta = \frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \quad (10.3.23)$$

Los polos de $H(s)$, $s_k = \sigma_k + j\omega_k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, son

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sin\left(\frac{2k-1}{N}\right)\frac{\pi}{2} \sinh \beta \\ \omega_k &= \cos\left(\frac{2k-1}{N}\right)\frac{\pi}{2} \cosh \beta \end{aligned} \quad (10.3.24)$$

Se deduce que los polos están localizados en una elipse en el plano s , dada por la expresión

$$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^2 \beta} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^2 \beta} = 1 \quad (10.3.25)$$

El semieje mayor de la elipse está en el eje $j\omega$, y el semieje menor está en el eje σ . Los focos están en $\omega = \pm 1$, como se indica en la Figura 10.3.5. La frecuencia de corte a 3 dB se produce en el punto donde la elipse corta al eje $j\omega$, es decir, en $\omega = \cosh \beta$.

En la Ecuación (10.3.24) se puede ver que los polos del filtro de Chebyshev están relacionados con los polos del filtro de Butterworth del mismo orden. La Figura 10.3.6 mues-

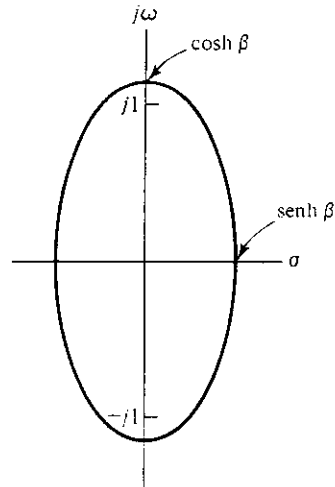


Figura 10.3.5. Polos del filtro de Chebyshev.

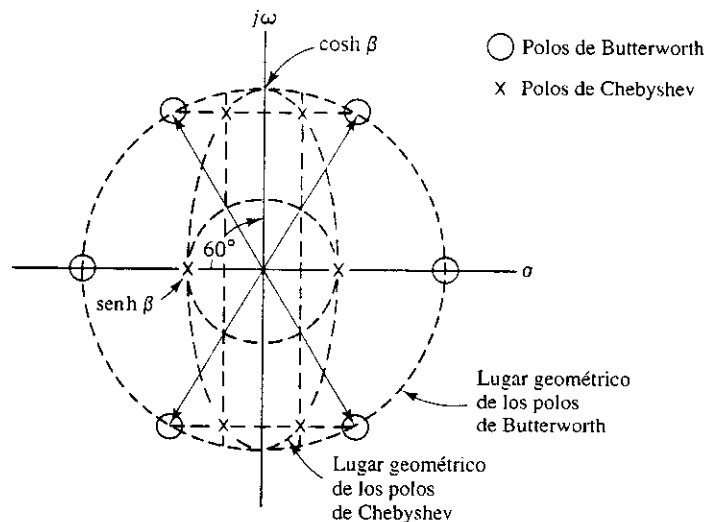


Figura 10.3.6. Relación entre los polos de Chebyshev y de Butterworth para $N = 3$.

tra la relación entre esos polos para $N = 3$, y se puede utilizar para determinar geoméricamente la posición de los polos del filtro de Chebyshev. La correspondiente función $H(s)$ se obtiene a partir de los polos del semiplano izquierdo.

Ejemplo 10.3.2 Consideremos el diseño de un filtro de Chebyshev con una atenuación inferior a 1 dB para $|\omega| \leq 1.000$ rad/s, y como máximo de 10 dB para $|\omega| \geq 5.000$ rad/s. En primer lugar, normalizaremos ω_p a 1, con lo que $\omega_s = 5$. De las especificaciones de la banda de paso, tenemos, aplicando la Ecuación (10.3.19),

$$20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = -1$$

Se obtiene $\varepsilon = 0,509$. Aplicando la Ecuación (10.3.22),

$$10 = 20 \log_{10} 0,509 + 6(N - 1) + 20N \log_{10} 5$$

con lo que $N = 1,0943$. Por lo tanto, utilizamos un valor de $N = 2$. El parámetro β se puede determinar utilizando la Ecuación (10.3.23), y es igual a 0,714. Para calcular los polos de Chebyshev, determinaremos los polos del correspondiente filtro de Butterworth del mismo orden y multiplicaremos las partes reales por $\sinh \beta$ y las partes imaginarias por $\cosh \beta$. De la Tabla 10.3 se pueden obtener los polos del filtro de Butterworth normalizado:

$$\frac{s}{\omega_p} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donde $\omega_p = 1.000$. Entonces, los polos de Chebyshev son

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1.000}{\sqrt{2}} (\sinh 0,714) \pm j \frac{1.000}{\sqrt{2}} (\cosh 0,714) \\ &= -545,31 \pm j892,92 \end{aligned}$$

Por tanto

$$H(s) = \frac{1}{(s + 545,31)^2 + (892,92)^2}$$

El correspondiente filtro con una ganancia unidad en continua es

$$H(s) = \frac{(545,31)^2 + (892,92)^2}{(s + 545,31)^2 + (892,92)^2}$$

La Figura 10.3.7 muestra la característica de amplitud de este filtro.

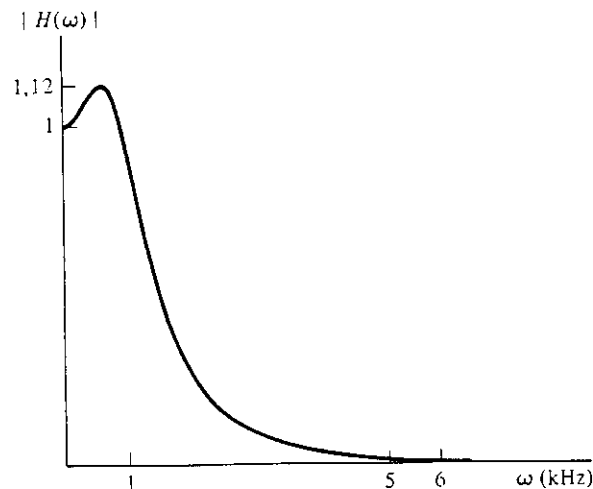


Figura 10.3.7. Característica de amplitud del filtro de Chebyshev del Ejemplo 10.3.2.

Utilizando funciones seno elíptico de Jacobi se puede obtener otra aproximación al filtro paso bajo ideal que, para un orden determinado del filtro tiene incluso una banda de transición menor que el filtro de Chebyshev. Los filtros resultantes se denominan filtros elípticos. El diseño de este tipo de filtros es complicado y no lo presentaremos aquí. Sí diremos, sin embargo, que los filtros elípticos tienen rizado en la banda de paso y en la banda eliminada. La Figura 10.3.8 muestra la característica de un filtro elíptico típico.

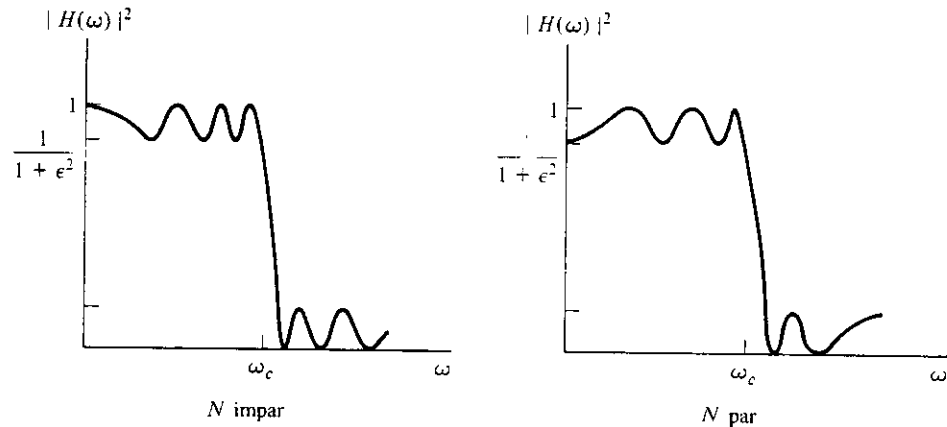


Figura 10.3.8. Característica de amplitud de un filtro elíptico.

10.4. FILTROS DIGITALES

En los últimos años, los filtros digitales han sustituido a los filtros analógicos en muchas aplicaciones debido a su mayor fiabilidad, mayor flexibilidad y superiores prestaciones. Los filtros digitales se diseñan para modificar de una manera específica las características espectrales de las señales en tiempo discreto, de la misma forma que los filtros analógicos lo hacen con las señales en tiempo continuo. Los filtros digitales se definen en términos de la variable Ω de la transformada de Fourier en tiempo discreto, y su procedimiento de diseño consiste en determinar su función de transferencia en tiempo discreto, $H(z)$, para cumplir unas determinadas especificaciones.

En ciertas aplicaciones en las que se desea filtrar una señal en tiempo continuo, el filtro analógico se implementa utilizando un filtro digital, por las razones comentadas anteriormente. Esta implementación requiere la conversión analógico-digital de la señal en tiempo continuo, con la que se obtiene una señal digital que se filtra mediante el filtro digital. La salida del filtro digital se transforma de nuevo en una señal continua mediante un conversor digital-analógico. Para obtener la realización digital equivalente de un filtro analógico, las especificaciones de éste, que estarán dadas en función de la variable ω de la transformada de Fourier en tiempo continuo, se deben convertir en un conjunto de especificaciones equivalentes en función de la variable Ω .

Como vimos anteriormente, los sistemas digitales (y por tanto, los filtros digitales), pueden ser FIR o IIR. Por supuesto, un filtro digital FIR no tiene equivalente en el dominio analógico. Sin embargo, como hemos visto en la sección anterior, existen varias técnicas bien determinadas para diseñar filtros IIR. Parece razonable entonces, probar y utilizar estas técnicas de diseño de filtros digitales IIR. En la siguiente sección presentaremos dos métodos comúnmente utilizados para el diseño de filtros digitales IIR que se basan en las técnicas de diseño de filtros analógicos. Por las razones que comentamos en la sección

anterior, limitaremos nuestra presentación a filtros paso bajo. El procedimiento consiste esencialmente en transformar las especificaciones del filtro digital en especificaciones analógicas equivalentes, diseñar un filtro analógico que cumpla las especificaciones y finalmente, convertir la función de transferencia del filtro analógico $H_a(s)$ en una función de transferencia equivalente en tiempo discreto $H(z)$.

10.4.1. Diseño de filtros digitales IIR por el método de invarianza al impulso

Un método bastante directo para establecer la equivalencia entre un sistema en tiempo discreto y el correspondiente sistema analógico es requerir que las respuestas de los dos sistemas a una entrada determinada sean equivalentes de acuerdo a algún criterio. Para obtener una equivalencia con sentido, supondremos en primer lugar que la salida $y_a(t)$ del sistema en tiempo continuo se muestrea con un período T apropiado. Se puede imponer entonces que la salida muestreada $y_a(nT)$ sea igual a la salida $y(n)$ del sistema en tiempo discreto. Si la entrada de prueba es el impulso unidad, la condición se convierte en que las repuestas al impulso de los dos sistemas tengan el mismo valor en los instantes de muestreo, es decir que

$$h_a(nT) = h(n) \quad (10.4.1)$$

Esta técnica se conoce como diseño por invarianza al impulso.

De la Ecuación (10.4.1) y de nuestra presentación en la Sección 7.5 se deduce que, bajo esta equivalencia, la relación entre la frecuencia digital Ω y la frecuencia analógica ω está determinada por la Ecuación (7.5.10)

$$\omega = \frac{\Omega}{T} \quad (10.4.2)$$

La Ecuación (10.4.2) se puede utilizar para convertir las especificaciones de un filtro digital en especificaciones equivalentes de un filtro analógico. Una vez que se ha determinado el filtro analógico $H_a(s)$, podemos obtener el filtro digital $H(z)$ calculando la transformada Z de la respuesta al impulso muestreada $h_a(nT)$. En la mayoría de los casos podremos pasar directamente de $H_a(s)$ a $H(z)$ descomponiendo $H_a(s)$ en fracciones simples y calculando la correspondiente transformada Z de cada uno de los términos, utilizando para ello una tabla de transformadas, como la Tabla 10.5. Los pasos a realizar se resumen a continuación:

1. Partiendo de las frecuencias de corte de la banda de paso y de la banda eliminada, Ω_p y Ω_s , determinar las correspondientes frecuencias analógicas equivalentes ω_p y ω_s .
2. Determinar la función de transferencia del filtro analógico, $H_a(s)$, utilizando las técnicas explicadas en la Sección 10.3.
3. Descomponer $H_a(s)$ en fracciones simples, y determinar la transformada Z de cada término utilizando una tabla de transformadas. Combinar estos términos para obtener $H(z)$.

Aunque la técnica de invarianza al impulso es muy directa, tiene una desventaja. Concretamente, en esencia estamos obteniendo un sistema en tiempo discreto a partir de un sistema en tiempo continuo mediante un proceso de muestreo. No olvidemos que el mues-

Tabla 10.5. Transformadas de Laplace con sus transformadas Z equivalentes

Transformada de Laplace, $H(s)$	Transformada Z, $H(z)$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z - \exp[-aT]}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tz \exp[-aT]}{(z - \exp[-aT])^2}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)} \left(\frac{z}{z - \exp[-aT]} - \frac{z}{z - \exp[-bT]} \right)$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - \exp[-aT])z}{a(z-1)(z - \exp[-aT])}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tz \exp[-aT]}{(z - \exp[-aT])^2}$
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \exp[-aT]} - \frac{aT \exp[-aT]z}{(z - \exp[-aT])^2}$
$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\frac{z \sen \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\frac{z \exp[-aT] \sen \omega_0 T}{z^2 - 2z \exp[-aT] \cos \omega_0 T + \exp[-2aT]}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\frac{z^2 - z \exp[-aT] \cos \omega_0 T}{z^2 - 2z \exp[-aT] \cos \omega_0 T + \exp[-2aT]}$

treo introduce solapamiento y que la respuesta en frecuencia correspondiente a la secuencia $h_a(nT)$, que se obtiene mediante la Ecuación (7.5.9), es

$$H(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\Omega + \frac{2\pi}{T} k\right) \quad (10.4.3)$$

con lo que

$$H(\Omega) = \frac{1}{T} H_a(\Omega) \quad (10.4.4)$$

sólo si

$$H_a(\omega) = 0, \quad |\omega| \geq \frac{\pi}{T} \quad (10.4.5)$$

lo que no sucede en los filtros paso bajo prácticos. Por lo tanto, el filtro digital resultante no cumplirá exactamente las especificaciones originales de diseño.

Podría parecer que una forma de reducir los efectos del solapamiento es disminuir el período de muestreo T . Sin embargo, como la frecuencia de corte de la banda de paso en el dominio analógico es $\omega_p = \Omega_p/T$, al disminuir T aumenta ω_p , con lo que se aumenta el solapamiento. Por consiguiente, el valor de T no tiene efectos en las prestaciones del filtro digital y se puede escoger como la unidad.

Para implementar un filtro analógico mediante un filtro digital, se sigue exactamente el procedimiento anterior, excepto que no se necesita el paso 1, ya que las especificaciones están directamente en el dominio analógico. De la Ecuación (10.4.3) se deduce que cuando el filtro analógico es de banda suficientemente limitada, el correspondiente filtro digital tiene una ganancia de $1/T$, que puede ser extremadamente alta para valores bajos de T . Por lo tanto, generalmente se multiplica por T la función de transferencia $H(z)$ resultante. La elección de T está determinada esencialmente por consideraciones del hardware. Ilustraremos el procedimiento en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.4.1 Calcular el filtro digital equivalente al filtro analógico de Butterworth obtenido en el Ejemplo 10.3.1 mediante el método de invarianza al impulso.

Aplicando el resultado del Ejemplo 10.3.1, y sustituyendo $\omega_c = 2.826,8$; la función de transferencia del filtro es

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{(2.826,8)^3}{s^3 + 2(2.826,8)s^2 + 2(2.826,8)^2s + (2.826,8)^3} \\ &= \frac{2.826,8}{s + 2.836,8} - \frac{2.826,8(s + 1.413,4)}{(s + 1.413,4)^2 + (2.448,1)^2} + \frac{0,5(2.826,8)^2}{(s + 1.413,4)^2 + (2.448,1)^2} \end{aligned}$$

Podemos determinar la función de transferencia equivalente en el dominio de la transformada Z mediante la Tabla 10.5

$$H(z) = 2.826,8 \left[\frac{z}{z - e^{-1.413,4T}} - \frac{z^2 - ze^{-1.413,4T} [\cos(2.448,1T) + \operatorname{sen}(2.448,1T)]}{z^2 - 2ze^{-1.413,4T} \cos(2.448,1T) + e^{-2.826,8T}} \right]$$

Si el intervalo de muestreo T vale 1 ms, obtenemos

$$H(z) = 2.826,8 \left[\frac{z}{z - 0,2433} - \frac{z^2 - 0,0973z}{z^2 - 0,3742z + 0,0592} \right]$$

que se puede normalizar a la amplitud deseada.

Ejemplo 10.4.2 Consideremos ahora el diseño de un filtro digital paso bajo de Butterworth que cumpla las siguientes especificaciones: la amplitud de la banda de paso debe mantenerse dentro de un margen de 2 dB para frecuencias inferiores a $0,2\pi$ radianes, y la amplitud de la banda eliminada, en el intervalo $0,4 < \Omega < \pi$ debe ser inferior a -10 dB. Supóngase que la amplitud en $\Omega = 0$ se encuentra normalizada a la unidad.

Si hacemos $\Omega_p = 0,2\pi$ y $\Omega_s = 0,4\pi$, teniendo en cuenta que el filtro de Butterworth tiene una característica monótona en amplitud, para que se cumplan las especificaciones debemos tener

$$20 \log_{10} |H(0,2\pi)| = -2, \quad \text{o} \quad |H(0,2\pi)|^2 = 10^{-0.2}$$

y

$$20 \log_{10} |H(0,4\pi)| = -10 \quad \text{o} \quad |H(0,4\pi)|^2 = 10^{-1}$$

De acuerdo con la técnica de diseño por invarianza al impulso obtenemos las especificaciones equivalentes en el dominio analógico haciendo $\omega = \Omega T$, con $T = 1$, y resulta

$$|H_a(0,2\pi)|^2 = 10^{-0.2}$$

$$|H_a(0,4\pi)|^2 = 10^{-1}$$

Para el filtro de Butterworth,

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

donde ω_c y N se deben determinar utilizando las especificaciones. Esto conduce a las ecuaciones

$$1 + \left(\frac{0,2\pi}{\omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.2}$$

$$1 + \left(\frac{0,4\pi}{\omega_c}\right)^{2N} = 10$$

Despejando N se obtiene $N = 1,9718$ con lo que escogemos $N = 2$. Con este valor de N , despejamos ω_c de cualquiera de las dos ecuaciones anteriores. Si utilizamos la primera ecuación, cumpliremos exactamente las especificaciones de la banda de paso, y cumpliremos en exceso las especificaciones de la banda eliminada. Si utilizamos la segunda ecuación, ocurrirá lo contrario. Suponiendo que utilizamos la primera ecuación obtenemos

$$\omega_c = 0,7185 \text{ rad/s}$$

El correspondiente filtro de Butterworth es

$$H_a(s) = \frac{1}{(s/\omega_c)^2 + \sqrt{2}(s/\omega_c) + 1} = \frac{0,5162}{s^2 + 1,016s + 0,5162}$$

cuya respuesta al impulso es

$$h_a(t) = 1,01 \exp[-0,508t] \sin 0,508t u(t)$$

La respuesta al impulso del filtro digital que se obtiene muestreando $h_a(t)$ con $T = 1$ es

$$h(n) = 1,01 \exp[-0,508n] \sin 0,508n u(n)$$

Tomando la correspondiente transformada Z y normalizando para que la amplitud en $\Omega = 0$ sea la unidad obtenemos

$$H(z) = \frac{0,5854z}{z^2 - 1,051z + 0,362}$$

La Figura 10.4.1 muestra una gráfica de $|H(\Omega)|$, con Ω en el intervalo $[0, \pi/2]$. Para este ejemplo concreto, el filtro analógico es de banda suficientemente limitada, con lo que los efectos de solapamiento no son apreciables. Sin embargo, esto en general no se cumple. Una posibilidad en este caso es escoger un valor de N más alto que el que se obtiene directamente de las especificaciones.

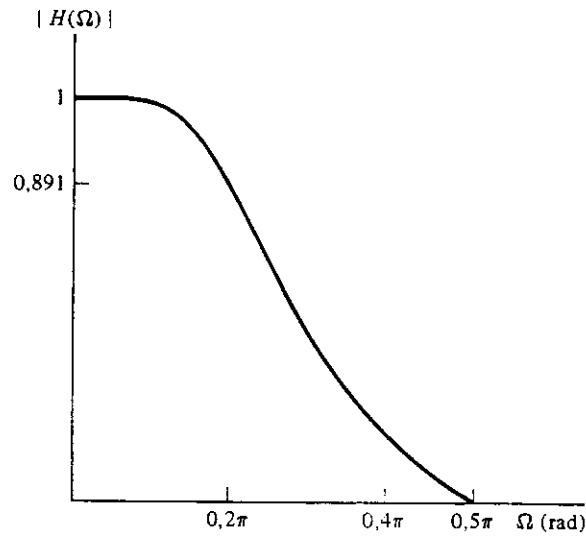


Figura 10.4.1. Función de amplitud del filtro de Butterworth diseñado en el Ejemplo 10.4.2.

10.4.2. Diseño de filtros IIR mediante la transformación bilineal

Como se ha explicado anteriormente, el diseño de filtros digitales mediante filtros analógicos requiere la transformación de especificaciones en el dominio discreto en especificaciones en el dominio analógico. La técnica de diseño por invarianza al impulso utiliza la transformación

$$\omega = \Omega/T$$

o, equivalentemente,

$$z = \exp[Ts]$$

Sin embargo, vimos en la Sección 8.8 que debido a la naturaleza de esta transformación, el diseño mediante invarianza al impulso puede producir problemas de solapamiento. Una forma de evitar esos problemas es utilizar una transformación que convierta el dominio z en un dominio similar al dominio s , de forma que la circunferencia unidad en el plano z se convierta en el eje vertical en el nuevo dominio, el interior de la circunferencia unidad se transforme en el semiplano izquierdo, y el exterior en el semiplano derecho. Este nuevo plano se puede tratar como el dominio analógico y utilizar técnicas estándar para calcular el filtro analógico equivalente. La transformación específica que se utiliza es

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (10.4.6)$$

o, expresada de otra forma,

$$z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s} \quad (10.4.7)$$

donde T es un parámetro que puede tomar cualquier valor conveniente. Se puede comprobar fácilmente que si hacemos $z = r^{-1} \exp[j\Omega]$ esta transformación, que se conoce como transformación bilineal, satisface realmente las tres condiciones mencionadas anteriormente. Tenemos

$$\begin{aligned} s = \sigma + j\omega &= \frac{2}{T} \frac{1 - r \exp[-j\Omega]}{1 + r \exp[-j\Omega]} \\ &= \frac{2}{T} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 + 2r \cos \Omega} + j \frac{2}{T} \frac{2r \sin \Omega}{1 + r^2 + 2r \cos \Omega} \end{aligned}$$

Para $r < 1$, se cumple que $\sigma > 0$, y para $r > 1$, tenemos que $\sigma < 0$. Para $r = 1$, la variable s es imaginaria pura, con

$$\omega = \frac{2}{T} \frac{\sin \Omega}{1 + \cos \Omega} = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2}$$

La Figura 10.4.2 muestra esta relación.

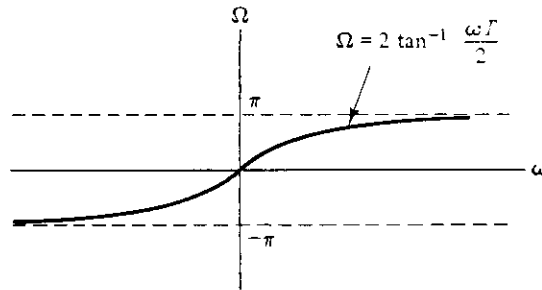


Figura 10.4.2. Relación entre Ω y ω mediante la transformación bilineal.

El procedimiento para obtener el filtro digital $H(z)$ se resume a continuación:

1. Dadas las especificaciones del filtro digital, calcular las correspondientes especificaciones del filtro analógico utilizando la relación

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2} \quad (10.4.8)$$

donde T se puede escoger arbitrariamente, por ejemplo, $T = 2$.

2. Calcular la correspondiente función de transferencia del filtro analógico, $H_a(s)$. Obtener el filtro digital equivalente mediante la relación

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} \quad (10.4.9)$$

El siguiente ejemplo ilustra el uso de la transformación bilineal en el diseño de filtros digitales.

Ejemplo 10.4.3 Consideraremos de nuevo el problema del Ejemplo 10.4.2, pero obtendremos un diseño de Butterworth utilizando el método de la transformación bilineal. Con $T = 2$, determinamos las correspondientes frecuencias de corte de la banda de paso y de la banda eliminada en el dominio analógico:

$$\omega_p = \tan \frac{0,2\pi}{2} = 0,3249$$

$$\omega_s = \tan \frac{0,4\pi}{2} = 0,7265$$

Para cumplir las especificaciones hacemos

$$1 + \left(\frac{0,3249}{\omega_c} \right)^{2N} = 10^{-0,2}$$

$$1 + \left(\frac{0,7265}{\omega_c} \right)^{2N} = 10^{-1}$$

y despejamos N , que vale $N = 1,695$. Escogiendo $N = 2$ y despejando ω_c como antes resulta

$$\omega_c = 0,4195$$

El correspondiente filtro analógico es

$$H_a(s) = \frac{0,176}{s^2 + 0,593s + 0,176}$$

Podemos obtener ahora el filtro digital $H(z)$ con ganancia en $\Omega = 0$ normalizada a la unidad

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{0,1355(z+1)^2}{z^2 - 2,174z + 1,716}$$

La Figura 10.4.3 muestra la característica de amplitud del filtro digital, con Ω en el intervalo $[0, \pi/2]$.

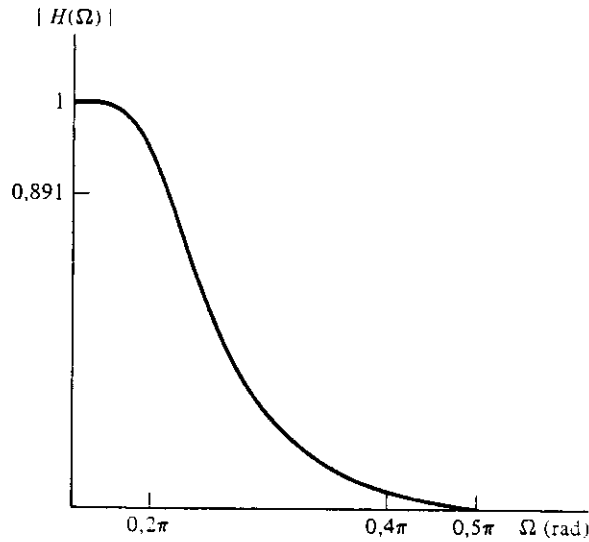


Figura 10.4.3. Característica de amplitud del filtro del Ejemplo 10.4.3, obtenido mediante la transformación bilineal.

10.4.3. Diseño de filtros FIR

En nuestras anteriores discusiones presentamos la idea de que es conveniente que los filtros tengan fase lineal. Aunque los filtros digitales IIR no tienen en general fase lineal, ésta se puede conseguir con un filtro digital FIR. En esta sección presentaremos una técnica para el diseño de filtros digitales FIR.

En primer lugar demostraremos que un filtro FIR de longitud N tiene una característica de fase lineal si su respuesta al impulso satisface la siguiente condición de simetría

$$h(n) = h(N - 1 - n) \quad (10.4.10)$$

Esto se puede verificar fácilmente determinando $H(\Omega)$. Consideraremos separadamente los casos de N par y de N impar. Para N par escribimos

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp[-j\Omega n] \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n) \exp[-j\Omega n] + \sum_{n=N/2}^{N-1} h(n) \exp[-j\Omega n] \end{aligned}$$

Si sustituimos ahora n por $N - n - 1$ en el segundo término de la última ecuación y utilizamos la Ecuación (10.4.10), obtenemos

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} h(n) \exp[-j\Omega n] + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} h(n) \exp[-j\Omega(N - 1 - n)]$$

que se puede escribir así:

$$H(\Omega) = \left\{ \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \cos \left[\Omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right] \right\} \exp \left[-j\Omega \left(\frac{N-1}{2} \right) \right]$$

Similarmente, para N impar, podemos demostrar que

$$H(\Omega) = \left\{ h \left(\frac{N-1}{2} \right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos \left[\Omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right] \right\} \exp \left[-j\Omega \left(\frac{N-1}{2} \right) \right]$$

En ambos casos, los términos entre llaves son reales, con lo que la fase de $H(\Omega)$ vendrá dada por la exponencial compleja. Por lo tanto, el sistema presenta un desplazamiento de fase lineal, con un retardo de $(N-1)/2$ muestras.

Dada una respuesta en frecuencia deseada $H_d(\Omega)$, como la de un filtro paso bajo ideal, simétrico con respecto al origen, la correspondiente respuesta al impulso $h_d(n)$ es simétrica con respecto al punto $n=0$ pero en general es de duración infinita. La forma más directa de obtener un filtro FIR equivalente de longitud N es truncar simplemente esta secuencia infinita. La operación de truncamiento, como ya discutimos en el Capítulo 9 al hablar de la DFT, se puede considerar como el resultado de multiplicar la secuencia de duración infinita por una ventana $w(n)$. Si $h_d(n)$ es simétrica con respecto al punto $n=0$ obtenemos un filtro de fase lineal que sin embargo no es causal. Podemos obtener una respuesta al impulso causal desplazando la respuesta truncada $(N-1)/2$ muestras a la derecha. El filtro digital $H(z)$ deseado se obtiene mediante la transformada Z de esta secuencia truncada y desplazada. A continuación resumimos estos pasos:

1. A partir de la respuesta en frecuencia deseada, $H_d(\Omega)$, obtener la correspondiente respuesta al impulso $h_d(n)$.
2. Multiplicar $h_d(n)$ por la función de ventana $w(n)$.
3. Calcular la respuesta al impulso del filtro digital:

$$h(n) = h_d[n - (N-1)/2]w(n)$$

y determinar $H(z)$. Alternativamente, podemos calcular la transformada Z , $H'(z)$, de la secuencia $h_d(n)w(n)$, y calcular $H(z)$:

$$H(z) = z^{-(N-1)/2} H'(z)$$

Como dijimos antes, ya hemos encontrado la operación de truncamiento del paso 2 anteriormente, en nuestra presentación de la DFT en el Capítulo 9. Allí vimos que la operación de truncamiento hace que la respuesta en frecuencia se expanda.

En general, las ventanas con lóbulos principales anchos causan una mayor expansión en frecuencia que las ventanas con lóbulos principales estrechos. La Figura 10.4.4 muestra el efecto de utilizar una ventana rectangular sobre la característica del filtro paso bajo ideal. Como puede verse, la anchura de la banda de transición del filtro resultante es aproximadamente igual a la anchura del lóbulo principal de la ventana y es, por tanto, proporcional a la longitud de la ventana N . Por consiguiente, la elección de N implica un compromiso entre banda de transición y longitud del filtro.

A continuación presentamos algunas funciones de ventana comúnmente utilizadas.

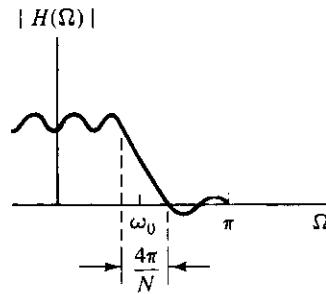


Figura 10.4.4. Respuesta en frecuencia obtenida aplicando una ventana rectangular a la respuesta del filtro ideal.

Rectangular:

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (10.4.11a)$$

Bartlett:

$$w_B(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (10.4.11b)$$

Hanning:

$$w_{Han}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (10.4.11c)$$

Hamming:

$$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (10.4.11d)$$

Blackman:

$$w_{Bl}(n) = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (10.4.11e)$$

Kaiser:

$$w_K(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left(\alpha\left[\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{N-1}{2}\right)^2\right]^{1/2}\right)}{I_0\left(\alpha\left(\frac{N-1}{2}\right)\right)}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (10.4.11f)$$

donde $I_0(x)$ es la función de Bessel modificada de primera clase de orden cero, cuya expresión es $I_0(x) = \int_0^{2\pi} \exp[x \cos \theta] d\theta / 2\pi$ y α es un parámetro que afecta a la anchura relativa del lóbulo principal y de los lóbulos laterales. Si es cero, obtenemos la ventana rectangular, y si $\alpha = 5,414$ obtenemos la ventana de Hamming. En general, a medida que α crece, el lóbulo principal se hace más ancho y los lóbulos laterales más pequeños. De todas las ventanas presentadas anteriormente, la más comúnmente utilizada es la ventana de Hamming y la más versátil, la de Kaiser.

Ejemplo 10.4.4 Consideremos el diseño de un filtro digital FIR de nueve puntos que se aproxime a un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte $\Omega_c = 0,2\pi$. La respuesta al impulso del filtro deseado es

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-0,2\pi}^{0,2\pi} \exp[j\Omega n] d\Omega = \frac{\sin 0,2\pi n}{\pi n}$$

Para una ventana rectangular de longitud 9, la correspondiente respuesta al impulso se obtiene evaluando $h_d(n)$ en el intervalo $-4 \leq n \leq 4$. Obtenemos

$$h_d(n) = \left\{ \frac{0,147}{\pi}, \frac{0,317}{\pi}, \frac{0,475}{\pi}, \frac{0,588}{\pi}, 1, \frac{0,588}{\pi}, \frac{0,475}{\pi}, \frac{0,317}{\pi}, \frac{0,147}{\pi} \right\}$$

↑

La función del filtro es

$$H'(z) = \frac{0,147}{\pi} z^4 + \frac{0,317}{\pi} z^3 + \frac{0,475}{\pi} z^2 + \frac{0,588}{\pi} z + 1 + \frac{0,588}{\pi} z^{-1} + \frac{0,475}{\pi} z^{-2} + \frac{0,317}{\pi} z^{-3} + \frac{0,147}{\pi} z^{-4}$$

con lo que

$$H(z) = z^{-4} H'(z) = \frac{0,147}{\pi} (1 + z^{-8}) + \frac{0,317}{\pi} (z^{-1} + z^{-7}) + \frac{0,475}{\pi} (z^{-2} + z^{-6}) + \frac{0,588}{\pi} (z^{-3} + z^{-5}) + z^{-4}$$

Para $N = 9$, la ventana de Hamming definida en la Ecuación (10.4.11d) corresponde a la secuencia

$$w(n) = \{0,081, 0,215, 0,541, 0,865, 1, 0,865, 0,541, 0,215, 0,081\}$$

↑

Por lo tanto, tenemos

$$h_d(n)W(n) = \left\{ \frac{0,012}{\pi}, \frac{0,068}{\pi}, \frac{0,257}{\pi}, \frac{0,508}{\pi}, 1, \frac{0,508}{\pi}, \frac{0,257}{\pi}, \frac{0,068}{\pi}, \frac{0,012}{\pi} \right\}$$

↑

La función del filtro es

$$H'(z) = \frac{0,012}{\pi} z^4 + \frac{0,068}{\pi} z^3 + \frac{0,257}{\pi} z^2 + \frac{0,508}{\pi} z + 1 + \frac{0,508}{\pi} z^{-1} + \frac{0,257}{\pi} z^{-2} + \frac{0,068}{\pi} z^{-3} + \frac{0,012}{\pi} z^{-4}$$

Finalmente

$$H(z) = z^{-4}H'(z) = \frac{0,012}{\pi} (1 + z^{-8}) + \frac{0,068}{\pi} (z^{-1} + z^{-7}) + \frac{0,257}{\pi} (z^{-2} + z^{-6}) + \frac{0,508}{\pi} (z^{-3} + z^{-5}) + z^{-4}$$

La Figura 10.4.5 muestra las respuestas en frecuencia de los filtros que se obtienen aplicando las ventanas rectangular y de Hamming, con ganancia en $\Omega = 0$ normalizada a la unidad. Como se puede ver en la figura, la respuesta correspondiente a la ventana de Hamming es más suave que la de la ventana rectangular.

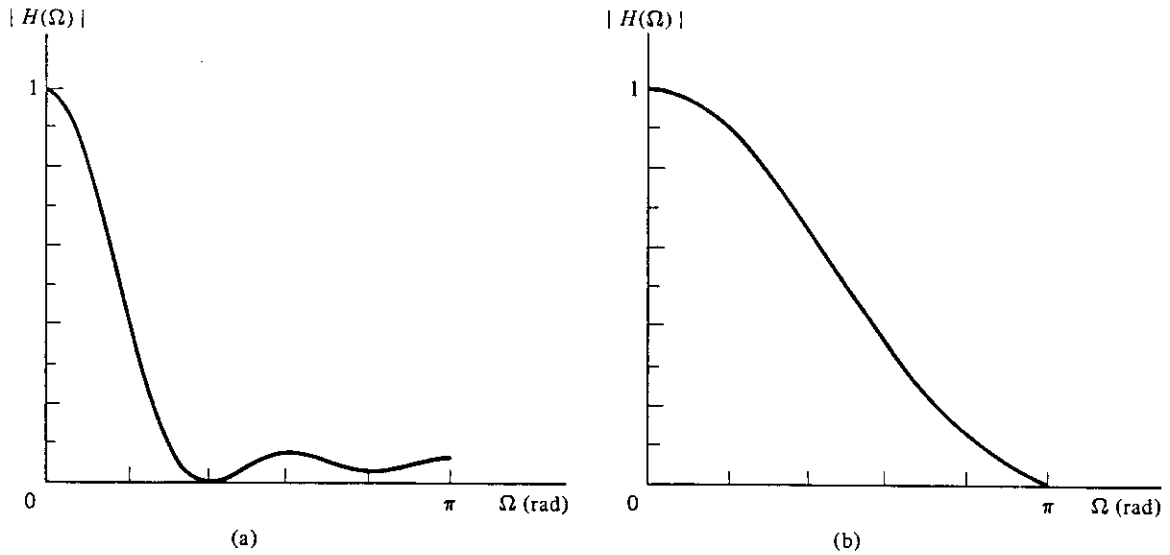


Figura 10.4.5. Respuesta del filtro digital FIR del ejemplo 10.4.4. (a) Ventana rectangular. (b) Ventana de Hamming.

Ejemplo 10.4.5 Los filtros digitales FIR se pueden utilizar para aproximar filtros como el diferenciador ideal o el transformador de Hilbert, que no se pueden realizar en el dominio analógico. En este dominio, el diferenciador ideal corresponde a la respuesta al impulso

$$H(\omega) = j\omega$$

mientras que el transformador de Hilbert corresponde a la respuesta al impulso

$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$$

Para diseñar la implementación en tiempo discreto de estos filtros, comenzaremos especificando la respuesta deseada en el dominio de la frecuencia

$$H_d(\omega) = H(\omega), \quad -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$$

donde $\omega_s = 2\pi/T$ para algún valor de T . Equivalentemente,

$$H_d(\Omega) = H(\omega T), \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi$$

donde $\Omega = \omega T$. Como $H_d(\Omega)$ es periódica en Ω de período 2π , podemos desarrollarla en serie de Fourier

$$H_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-jn\Omega}$$

donde los coeficientes $h_d(n)$ son las muestras de la correspondiente respuesta al impulso, dada por

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\Omega) e^{jn\Omega} d\Omega$$

Como hemos visto anteriormente, si la función en frecuencia deseada $H_d(\Omega)$ es real pura, la respuesta al impulso es simétrica y par. Es decir, $h_d(n) = h_d(-n)$. Por otra parte, si la respuesta en frecuencia es imaginaria pura, la respuesta al impulso es simétrica e impar, es decir, $h_d(n) = -h_d(-n)$.

Podemos diseñar ahora un filtro digital FIR siguiendo el procedimiento dado anteriormente. Ilustraremos esta idea para el caso del transformador de Hilbert. Este transformador se utiliza para generar señales en cuadratura de fase con respecto a una señal sinusoidal (o, de forma más general, con respecto a una señal de entrada de banda estrecha). Es decir, si la entrada al transformador de Hilbert es la señal $x_a(t) = \cos \omega_0 t$, la salida es $y_a(t) = \sin \omega_0 t$. El transformador de Hilbert se utiliza en sistemas de comunicaciones, en varios esquemas de modulación.

La respuesta al impulso del transformador de Hilbert se obtiene así:

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -j \operatorname{sgn}(\Omega) e^{jn\Omega} d\Omega \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Para una ventana rectangular de longitud 15 obtenemos

$$h_d(n) = \left\{ -\frac{2}{7\pi}, 0, -\frac{2}{5\pi}, 0, -\frac{2}{3\pi}, 0, -\frac{2}{\pi}, 0, \frac{2}{\pi}, 0, \frac{2}{3\pi}, 0, \frac{2}{5\pi}, 0, \frac{2}{7\pi} \right\}$$

que se puede realizar con un retardo de siete muestras mediante la transformación

$$H(z) = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{7} - \frac{1}{5} z^{-2} - \frac{1}{3} z^{-4} - z^{-6} + z^{-8} + \frac{1}{3} z^{-10} + \frac{1}{5} z^{-12} + \frac{1}{7} z^{-14} \right]$$

La respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ de este filtro se muestra en la Figura 10.4.6. Como puede verse, la respuesta presenta un rizado considerable. Como se dijo anteriormente, los rizados se pueden reducir utilizando ventanas diferentes a la rectangular. La figura también muestra la respuesta correspondiente a la ventana de Hamming.

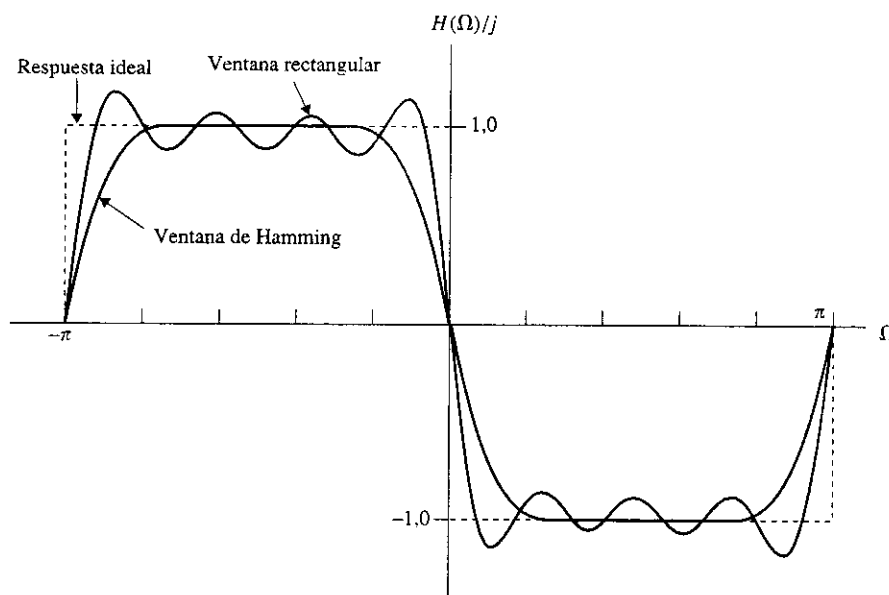


Figura 10.4.6. Respuesta en frecuencia del transformador de Hilbert.

10.4.4. Diseño asistido por computador de filtros digitales

En los últimos años el uso de técnicas asistidas por computador para el diseño de filtros digitales se ha extendido de forma considerable, y han aparecido algunos paquetes software para la realización de los diseños. Se han desarrollado técnicas tanto para filtros FIR como para filtros IIR que, en general, requieren la minimización de una función de coste adecuadamente escogida. Dada una respuesta en frecuencia deseada, $H_d(\Omega)$, se selecciona un filtro FIR o IIR de orden fijo, y se expresa la respuesta en frecuencia de este filtro $H(\Omega)$ en función del vector $\mathbf{a}$ de los coeficientes del filtro. La diferencia entre las dos respuestas, que representa la desviación con respecto a la respuesta deseada, es una función de $\mathbf{a}$. Asociamos una función de coste a esta diferencia y buscamos el conjunto de coeficientes del filtro, $\mathbf{a}$, que minimiza esta función de coste. Una función de coste típica puede ser de la forma

$$J(\mathbf{a}) = \int_{-\pi}^{\pi} W(\Omega) |H_d(\Omega) - H(\Omega)|^2 d\Omega \quad (10.4.12)$$

donde $W(\Omega)$ es una función de peso no negativa que refleja la importancia asignada a la desviación con respecto a la respuesta deseada en un intervalo concreto de frecuencias. $W(\Omega)$ se escoge para que tome valores altos en los intervalos de frecuencias considerados importantes.

En muchas ocasiones, en vez de minimizar la desviación en todas las frecuencias, como se indica en la Ecuación (10.4.12), podemos escoger realizar la minimización sólo en un número finito de frecuencias. La función de coste es entonces

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^M W(\Omega_i) |H_d(\Omega_i) - H(\Omega_i)|^2 \quad (10.4.13)$$

donde Ω_i , $1 \leq i \leq M$ es un conjunto de muestras en frecuencia en el intervalo de interés. Típicamente, el problema de minimización es bastante complejo y las ecuaciones resultantes no se pueden resolver analíticamente. Generalmente se emplean procedimientos de búsqueda iterativa para determinar un conjunto óptimo de coeficientes del filtro. Se comienza con una selección inicial arbitraria de los coeficientes del filtro y se van modificando sucesivamente de forma que la función de coste resultante se reduzca en cada paso. El procedimiento se detiene cuando las modificaciones posteriores de los coeficientes no producen una reducción de la función de coste. Hay disponibles varios algoritmos estándar y diversos paquetes software para determinar los coeficientes óptimos del filtro.

Una técnica popular para el diseño de filtros FIR se basa en el hecho de que la respuesta en frecuencia de un filtro FIR de fase lineal se puede expresar como un polinomio trigonométrico similar a los polinomios de Chebyshev. Los coeficientes del filtro se escogen para minimizar la máxima desviación con respecto a la respuesta deseada. Existen también programas de computador para determinar los coeficientes óptimos del filtro en este caso.

10.5. RESUMEN

- Los filtros selectivos en frecuencia se clasifican en paso bajo, paso alto, paso banda y banda eliminada.
- La banda de paso de un filtro es el intervalo de frecuencias que pasan sin atenuación. La banda eliminada es el intervalo de frecuencias que se atenúan completamente.
- Las especificaciones del filtro indican generalmente la desviación permisible con respecto a la característica ideal en la banda de paso y en la banda eliminada, y especifican una banda de transición entre las dos.
- El diseño de filtros consiste en obtener una aproximación analítica a la característica deseada del filtro en forma de función de transferencia, es decir, $H(s)$ para filtros analógicos y $H(z)$ para filtros digitales.
- Las transformaciones de frecuencia se utilizan para convertir un tipo de filtro en otro.
- Dos filtros paso bajo muy populares son los filtros de Butterworth y de Chebyshev. El filtro de Butterworth tiene una característica monótonamente decreciente que tiende a cero de forma suave. El filtro de Chebyshev presenta rizado en la banda de paso, pero es monótonamente decreciente en las bandas eliminada y de transición.
- Un determinado conjunto de especificaciones puede ser satisfecho por un filtro de Chebyshev de orden inferior que un filtro de Butterworth.

- Los polos del filtro de Butterworth están uniformemente espaciados en el círculo unidad del plano s . Los polos del filtro de Chebyshev se localizan en una elipse en el plano s y se pueden obtener geoméricamente a partir de los polos del filtro de Butterworth.
- Los filtros digitales pueden ser FIR e IIR.
- Los filtros digitales IIR se pueden obtener partiendo de diseños analógicos equivalentes utilizando la técnica de invarianza al impulso o la de transformación bilineal.
- Los filtros digitales diseñados utilizando la técnica de respuesta al impulso presentan distorsión debida al solapamiento. Si se utiliza la transformación bilineal no aparece distorsión por solapamiento.
- Los filtros digitales FIR a menudo se escogen con fase lineal. Un método para obtener un filtro FIR es determinar la respuesta al impulso $h_d(n)$ correspondiente a la característica del filtro deseada $H_d(\Omega)$, y truncar la secuencia resultante multiplicándola por una función de ventana adecuada.
- Fijada la longitud del filtro, la banda de transición depende de la ventana utilizada.

10.6. LISTA DE TÉRMINOS IMPORTANTES

Banda de paso	Filtro FIR
Banda de transición	Filtro IIR
Error de solapamiento	Filtro paso alto
Especificaciones del filtro	Filtro paso bajo
Fase lineal	Filtro paso banda
Filtro analógico	Filtro selectivo en frecuencia
Filtro de banda eliminada	Función de ventana
Filtro de Butterworth	Invarianza al impulso
Filtro de Chebyshev	Transformación bilineal
Filtro digital	Transformaciones en frecuencia

10.7. PROBLEMAS

- 10.1. Diseñar un filtro analógico paso bajo de Butterworth que cumpla las siguientes especificaciones: la atenuación será menor que 1,5 dB hasta 1 kHz y como mínimo de 15 dB para frecuencias mayores que 4 kHz.
- 10.2. Utilizar la transformación de frecuencia de la Sección 10.2 para obtener un filtro de Butterworth analógico cuya atenuación sea menor que 1,5 dB hasta 3 kHz, partiendo del diseño realizado en el Problema 10.1.
- 10.3. Diseñar un filtro paso banda de Butterworth que cumpla las siguientes especificaciones:

$$\omega_{c_1} = \text{frecuencia de corte inferior} = 200 \text{ Hz}$$

$$\omega_{c_2} = \text{frecuencia de corte superior} = 300 \text{ Hz}$$

La atenuación en la banda de paso debe ser menor que 1 dB. La atenuación en la banda eliminada debe ser como mínimo de 10 dB.

- 10.4. Se desea diseñar un filtro de Chebyshev paso bajo con un rizado ≤ 2 dB en la banda de paso y una frecuencia de corte de 1.500 Hz. La atenuación para frecuencias mayores de 5.000 Hz. debe ser como mínimo de 20 dB. Calcular ϵ , N y $H(s)$.
- 10.5. Consideremos los filtros de Butterworth y de Chebyshev de tercer orden con frecuencia de corte a 3 dB normalizada a 1 en ambos casos. Comparar y comentar las correspondientes características de las bandas de paso y de las bandas eliminadas.
- 10.6. En el problema anterior ¿cuál es el orden del filtro de Butterworth comparable al filtro de Chebyshev de orden 3?
- 10.7. Diseñar un filtro de Chebyshev que cumpla las especificaciones del Problema 10.1. Comparar la respuesta en frecuencia del filtro resultante con la del filtro de Butterworth del Problema 10.1
- 10.8. Obtener el equivalente digital del filtro paso bajo del Problema 10.1 utilizando el método de invarianza al impulso. Suponer las frecuencias de muestreo de (a) 6 kHz y (b) 10 kHz.
- 10.9. Dibujar las respuestas en frecuencia de los filtros digitales del Problema 10.8. Comentar los resultados.
- 10.10. La técnica de transformación bilineal permite diseñar filtros digitales IIR utilizando técnicas estándar de diseño de filtros analógicos. Sin embargo, si deseamos sustituir un filtro analógico por una combinación de A/D —filtro digital— D/A es necesario transformar previamente las frecuencias de corte antes de diseñar el filtro analógico. Por tanto, si deseamos sustituir un filtro analógico de Butterworth por un filtro digital, diseñaremos primero el filtro analógico sustituyendo las frecuencias de corte de la banda de paso y de la banda eliminada, ω_p y ω_s , respectivamente, por

$$\omega_p^d = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_p T}{2}$$

$$\omega_s^d = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_s T}{2}$$

El filtro digital equivalente se obtiene entonces a partir del diseño analógico utilizando la Ecuación (10.4.9). Utilizar este método para obtener un filtro digital que sustituya al filtro analógico en el Problema 10.1, suponiendo que la frecuencia de muestreo es de 3 kHz.

- 10.11. Repetir el Problema 10.10 para el filtro paso banda del Problema 10.4.
- 10.12. (a) Demostrar que la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ de un filtro es (i) real pura si la respuesta al impulso $h(n)$ es simétrica y par (es decir, $h(n) = h(-n)$) y (ii) imaginaria pura si $h(n)$ es simétrica e impar (es decir, $h(n) = -h(-n)$).
- (b) Utilizar el resultado del apartado (a) para determinar la fase de un filtro FIR de N puntos si (i) $h(n) = h(N-1-n)$ y (ii) $h(n) = -h(N-1-n)$.
- 10.13. (a) El diferenciador ideal tiene como respuesta en frecuencia

$$H_d(\Omega) = j\Omega \quad 0 \leq |\Omega| \leq \pi$$

Demostrar que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $H_d(\Omega)$ son

$$h_d(n) = \frac{(-1)^n}{n}$$

- (b) Teniendo en cuenta el apartado anterior, diseñar un diferenciador de 10 puntos utilizando una ventana rectangular y una ventana de Hamming.
- 10.14.**
- (a) Diseñar un filtro FIR de 11 etapas ($N = 12$) que se aproxime a la característica del filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte de $\pi/6$ radianes.
 - (b) Dibujar la respuesta en frecuencia del filtro diseñado en el Apartado (a).
 - (c) Utilizando la ventana de Hanning, modificar los resultados del Apartado (a). Dibujar la respuesta en frecuencia del filtro resultante, y comentarla.

Apéndice A

Números complejos

Muchos problemas de ingeniería se pueden tratar y resolver utilizando métodos de análisis complejo. En términos generales, estos problemas se pueden dividir en dos grandes clases. La primera clase está formada por problemas elementales, para los que es suficiente el conocimiento de números complejos y de cálculo. Esta clase de problemas encuentra aplicación en ecuaciones diferenciales, circuitos eléctricos y análisis de señales y sistemas. La segunda clase de problemas requiere un conocimiento detallado de teoría de funciones complejas analíticas. Esta clase de problemas tiene aplicación en electrostática, electromagnetismo y transferencia de calor.

En este apéndice nos centraremos en problemas de la primera clase. Los problemas de la segunda clase se salen de los objetivos de este libro.

A.1. DEFINICIÓN

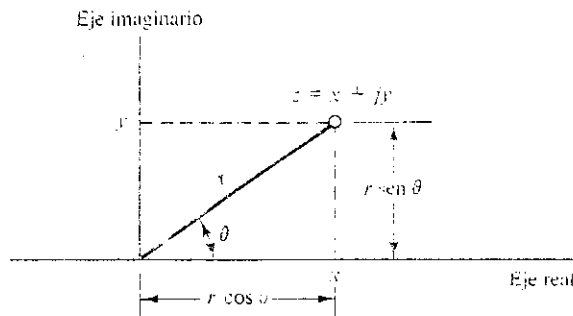
Un número complejo $z = x + jy$, siendo $j = \sqrt{-1}$, consta de dos partes: la parte real, x , y la parte imaginaria, y ¹. Esta forma de representación de números complejos se denomina forma rectangular o cartesiana, ya que z se puede representar en coordenadas rectangulares mediante el punto (x, y) , como se muestra en la Figura A.1.

El eje horizontal x se denomina eje real, y el eje vertical y se denomina eje imaginario. El plano x - y en el que se representan los números complejos utilizando este formato se denomina plano complejo. Dos números complejos son iguales si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

Un número complejo z se puede representar también en forma polar. Las coordenadas polares r y θ están relacionadas con las coordenadas cartesianas x e y mediante las expresiones

$$x = r \cos \theta \quad y \quad y = r \sin \theta \quad (\text{A.1})$$

¹ Los matemáticos usan i para representar $\sqrt{-1}$, pero los ingenieros en electricidad y electrónica utilizan para este propósito la letra j , ya que la i se emplea generalmente para representar la corriente en los circuitos eléctricos.

Figura A.1. El número complejo z en el plano complejo.

Por lo tanto, el número complejo z se puede escribir así:

$$z = r \cos \theta + jr \sin \theta \quad (\text{A.2})$$

lo que se conoce como forma polar o trigonométrica de un número complejo. Utilizando la identidad de Euler,

$$\exp[j\theta] = \cos \theta + j \sin \theta$$

podemos expresar en número complejo z de la Ecuación (A.2) en forma exponencial:

$$z = r \exp[j\theta] \quad (\text{A.3})$$

donde r , el módulo de z se expresa también como $|z|$. Observando la Figura A.1,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arcsen \frac{y}{r} = \arccos \frac{x}{r} \quad (\text{A.5})$$

El ángulo θ se denomina argumento o fase de z , y se expresa como $\angle z$. Se mide en radianes. El argumento se define sólo para los números complejos distintos de cero, y no cambia cuando su valor se incrementa o decrementa en múltiplos enteros de 2π . El valor de θ que pertenece al intervalo

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

se denomina valor principal del argumento de z . Geométricamente, $|z|$ es la longitud del vector que va desde el origen al punto z del plano complejo, y θ es el ángulo medido desde el eje x positivo hasta z .

Ejemplo A.1

Dado el número complejo $z = 1 + j\sqrt{3}$,

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad \text{y} \quad \angle z = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

El valor principal de $\angle z$ es $\pi/3$ y, por lo tanto,

$$z = 2(\cos \pi/3 + j \sin \pi/3)$$

El complejo conjugado de z se define así:

$$z^* = x - jy \quad (\text{A.6})$$

Como

$$z + z^* = 2x \quad \text{y} \quad z - z^* = 2jy \quad (\text{A.7})$$

se deduce que

$$\operatorname{Re}\{z\} = x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}\{z\} = y = \frac{1}{2j}(z - z^*) \quad (\text{A.8})$$

Nótese que si $z = z^*$, el número complejo es real, y que si $z = -z^*$, el número complejo es imaginario puro.

A.2. OPERACIONES ARITMÉTICAS

A.2.1. Suma y diferencia

La suma y la diferencia de dos números complejos se definen, respectivamente, así:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad (\text{A.9})$$

y

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \quad (\text{A.10})$$

Estas operaciones se ilustran geoméricamente en la Figura A.2 y se pueden interpretar de acuerdo con la «ley del paralelogramo» para la suma de fuerzas en mecánica.

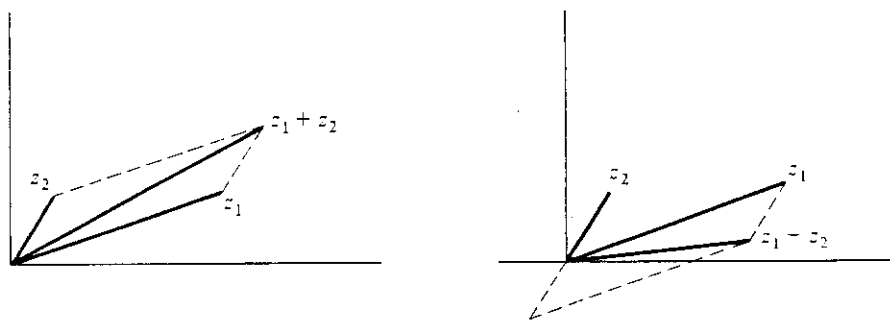


Figura A.2. Suma y diferencia de números complejos.

A.2.2. Producto

El producto $z_1 z_2$ se define así:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

que en forma polar se puede expresar como

$$z_1 z_2 = r_1 \exp[j\theta_1] r_2 \exp[j\theta_2] = r_1 r_2 \exp[j(\theta_1 + \theta_2)] \quad (\text{A.12})$$

Es decir, el módulo del producto de dos números complejos es el producto de los módulos de los dos números, y la fase del producto es la suma de las fases.

A.2.3. División

La división es la operación inversa a la multiplicación. El cociente z_1/z_2 se obtiene multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado de z_2 :

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1 + jy_1)}{(x_2 + jy_2)} \\ &= \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

La división se realiza más fácilmente en forma polar:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 \exp[j\theta_1]}{r_2 \exp[j\theta_2]} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \exp[j(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Es decir, el módulo del cociente es el cociente de los módulos, y la fase del cociente es la diferencia de la fase del numerador y la fase del denominador.

Dados tres números complejos cualesquiera z_1 , z_2 y z_3 , se cumplen las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

- Propiedad asociativa:

$$\begin{cases} (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

- Propiedad distributiva:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (\text{A.17})$$

A.3. POTENCIAS Y RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS

La n -ésima potencia del número complejo

$$z = r \exp[j\theta]$$

es

$$z^n = r^n \exp[jn\theta] = r^n (\cos n\theta + j \operatorname{sen} n\theta)$$

de donde se puede obtener la denominada fórmula de De Moivre²:

$$(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)^n = (\cos n\theta + j \operatorname{sen} n\theta) \quad (\text{A.18})$$

Por ejemplo,

$$(1 + j)^5 = (\sqrt{2} \exp[j\pi/4])^5 = 4\sqrt{2} \exp[j5\pi/4] = -4 - j4$$

La raíz n -ésima de un número complejo z es otro número complejo w tal que $w^n = z$. Por lo tanto, para calcular la raíz n -ésima de z tenemos que resolver la ecuación

$$w^n - |z| \exp[j\theta] = 0$$

que es de grado n y por tanto, tiene n raíces. La expresión de estas raíces es

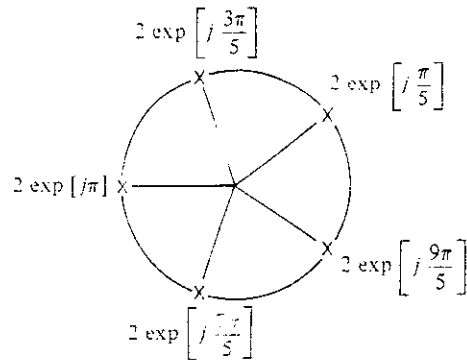
$$\begin{aligned} w_1 &= |z|^{1/n} \exp\left[j \frac{\theta}{n}\right] \\ w_2 &= |z|^{1/n} \exp\left[j \frac{\theta + 2\pi}{n}\right] \\ w_3 &= |z|^{1/n} \exp\left[j \frac{\theta + 4\pi}{n}\right] \\ &\vdots \\ w_n &= |z|^{1/n} \exp\left[j \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}\right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Por ejemplo, las cinco raíces de $32 \exp[j\pi]$ son

$$\begin{aligned} w_1 &= 2 \exp\left[j \frac{\pi}{5}\right], & w_2 &= 2 \exp\left[j \frac{3\pi}{5}\right], & w_3 &= 2 \exp[j\pi], \\ w_4 &= 2 \exp\left[j \frac{7\pi}{5}\right], & w_5 &= 2 \exp\left[j \frac{9\pi}{5}\right] \end{aligned}$$

Nótese que las raíces de un número complejo están dispuestas en una circunferencia del plano complejo, cuyo radio es $|z|^{1/n}$. Dichas raíces se distribuyen uniformemente en la circunferencia, siendo el ángulo entre raíces adyacentes de $2\pi/n$ radianes. La Figura A.3 muestra las cinco raíces de $32 \exp[j\pi]$.

² Abraham De Moivre (1667-1754) es el matemático francés que presentó los números imaginarios en trigonometría y contribuyó a la teoría de la probabilidad matemática.

Figura A.3. Las raíces de $32 \exp[j\pi]$.

A.4. DESIGUALDADES

Los números complejos cumplen la importante desigualdad del triángulo,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{A.20})$$

Es decir, el módulo de la suma de dos números complejos es, como máximo, igual a la suma de los módulos de los dos números. Esta desigualdad se deduce teniendo en cuenta que los números 0 , z_1 y $z_1 + z_2$ son los vértices del triángulo que se muestra en la Figura A.4 cuyos lados son $|z_1|$, $|z_2|$ y $|z_1 + z_2|$, y del hecho de que la longitud del lado de un triángulo no puede ser superior a la suma de las longitudes de los otros dos lados. Otras desigualdades de utilidad son

$$|\operatorname{Re}\{z\}| \leq |z| \quad \text{y} \quad |\operatorname{Im}\{z\}| \leq |z| \quad (\text{A.21})$$

que se deduce teniendo en cuenta que para cualquier número complejo $z = x + jy$, tenemos

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|$$

y, análogamente,

$$|z| \geq |y|$$

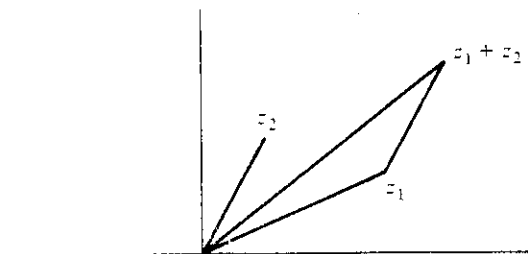


Figura A.4. Desigualdad del triángulo.

Apéndice B

Relaciones matemáticas

Este apéndice contiene una lista de referencia con algunas relaciones matemáticas de interés en ingeniería eléctrica y electrónica. Sin embargo, no es la intención sustituir otros textos con listas más amplias y completas.

B.1. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\exp[\pm j\theta] = \cos \theta \pm j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(\exp[j\theta] + \exp[-j\theta]) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2j}(\exp[j\theta] - \exp[-j\theta]) = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4}(3 \cos \theta + \cos 3\theta)$$

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{4}(3 \sin \theta - \sin 3\theta)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \left(\alpha - \tan^{-1} \frac{B}{A} \right)$$

$$\sinh \alpha = \frac{1}{2} (\exp[\alpha] - \exp[-\alpha])$$

$$\cosh \alpha = \frac{1}{2} (\exp[\alpha] + \exp[-\alpha])$$

$$\tanh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha}$$

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

$$\cosh \alpha + \sinh \alpha = \exp[\alpha]$$

$$\cosh \alpha - \sinh \alpha = \exp[-\alpha]$$

$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta \pm \cosh \alpha \sinh \beta$$

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta \pm \sinh \alpha \sinh \beta$$

$$\tanh(\alpha \pm \beta) = \frac{\tanh \alpha \pm \tanh \beta}{1 \pm \tanh \alpha \tanh \beta}$$

$$\sinh^2 \alpha = \frac{1}{2} (\cosh 2\alpha - 1)$$

$$\cosh^2 \alpha = \frac{1}{2} (\cosh 2\alpha + 1)$$

B.2. FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

$$\exp[\alpha] \exp[\beta] = \exp[\alpha + \beta]$$

$$\frac{\exp[\alpha]}{\exp[\beta]} = \exp[\alpha - \beta]$$

$$(\exp[\alpha])^\beta = \exp[\alpha\beta]$$

$$\ln \alpha \beta = \ln \alpha + \ln \beta$$

$$\ln \frac{\alpha}{\beta} = \ln \alpha - \ln \beta$$

$$\ln \alpha^\beta = \beta \ln \alpha$$

$\ln \alpha$ es el inverso de $\exp [\alpha]$, es decir,

$$\exp [\ln \alpha] = \alpha \quad \text{y} \quad \exp [-\ln \alpha] = \exp \left[\ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right] = 1/\alpha$$

$$\log \alpha = M \ln \alpha, \quad M = \log e \simeq 0,4343$$

$$\ln \alpha = \frac{1}{M} \log \alpha, \quad \frac{1}{M} \simeq 2,3026$$

$\log \alpha$ es el inverso de 10^α ; es decir,

$$10^{\log \alpha} = \alpha \quad \text{y} \quad 10^{-\log \alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

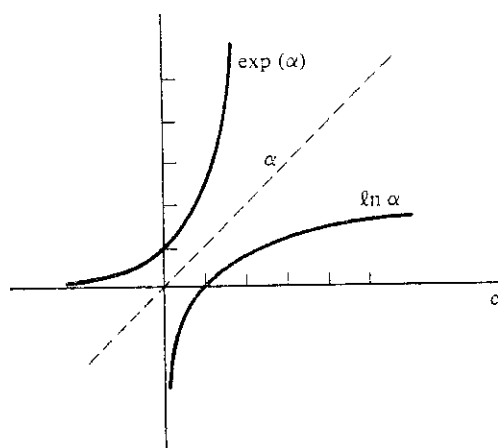


Figura B.1. Funciones logaritmo natural y exponencial.

B.3. FUNCIONES ESPECIALES

B.3.1. Funciones gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp[-t] dt$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(k+1) = k!, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

B.3.2. Funciones gamma incompleta

$$I(z, \beta) = \int_0^\beta t^{z-1} \exp[-t] dt$$

$$Q(z, \beta) = \int_\beta^\infty t^{z-1} \exp[-t] dt$$

$$\Gamma(z) = I(z, \beta) + Q(z, \beta)$$

B.3.3. Funciones beta

$$\beta(\mu, \nu) = \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{\nu-1} dt, \quad \mu > 0, \quad \nu > 0$$

$$\beta(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)}$$

B.4. DESARROLLOS EN SERIE DE POTENCIAS

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \binom{n}{k} x^k + \dots + x^n$$

$$\exp[x] = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \dots +$$

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots$$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots, \quad |x| < 1$$

donde a es negativo o una fracción.

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

8.5. SUMAS DE POTENCIAS DE NÚMEROS NATURALES

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^N k^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=1}^N k^4 = \frac{1}{30}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)$$

$$\sum_{k=1}^N k^5 = \frac{1}{12}N^2(N+1)^2(2N^2+2N-1)$$

$$\sum_{k=1}^N k^6 = \frac{1}{42}N(N+1)(2N+1)(3N^4+6N^3-3N^2+1)$$

$$\sum_{k=1}^N k^7 = \frac{1}{24}N^2(N+1)^2(3N^4+6N^3-N^2-4N+2)$$

$$\sum_{k=1}^N (2k-1) = N^2$$

$$\sum_{k=1}^N (2k-1)^2 = \frac{1}{3}N(4N^2-1)$$

$$\sum_{k=1}^N (2k-1)^3 = N^2(2N^2-1)$$

$$\sum_{k=1}^N k(k+1)^2 = \frac{1}{12}N(N+1)(N+2)(3N+5)$$

$$\sum_{k=1}^N k(k!) = (N+1)! - 1$$

8.5.1. Sumas de coeficientes binomiales

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^N (k+1) \binom{N}{k} = 2^{(N-1)}(n+2)$$

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} k^N = (-1)^N N! \quad N \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k}^2 = \binom{2N}{N}$$

B.5.2. Series de exponenciales

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{a^{N+1} - 1}{a - 1}, \quad a \neq 1$$

$$\sum_{n=0}^N \exp \left[j \frac{2\pi kn}{N} \right] = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq N-1 \\ N, & k = 0, N \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{1}{(1-a)^2}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n = \frac{a^2 + a}{(1-a)^3}, \quad |a| < 1$$

B.6. INTEGRALES DEFINIDAS

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha x^2] dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_0^{\infty} \exp[-\alpha x^2] dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_0^{\infty} x \exp[-\alpha x^2] dx = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\int_0^{\infty} x^n \exp[-\alpha x] dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}, \quad \alpha > 0$$

$$\int_0^{\infty} x^2 \exp[-\alpha x^2] dx = \frac{1}{4\alpha^3} \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^x \exp[-\alpha x] \cos \beta x \, dx = \frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2}, \quad \alpha > 0$$

$$\int_0^x \exp[-\alpha x] \operatorname{sen} \beta x \, dx = \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}, \quad \alpha > 0$$

$$\int_0^x \exp[-\alpha x^2] \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\pi} \exp\left[-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right]$$

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha$$

$$\int_0^x \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} \, dx = \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \alpha \geq 0$$

$$\int_0^x \frac{1 - \cos \alpha x}{x(x - \beta)} \, dx = \pi \frac{\operatorname{sen} \alpha\beta}{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta \text{ real}, \quad b \neq 0$$

$$\int_0^x \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} \, dx = \ln \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

$$\int_0^x \frac{\alpha \operatorname{sen} \beta x - \beta \operatorname{sen} \alpha x}{x^2} \, dx = \alpha\beta \ln \frac{\alpha}{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

$$\int_0^x \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} \, dx = \frac{(\beta - \alpha)\pi}{2}, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0$$

$$\int_0^x \frac{\alpha \, dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{\operatorname{sen} x} \, dx = \pi$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} x} \, dx = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{\operatorname{sen} x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} x} \, dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} \, dx = (-1)^n \pi$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2nx \cos x}{\operatorname{sen} x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos x)^n \operatorname{sen} nx \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos x)^n \cos nx \, dx = (-1)^n \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin nx \cos mx}{\sin x} \, dx = \begin{cases} 0, & n \leq m \\ \pi, & n > m, \quad m+n \text{ par} \\ 0, & n > m, \quad m+n \text{ impar} \end{cases}$$

8.7. INTEGRALES INDEFINIDAS

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \exp[x] \, dx = \exp[x] + C$$

$$\int x \exp[ax] \, dx = \frac{1}{a^2} (ax - 1) \exp[ax] + C$$

$$\int x^n \exp[ax] \, dx = \frac{1}{a} x^n \exp[ax] - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \exp[ax] \, dx$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln|x| - x + C$$

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln|x| - 1] + C$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \ln|\ln x| + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + C$$

$$\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 x) \cos x + C$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 x) \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C$$

$$\int x \cos x \, dx = \cos x + x \operatorname{sen} x + C$$

$$\int x^n \operatorname{sen} x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx$$

$$\int x^n \cos x \, dx = x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sen} x \, dx$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x \, dx = \ln \cosh x + C$$

$$\int \coth x \, dx = \ln |\tanh x| + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \tan^{-1} |\sinh x| + C$$

$$\int \operatorname{csch} x \, dx = \ln |\tanh x| + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + C$$

$$\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + C$$

$$\int \frac{x \, dx}{a + bx} = \frac{1}{b^2} (a + bx - a \ln |x|) + C$$

$$\int \frac{x^2 \, dx}{a + bx} = \frac{1}{2b^3} [(a + bx)^2 - 4a(a + bx) + 2a^2 \ln |a + bx|] + C$$

$$\int \frac{dx}{x(a + bx)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a + bx} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln|x| + \sqrt{a^2 + x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2 x} + C$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \cos^{-1} \frac{a - x}{a} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\sqrt{2ax - x^2} + a \cos^{-1} \frac{a - x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{ax} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{x - a}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \frac{a - x}{a} + C$$

$$\int x\sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{2x^2 - ax - 3a^2}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \frac{a - x}{a} + C$$

Apéndice C

Teoría elemental de matrices

Este apéndice presenta la mínima cantidad de teoría de matrices necesaria para asimilar el material de los Capítulos 2 y 6 del texto. Se recomienda que incluso aquellos lectores con conocimientos de teoría de matrices lean este material, para familiarizarse con la notación. La presentación es concisa y está orientada a aquellos lectores que posean menos conocimientos sobre matrices. Si se desea una presentación más amplia de la teoría de matrices, sugerimos el estudio de algún libro de texto dedicado exclusivamente a esta materia.

C.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Una matriz, que indicaremos mediante una letra mayúscula en negrilla, como $\mathbf{A}$ o Φ , o mediante la notación $[a_{ij}]$, es un conjunto de elementos ordenados en forma rectangular. Las matrices aparecen en muchas ramas de la matemática aplicada. Son útiles ya que posibilitan el manejo de un conjunto de muchos números como un único objeto, y la realización de cálculos con esos objetos de una forma compacta. Los elementos de las matrices pueden ser números reales, números complejos, polinomios o funciones. Una matriz que contiene una sola fila se denomina matriz fila, y una matriz que contiene una sola columna se denomina matriz columna. Las matrices cuadradas tienen el mismo número de filas y de columnas. Una matriz $\mathbf{A}$ es de orden $m \times n$ si tiene m filas y n columnas.

El complejo conjugado de una matriz $\mathbf{A}$ se obtiene conjugando todos los elementos de $\mathbf{A}$, y se indica como $\mathbf{A}^*$. Una matriz es real si todos sus elementos son reales. Claramente, si una matriz es real, se cumple que $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$. Dos matrices son iguales si sus correspondientes elementos son iguales. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ significa que $[a_{ij}] = [b_{ij}]$, para todo i y j . Las matrices tienen que ser del mismo orden.

C.2. OPERACIONES BÁSICAS

C.2.1. Suma de matrices

La matriz $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ se forma sumando los correspondientes elementos, es decir,

$$[c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}] \quad (\text{C.1})$$

La diferencia de matrices se define de forma similar. Las matrices deben ser del mismo orden. La suma de matrices tiene las propiedades asociativa y conmutativa.

C.2.2. Diferenciación e integración

La derivada y la integral de una matriz se obtienen derivando o integrando cada elemento de la matriz.

C.2.3. Producto de matrices

El producto de matrices es una extensión del producto escalar de vectores. El producto escalar de dos vectores de dimensión N , $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define así:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N u_i v_i$$

Los elementos $[c_{ij}]$ del producto de matrices $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ se obtienen realizando el producto escalar de la fila i -ésima de la matriz $\mathbf{A}$ con la columna j -ésima de la matriz $\mathbf{B}$, es decir,

$$[c_{ij}] = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj} \quad (\text{C.2})$$

Por tanto, el proceso de multiplicación de matrices se denomina también producto de filas por columnas, como se indica en la Figura C.1.

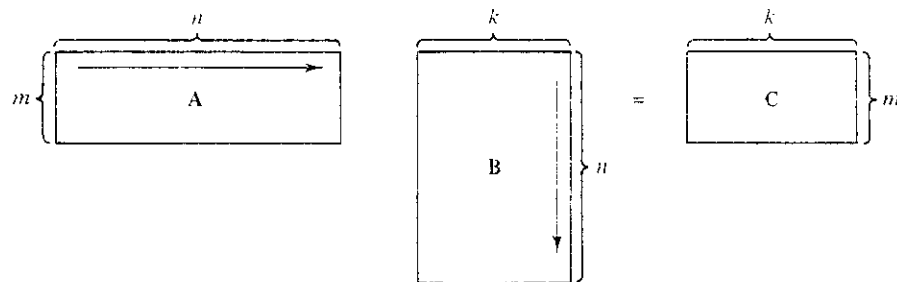


Figura C.1. Producto de matrices.

La definición requiere que el número de columnas de la matriz $\mathbf{A}$ sea igual al número de filas de la matriz $\mathbf{B}$. En ese caso se dice que las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son compatibles. Si no, el

producto no se puede definir. La multiplicación de matrices tiene la propiedad asociativa: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$, pero en general no tiene la propiedad conmutativa: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Como ejemplo, sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Entonces, aplicando la Ecuación (C.2),

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} (3)(-4) + (-2)(1) & (3)(1) + (-2)(6) \\ (1)(-4) + (5)(1) & (1)(1) + (5)(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -9 \\ 1 & 31 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} (-4)(3) + (1)(1) & (-4)(-2) + (1)(5) \\ (1)(3) + (6)(1) & (1)(-2) + (6)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -3 \\ 9 & 28 \end{bmatrix}$$

El producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

$$(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) \quad (\text{C.3a})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (\text{C.3b})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \quad (\text{C.3c})$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB} \quad (\text{C.3d})$$

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}, \text{ en general} \quad (\text{C.3e})$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0} \text{ no implica necesariamente que } \mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ o } \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (\text{C.3f})$$

Las anteriores propiedades se mantienen siempre que las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ sean tales que las expresiones de la izquierda estén definidas (k es un número cualquiera). Un ejemplo de la propiedad (C.3f) es

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las propiedades expresadas en las Ecuaciones (C.3e) y (C.3f) son inusuales en el sentido de que no tienen contrapartida en la multiplicación normal de escalares. Deben considerarse, por tanto, con cuidado. Como en el caso de vectores, no existe la división de matrices.

C.3. MATRICES ESPECIALES

Matriz cero. La matriz cero, que se indica como $\mathbf{0}$, es una matriz con todos sus elementos iguales a cero.

Matriz diagonal. La matriz diagonal, que se indica como $\mathbf{D}$, es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son cero.

Matriz unidad. La matriz unidad, que se indica como $\mathbf{I}$, es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal valen uno (*Nota:* $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$, siendo en todos los casos las matrices compatibles).

Matriz triangular superior. Una matriz triangular superior tiene todos sus elementos por debajo de la diagonal principal iguales a cero.

Matriz triangular inferior. Una matriz triangular inferior tiene todos sus elementos por encima de la diagonal principal iguales a cero.

En las matrices diagonales superior o inferior, los elementos de la diagonal principal no tienen que ser necesariamente iguales a cero. La suma y el producto de matrices triangulares superiores produce otra matriz triangular superior, y lo mismo ocurre con matrices triangulares inferiores.

Por ejemplo, las matrices

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

son respectivamente triangular superior e inferior.

Matriz traspuesta. La matriz traspuesta, que se indica como $\mathbf{A}^T$, es la matriz resultante de intercambiar las filas y las columnas de la matriz $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, entonces $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$. Es decir, el elemento de la fila i y columna j de la matriz $\mathbf{A}$ se transforma en el elemento de la fila j y la columna i de la matriz $\mathbf{A}^T$.

Matriz traspuesta y compleja conjugada. La matriz traspuesta y compleja conjugada, que se indica como $\mathbf{A}^\dagger$, es la matriz cuyos elementos son los complejos conjugados de $\mathbf{A}^T$. Nótese que

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad \text{y} \quad (\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$$

Las siguientes definiciones se aplican sólo a matrices cuadradas.

Matriz simétrica. Una matriz $\mathbf{A}$ es simétrica si

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

Matriz hermítica. Una matriz $\mathbf{A}$ es hermítica si

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$$

Matriz antisimétrica. Una matriz $\mathbf{A}$ es antisimétrica si

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$

Por ejemplo, las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -7 \\ -4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

son respectivamente simétrica y antisimétrica.

Matriz normal. Una matriz $\mathbf{A}$ es normal si

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$$

Matriz unitaria. Una matriz $\mathbf{A}$ es unitaria si

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Una matriz unitaria real se denomina matriz ortogonal.

C.4. INVERSA DE UNA MATRIZ

En esta sección consideraremos exclusivamente matrices cuadradas. La inversa de una matriz $n \times n$ se indica como $\mathbf{A}^{-1}$, y es la matriz $n \times n$ que cumple

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz unitaria $n \times n$. Si el determinante de $\mathbf{A}$ es cero, $\mathbf{A}$ no tiene inversa y se denomina matriz singular. Por otra parte, si el determinante de $\mathbf{A}$ es distinto de cero, existe la matriz inversa, y se dice que $\mathbf{A}$ es una matriz no singular.

En general, el cálculo de la inversa de una matriz es un procedimiento tedioso. En algunos casos especiales, la inversa se puede determinar fácilmente. Por ejemplo, para una matriz 2×2 ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

suponiendo que $a_{11}a_{22} \neq a_{21}a_{12}$. Para una matriz diagonal, tenemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \cdot & \cdots & 0 \\ \cdot & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

suponiendo que $a_{ij} \neq 0$ para cualquier i .

La inversa de la inversa es de nuevo la matriz original $\mathbf{A}$, es decir,

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \quad (\text{C.6})$$

La inversa del producto de matrices $\mathbf{AC}$ se puede obtener invirtiendo cada factor y multiplicando las inversas cambiando el orden, es decir,

$$(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{C.7})$$

Para matrices de orden superior, la inversa se calcula mediante la regla de Cramer:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A} \quad (\text{C.8})$$

en donde $\det \mathbf{A}$ indica el determinante de $\mathbf{A}$, y $\text{adj } \mathbf{A}$ es la matriz adjunta de $\mathbf{A}$. A continuación, resumimos los pasos necesarios para calcular la inversa de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$:

1. Calcular la matriz de menores (el menor del elemento a_{ij} , que se indica como $\mathbf{M}_{ij}$, es el determinante de la matriz formada borrando la fila i -ésima y la columna j -ésima de la matriz $\mathbf{A}$).
2. Calcular la matriz de cofactores [el cofactor del elemento a_{ij} se relaciona con el menor mediante la expresión $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{M}_{ij}$].
3. Calcular la matriz adjunta de $\mathbf{A}$, obteniendo la traspuesta de la matriz de cofactores de $\mathbf{A}$:

$$\text{adj } \mathbf{A} = [c_{ij}]^T$$

4. Calcular el determinante de $\mathbf{A}$, utilizando la expresión

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ij} c_{ij} \quad \text{para cada columna } j$$

o

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij} \quad \text{para cada fila } i$$

5. Utilizar la Ecuación (C.8) para obtener $\mathbf{A}^{-1}$.

C.5. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Los autovalores de una matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$ son las soluciones de la ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (\text{C.9})$$

La Ecuación (C.9) se puede escribir como $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Existen vectores solución distintos del trivial sólo si $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Esto es una ecuación algebraica de grado n en λ , que se denomina ecuación característica de la matriz. La ecuación característica tiene n raíces, aunque algunas pueden estar repetidas. Se dice que los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ son distintos si la ecuación característica no tiene raíces repetidas. El polinomio $p(\lambda) = \det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}]$ se denomina polinomio característico de $\mathbf{A}$. Cada autovalor λ_i tiene asociado un autovector distinto de cero $\mathbf{x}_i$ que cumple la ecuación $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$. Este vector solución se denomina autovector. Por ejemplo, los autovalores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

se obtienen resolviendo la ecuación

$$\det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

o

$$(3 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = 0$$

Esta ecuación de segundo grado tiene dos raíces reales, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$. Existen dos autovectores. El autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ es la solución de

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, $2x_1 + 4x_2 = 0$ y $x_1 + 2x_2 = 0$, de donde se puede obtener que $x_1 = -2x_2$. Escogiendo $x_2 = 1$, el autovector resultante es

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 5$ es la solución de

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

que es la solución de $x_2 = 2x_1$. Si escogemos $x_1 = 1$ obtenemos

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

C.6. FUNCIONES DE UNA MATRIZ

Toda función analítica $f(t)$ de un escalar t se puede expresar mediante una serie convergente de Maclaurin de la siguiente forma

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right\}_{t=0} \frac{t^k}{k!}$$

Se puede utilizar el mismo tipo de desarrollo para definir funciones de matrices. Es decir, la función $f(\mathbf{A})$ de una matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$ se puede desarrollar así:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right\}_{t=0} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad (\text{C.10})$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \mathbf{A} &= (\operatorname{sen} 0)\mathbf{I} + (\cos 0)\mathbf{A} + (-\operatorname{sen} 0) \frac{\mathbf{A}^2}{2!} \\ &\quad + \dots + (-\cos 0)^n \frac{\mathbf{A}^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ &= \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} - \dots (-1)^n \frac{\mathbf{A}^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \exp[At] &= \exp[0]\mathbf{I} + \exp[0]At \\
 &+ \exp[0]\frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \exp[0]\frac{A^nt^n}{n!} + \dots \\
 &= \mathbf{I} + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^nt^n}{n!} + \dots
 \end{aligned}$$

El teorema de Cayley-Hamilton indica que toda matriz satisface su propia ecuación característica. Es decir, dada una matriz arbitraria $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$ cuyo polinomio característico es $g(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, se puede demostrar que $g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = g(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

y por el teorema de Cayley-Hamilton, tenemos que

$$g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} + 5\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

o

$$\mathbf{A}^2 = 6\mathbf{A} - 5\mathbf{I} \quad (\text{C.11})$$

En general, el teorema de Cayley-Hamilton hace posible calcular cualquier potencia de una matriz en función de una combinación lineal de $\mathbf{A}^k$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Por ejemplo, se puede calcular $\mathbf{A}^3$ aplicando la Ecuación (C.11) y multiplicando ambos miembros por $\mathbf{A}$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^3 &= 6\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} \\
 &= 6[6\mathbf{A} - 5\mathbf{I}] - 5\mathbf{A} \\
 &= 31\mathbf{A} - 30\mathbf{I}
 \end{aligned}$$

Análogamente, se pueden obtener por este método potencias superiores de $\mathbf{A}$. Multiplicando la Ecuación (C.11) por $\mathbf{A}^{-1}$ obtenemos

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{6\mathbf{I} - \mathbf{A}}{5}$$

suponiendo que existe $\mathbf{A}^{-1}$. Como consecuencia del teorema de Cayley-Hamilton, se deduce que cualquier función $f(\mathbf{A})$ se puede expresar en la forma

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \mathbf{A}^k$$

El cálculo de $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ se puede realizar por el procedimiento iterativo empleado en el cálculo de $\mathbf{A}^n$ y $\mathbf{A}^{n+1}$. Se puede demostrar que si los autovalores de $\mathbf{A}$ son distintos, el conjunto de coeficientes $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f(\lambda_1) &= \gamma_0 + \gamma_1 \lambda_1 + \dots + \gamma_{n-1} \lambda_1^{n-1} \\ f(\lambda_2) &= \gamma_0 + \gamma_1 \lambda_2 + \dots + \gamma_{n-1} \lambda_2^{n-1} \\ &\vdots \\ f(\lambda_n) &= \gamma_0 + \gamma_1 \lambda_n + \dots + \gamma_{n-1} \lambda_n^{n-1} \end{aligned}$$

Por ejemplo, calculemos $\exp[\mathbf{A}t]$, siendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$, y $f(\mathbf{A}) = \exp[\mathbf{A}t]$. Entonces,

$$\begin{aligned} \exp[\mathbf{A}t] &= \sum_{k=0}^1 \gamma_k(t) \mathbf{A}^k t^k \\ &= \gamma_0(t) \mathbf{I} + \gamma_1(t) \mathbf{A}t \end{aligned}$$

donde $\gamma_0(t)$ y $\gamma_1(t)$ son las soluciones de

$$\begin{aligned} \exp[t] &= \gamma_0(t) + \gamma_1(t) \\ \exp[5t] &= \gamma_0(t) + 5\gamma_1(t) \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \frac{1}{4}(\exp[5t] - \exp[t]) \\ \gamma_0(t) &= \frac{1}{4}(5\exp[t] - \exp[5t]) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \exp[\mathbf{A}t] &= \left(\frac{5}{4}\exp[t] - \frac{1}{4}\exp[5t]\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}\exp[5t] - \exp[t]\right) \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\exp[5t] - \exp[t] & \exp[5t] - \exp[t] \\ \frac{1}{4}(\exp[5t] - \exp[t]) & \frac{1}{2}\exp[5t] - \exp[t] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si los autovalores no son distintos, existen menos ecuaciones que incógnitas. Derivando con respecto a λ la ecuación correspondiente al autovalor repetido obtenemos una nueva ecuación que se puede emplear para obtener $\gamma_0(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_{n-1}(t)$. Por ejemplo, consideremos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Los coeficientes $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ se obtienen como solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\exp[-t] &= \gamma_0(t) - \gamma_1(t) + \gamma_2(t) \\ \exp[-2t] &= \gamma_0(t) - 2\gamma_1(t) + 4\gamma_2(t) \\ t \exp[-2t] &= \gamma_1(t) - 4\gamma_2(t)\end{aligned}$$

Despejando γ_i obtenemos

$$\begin{aligned}\gamma_0(t) &= 4 \exp[-t] - 3 \exp[-2t] - 2t \exp[-2t] \\ \gamma_1(t) &= 4 \exp[-t] - 4 \exp[-2t] - 3t \exp[-2t] \\ \gamma_2(t) &= \exp[-t] - \exp[-2t] - t \exp[-2t]\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\exp[At] &= \gamma_0(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_1(t) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_2(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -16 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \exp[-t] & 0 & 0 \\ 0 & \exp[-2t] - 2t \exp[-2t] & 4t \exp[-2t] \\ 0 & -t \exp[-2t] & -4 \exp[-t] + 4 \exp[-2t] + 4t \exp[-2t] \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Apéndice D

Descomposición en fracciones simples

La descomposición en fracciones simples es una técnica que se utiliza para reducir funciones racionales propias¹ de la forma $N(s)/D(s)$ a sumas de términos simples. Cada término es, a su vez, una función racional propia en la que el grado del denominador es 2 o inferior. Más concretamente, si $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios, y el grado de $N(s)$ es menor que el grado de $D(s)$, se deduce del correspondiente teorema de álgebra que

$$\frac{N(s)}{D(s)} = T_1 + T_2 + \dots + T_k \quad (\text{D.1})$$

donde cada término T_i es de la forma

$$\frac{A}{(s + b)^\mu} \quad \text{o} \quad \frac{Bs + C}{(s^2 + ps + q)^v}$$

donde los polinomios $s^2 + ps + q$ son irreducibles, y μ y v son enteros no negativos. La suma del lado derecho de la Ecuación (D.1) se denomina descomposición en fracciones simples de $N(s)/D(s)$, y cada término T_i se denomina fracción simple. Utilizando división de polinomios, las funciones racionales impropias se pueden expresar como la suma de un polinomio de grado $M - N$ y una fracción racional propia, donde M es el grado del polinomio $N(s)$ y N es el grado del polinomio $D(s)$. Por ejemplo, dada

$$\frac{s^4 + 3s^3 - 5s^2 - 1}{s^3 + 2s^2 - s + 1}$$

obtenemos, dividiendo los polinomios

$$\frac{s^4 + 3s^3 - 5s^2 - 1}{s^3 + 2s^2 - s + 1} = s + 1 - \frac{6s^2 - 2s - 2}{s^3 + 2s^2 - s + 1}$$

¹ Una función racional propia es un cociente de dos polinomios en el que el grado del numerador es inferior al grado del denominador.

La descomposición en fracciones simples se realiza de la fracción $(6s^2 - 2s - 2)/(s^3 + 2s^2 - s + 1)$.

La descomposición en fracciones simples es muy útil en integración y para calcular la inversa de muchas transformadas, como la de Laplace, la de Fourier y la transformada Z. Todos estos operadores tienen una propiedad en común: la linealidad.

El primer paso en la descomposición en fracciones simples es expresar $D(s)$ como el producto de factores o de factores cuadráticos irreducibles $s^2 + ps + q$. Los factores repetidos se agrupan, de forma que $D(s)$ se expresa como un producto de factores diferentes de la forma $(s + b)^\mu$ o $(s^2 + ps + q)^\nu$, donde μ y ν son enteros no negativos. La forma de las fracciones depende del tipo de factores en los que se descomponga $D(s)$. Hay cuatro casos diferentes.

D.1. CASO 1: FACTORES LINEALES NO REPETIDOS

A cada factor no repetido de $D(s)$ de la forma $s + b$, le corresponde una fracción simple de la forma $A/(s + b)$. En general, la función racional se puede escribir así:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A}{s + b} + R(s)$$

donde

$$A = \left(\frac{(s + b)N(s)}{D(s)} \right)_{s = -b} \quad (\text{D.2})$$

Ejemplo D.1 Consideremos la función racional

$$\frac{37 - 11s}{s^3 - 4s^2 + s + 6}$$

El denominador se expresa en forma factorizada como $(s + 1)(s - 2)(s - 3)$. Todos los factores son lineales y no repetidos. Por lo tanto, al factor $s + 1$ le corresponde una fracción simple de la forma $A/(s + 1)$. Similarmente, para los factores $s - 1$ y $s - 3$ las correspondientes fracciones simples son $B/(s - 2)$ y $C/(s - 3)$, respectivamente. La descomposición de la Ecuación (D.1) tiene la forma

$$\frac{37 - 11s}{s^3 - 4s^2 + s + 6} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s - 2} + \frac{C}{s - 3}$$

Los valores de A , B y C se obtienen utilizando la Ecuación (D.2):

$$A = \left(\frac{37 - 11s}{(s - 2)(s - 3)} \right)_{s = -1} = 4$$

$$B = \left(\frac{37 - 11s}{(s + 1)(s - 3)} \right)_{s = 2} = -5$$

$$C = \left(\frac{37 - 11s}{(s + 1)(s - 2)} \right)_{s = 3} = 1$$

La descomposición en fracciones simples es, por lo tanto

$$\frac{37 - 11s}{s^3 - 4s^2 + s + 6} = \frac{4}{s + 1} - \frac{5}{s - 2} + \frac{1}{s - 3}$$

Ejemplo D.2

Calculemos la descomposición en fracciones simples de

$$\frac{2s + 1}{s^3 + 3s^2 - 4s}$$

Factorizamos el polinomio

$$D(s) = s^3 + 3s^2 - 4s = s(s + 4)(s - 1)$$

y, por tanto, la descomposición en fracciones simples tiene la forma

$$\frac{2s + 1}{s^3 + 3s^2 - 4s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 4} + \frac{C}{s - 1}$$

Utilizando la Ecuación (D.2) calculamos los coeficientes

$$A = \left(\frac{2s + 1}{(s + 4)(s - 1)} \right)_{s=0} = -\frac{1}{4}$$

$$B = \left(\frac{2s + 1}{s(s - 1)} \right)_{s=-4} = \frac{7}{20}$$

$$C = \left(\frac{2s + 1}{s(s + 4)} \right)_{s=1} = \frac{3}{5}$$

Finalmente, la forma de la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{2s + 1}{s^3 + 3s^2 - 4s} = -\frac{1}{4s} + \frac{7}{20(s + 4)} + \frac{3}{5(s - 1)}$$

D.2. CASO 2: FACTORES LINEALES REPETIDOS

A cada factor repetido de la forma $(s + b)^\mu$, le corresponde la fracción simple

$$\frac{A_1}{s + b} + \frac{A_2}{(s + b)^2} + \dots + \frac{A_\mu}{(s + b)^\mu}$$

Los coeficientes A_k se pueden determinar mediante la fórmula

$$A_\mu = \left(\frac{(s + b)^\mu N(s)}{D(s)} \right)_{s=-b} \quad (\text{D.3})$$

$$A_k = \left(\frac{1}{(\mu - k)!} \frac{d^{\mu-k}}{ds^{\mu-k}} \frac{(s + b)^\mu N(s)}{D(s)} \right)_{s=-b}, \quad k = 1, 2, \dots, \mu - 1 \quad (\text{D.4})$$

Ejemplo D.3 Consideremos la función racional

$$\frac{2s^2 - 25s - 33}{s^3 - 3s^2 - 9s - 5}$$

La forma factorizada del denominador es $D(s) = (s + 1)^2(s - 5)$. Al factor $(s - 5)$ le corresponde una fracción simple de la forma $B/(s - 5)$. El factor $(s + 1)^2$ es un factor lineal repetido al que le corresponde un término de la forma $A_2/(s + 1)^2 + A_1/(s + 1)$. La descomposición de la Ecuación (D.1) tiene la forma

$$\frac{2s^2 - 25s - 33}{s^3 - 3s^2 - 9s - 5} = \frac{B}{s - 5} + \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{(s + 1)^2} \quad (\text{D.5})$$

Los valores de B , A_1 y A_2 se obtienen utilizando las Ecuaciones (D.2), (D.3) y (D.4), de la forma siguiente:

$$B = \left(\frac{2s^2 - 25s - 33}{s^3 + 2s + 1} \right)_{s=-5} = -3$$

$$A_2 = \left(\frac{2s^2 - 25s - 33}{s - 5} \right)_{s=-1} = -1$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{(2-1)!} \left(\frac{d}{ds} \frac{2s^2 - 25s - 33}{s - 5} \right)_{s=-1} \\ &= \left(\frac{2s^2 - 20s + 158}{(s - 5)^2} \right)_{s=-1} = 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función racional de la Ecuación (D.5) se puede expresar así:

$$\frac{2s^2 - 25s - 33}{s^3 - 3s^2 - 9s - 5} = -\frac{3}{s - 5} + \frac{5}{s + 1} - \frac{1}{(s + 1)^2}$$

Ejemplo D.4 Calculemos la descomposición en fracciones simples de

$$\frac{3s^3 - 18s^2 + 9s - 4}{s^4 - 5s^3 + 6s^2 + 20s + 8}$$

El denominador se puede factorizar de la forma $(s + 1)(s - 2)^3$. Como tenemos un factor repetido de orden 3, la correspondiente fracción simple es

$$\frac{3s^3 - 18s^2 + 9s - 4}{s^4 - 5s^3 + 6s^2 + 20s + 8} = \frac{B}{s + 1} + \frac{A_1}{s - 2} + \frac{A_2}{(s - 2)^2} + \frac{A_3}{(s - 2)^3} \quad (\text{D.6})$$

El coeficiente B se puede calcular utilizando la Ecuación (D.2):

$$B = \left(\frac{3s^3 - 18s^2 + 9s - 4}{(s - 2)s^3} \right)_{s=-1} = 2$$

Los coeficientes A_i , $i = 1, 2, 3$ se obtienen mediante las Ecuaciones (D.3) y (D.4). En primer lugar,

$$A_3 = \left(\frac{3s^3 - 18s^2 + 9s - 4}{s + 1} \right)_{s=2} = 2$$

$$A_2 = \left(\frac{d}{ds} \frac{3s^3 - 18s^2 + 29s - 4}{s + 1} \right)_{s=2}$$

$$= \left(\frac{6s^3 - 9s^2 - 36s + 33}{(s + 1)^2} \right)_{s=2} = -3$$

Similarmente, A_1 se puede calcular utilizando la Ecuación (D.4).

En muchos casos, es mucho más sencillo utilizar la siguiente técnica, especialmente tras calcular todos los coeficientes menos uno. Multiplicando los dos miembros de la Ecuación (D.6) por $(s + 1)(s - 2)^3$ resulta

$$3s^3 - 18s^2 + 9s - 4 = B(s - 2)^3 + A_1(s + 1)(s - 2)^2 + A_2(s + 1)(s - 2) + A_3(s + 1)$$

Si comparamos los coeficientes de s^3 de ambos miembros obtenemos

$$3 = B + A_1$$

Como $B = 2$, resulta que $A_1 = 1$. La descomposición en fracciones simples resultante es

$$\frac{3s^3 - 18s^2 + 9s - 4}{s^4 - 5s^3 + 6s^2 + 20s + 8} = \frac{2}{s + 1} + \frac{1}{s - 2} - \frac{3}{(s - 2)^2} + \frac{2}{(s - 2)^3}$$

D.3. CASO 3: FACTORES DE SEGUNDO GRADO NO REPETIDOS E IRREDUCIBLES

En el caso de polinomios de segundo grado no repetidos e irreducibles, utilizaremos fracciones de la forma

$$\frac{As + B}{(s^2 + ps + q)} \quad (\text{D.7})$$

La mejor forma de calcular los coeficientes es igualar los coeficientes de las potencias de s , como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo D.5 Consideremos la función racional

$$\frac{s^2 - s - 21}{2s^3 - s^2 + 8s - 4}$$

Factorizamos el polinomio de la forma $D(s) = (s^2 + 4)(2s - 1)$, y usamos la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{s^2 - s - 21}{2s^3 - s^2 + 8s - 4} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{C}{2s - 1}$$

Igualando los numeradores obtenemos

$$s^2 - s - 21 = (As + B)(2s - 1) + C(s^2 + 4) \quad (\text{D.8})$$

Los valores de A , B y C se pueden calcular comparando los coeficientes de las diferentes potencias de s , o sustituyendo valores de s que hacen diversos factores cero. Por ejemplo, sustituyendo $s = 1/2$ obtenemos $(1/4) - (1/2) - 21 = (17/14)C$, cuya solución es $C = -5$. Los restantes coeficientes se pueden calcular comparando diferentes potencias de s . Reorganizando los términos del lado derecho de la Ecuación (D.8) se obtiene

$$s^2 - s - 21 = (2A + C)s^2 + (-A + B)s - B + 4C$$

Comparando el coeficiente de s^2 en ambos términos vemos que $2A + C = 1$. Sustituyendo C se obtiene $A = 3$. Similarmente, comparando el término constante se obtiene $-B + 4C = -21$ de donde resulta $B = 1$. Por lo tanto, la descomposición en fracciones simples de la función racional es

$$\frac{s^2 - s - 21}{2s^3 - s^2 + 8s - 4} = \frac{3s + 1}{s^2 + 4} - \frac{5}{2s - 1}$$

D.4. CASO 4: FACTORES DE SEGUNDO GRADO REPETIDOS E IRREDUCIBLES

Para el caso de factores de segundo grado repetidos e irreducibles, tenemos factores de la forma

$$\frac{A_1s + B_1}{s^2 + ps + q} + \frac{A_2s + B_2}{(s^2 + ps + q)^2} + \dots + \frac{A_v s + B_v}{(s^2 + ps + q)^v} \quad (\text{D.9})$$

De nuevo la mejor forma de calcular los coeficientes es igualar las diferentes potencias de s .

Ejemplo D.6 Como ejemplo de factores de segundo grado repetidos e irreducibles, consideremos

$$\frac{s^4 - 6s + 7}{(s^2 - 4s + 5)^2} \quad (\text{D.10})$$

Nótese que el denominador se puede escribir de la forma $[(s - 2)^2 + 1]^2$. Por lo tanto, aplicando la Ecuación (D.9) con $v = 2$, podemos expresar la descomposición en fracciones simples de la Ecuación (D.10) es

$$\frac{s^4 - 6s + 7}{(s^2 - 4s + 5)^2} = \frac{A_2s + B_2}{(s - 2)^2 + 1} + \frac{A_1s + B_1}{[(s - 2)^2 + 1]^2} \quad (\text{D.11})$$

Multiplicando los dos miembros de la Ecuación (D.11) por $[(s - 2)^2 + 1]^2$ y reorganizando términos, obtenemos

$$s^2 - 6s + 7 = A_1s^3 + (B_1 - 4A_1)s^2 + (5A_1 + A_2)s + B_2 - 5B_1 \quad (\text{D.12})$$

Las constantes A_1 , B_1 , A_2 y B_2 se pueden determinar comparando los coeficientes de s de los dos miembros de la Ecuación (D.12). El coeficiente de s^3 da como resultado $A_1 = 0$, y el coeficiente s^2 da como resultado

$$1 = B_1 - 4A_1, \quad \text{o} \quad B_1 = 1$$

Comparando los coeficientes de s en ambos miembros obtenemos

$$-6 = 5A_1 + A_2 \quad \text{o} \quad A_2 = -6$$

Comparando el término constante resulta

$$7 = 5B_1 + B_2 \quad \text{o} \quad B_2 = 2$$

Finalmente, la descomposición en fracciones simples de la Ecuación (D.10) es

$$\frac{s^4 - 6s + 7}{(s^2 + 4s + 5)^2} = \frac{1}{[(s - 2)^2 + 1]^2} + \frac{6s - 2}{(s - 2)^2 + 1}$$

Bibliografía

1. BRIGHAM, E. ORAM. *The Fast Fourier Transform and Its Applications*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1988.
2. GABEL, ROBERT A., y RICHARD A. ROBERTS. *Signals and Linear Systems*, 3.^a ed. New York: Wiley, 1987.
3. JOHNSON, JOHNNY R. *Introduction to Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1989.
4. LATHI, B. P. *Signals and Systems*. Berkeley-Cambridge Press, Carmichael, CA, 1987.
5. MCGILLEM, CLAIRE D., y GEORGE R. COOPER. *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, 2.^a ed. New York: Holt, Reinhart and Winston, 1984.
6. O'FLYNN, MICHAEL, y EUGENE MORIARTY. *Linear Systems: Time Domain and Transform Analysis*. New York: Harper and Row, 1987.
7. OPPENHEIM, ALAN V., y RONALD W. SCHAFER. *Discrete-Time Signal Processing*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1989.
8. OPPENHEIM, ALAN V., ALAN S. WILSKY y S. HAMID NEWAB. *Signals and Systems*, 2.^a ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1997.
9. PAPOULIS, ATHANASIOS. *The Fourier Integral and Its Applications*. New York: McGraw-Hill, 1962.
10. PHILIP, CHARLES L., y JOHN PARR. *Signals, Systems and Transforms*. Englewood-Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1995.
11. POULARIKAS, ALEXANDER D., y SAMUEL SEELY. *Elements of Signals and Systems*. Boston: PWS-Kent, 1988.
12. PROAKIS, JOHN G., y DIMITRIS G. MANOLAKIS. *Introduction to Digital Signal Processing*. New York: Macmillan, 1988.
13. SCOTT, DONALD E. *An Introduction to Circuit Analysis: A Systems Approach*. New York: McGraw-Hill, 1987.
14. SIEBERT, WILLIAM M. *Circuits, Signals and Systems*. New York: McGraw-Hill, 1986.
15. STRUM, ROBERT D., y DONALD E. KIRK. *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1988.
16. SWISHER, GEORGE M. *Introduction to Linear Systems Analysis*. Beaverton, OR: Matrix, 1976.
17. ZIEMER, ROGER E., WILLIAM H. TRANTER, y D. RONALD FANNIN. *Signals and Systems: Continuous and Discrete*, 2.^a ed. New York: Macmillan, 1989.

Índice alfabético

A

Ancho de banda:
 a 3 dB, 210
 absoluto, 210
 al z %, 212
 definición, 209
 entre nulos, 211
 equivalente, 211
 rms, 212
Autovalores, 86, 94
Autovectores, 522

B

Banda eliminada, 205

C

Circuitos de retención, 368
Clasificación de sistemas en tiempo continuo, 44
Coeficientes binomiales, 509
Cofactor, 522
Componente de entrada cero, 270
Componente de estado cero, 270
Componentes básicos de sistemas, 71
Condiciones de Dirichlet, 125
Conexión de realimentación, 262
Consideraciones sobre estabilidad, 94
Contenido armónico, 163
Conversión A/D, (*véase también* Muestreo), 34, 375
Conversión D/A, 375
Conversión de frecuencia de muestreo, 370

Convolución circular, *véase* Convolución periódica
Convolución lineal, 302
Convolución periódica:
 en tiempo continuo, 133
 en tiempo discreto, 303-304
Cuantificación, 34, 376
Cuantificador uniforme, 376

D

Delta de Kronecker, 110
Desarrollo en serie de Fourier:
 coeficientes, 111, 112, 116
 de secuencias periódicas, *véase* Desarrollo en serie
 de Fourier en tiempo discreto
 exponencial, 115
 generalizado, 112
 propiedades:
 aproximación por mínimos cuadrados, 127
 convolución de dos señales, 133
 desplazamiento en el tiempo, 135
 integración, 137
 linealidad, 132
 producto de dos señales, 132
 simetría, 129
 trigonométrico, 117
Desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto:
 convergencia, 343-344
 evaluación de coeficientes, 343
 propiedades, 348-349
 representación de señales periódicas, 341
 tabla de propiedades, 349

Descomposición en fracciones simples, 254, 527
 Desigualdad de Schwartz, 214
 Desigualdad del triángulo, 504
 Desplazamiento circular, *véase* Desplazamiento periódico
 Desplazamiento periódico, 304
 Diagramas de simulación:
 en el dominio Z , 416-422
 sistemas en tiempo continuo, 73
 sistemas en tiempo discreto, 314
 Diezmado, 370
 Diseño de filtros analógicos:
 especificaciones de filtros paso bajo, 466
 filtro de Butterworth, 470
 filtro de Chebyshev, 476
 filtros ideales, 465
 transformaciones de frecuencia, 467
 Diseño de filtros digitales, 480
 diseño asistido por computador, 494
 diseño de filtros FIR mediante ventanas, 488
 diseño de filtros IIR mediante invarianza al impulso, 481
 diseño de filtros IIR mediante la transformación bilineal, 485
 filtros de fase lineal, 488
 transformaciones de frecuencia, 469
 Doblete unidad, 30
 Duración, 209, 213, 214

E

Ecuación característica, 94
 Ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, 69
 Ecuaciones de estado, tiempo continuo:
 definición, 79
 primera forma canónica, 89
 segunda forma canónica, 90
 solución en el dominio del tiempo, 81
 Ecuaciones de estado, tiempo discreto:
 análisis mediante la transformada Z , 415
 formas en paralelo y en cascada, 415
 primera forma canónica, 318-321
 segunda forma canónica, 318-321
 solución en el dominio de la frecuencia, 420
 solución en el dominio del tiempo, 321
 Ecuaciones diferenciales, *véase también* Sistemas en tiempo continuo
 solución, 69
 Ecuaciones en diferencias:
 condiciones iniciales, 306
 ecuación característica, 307
 raíces características, 307
 respuesta al impulso de, 312-314
 solución homogénea, 307
 solución mediante iteración, 305-307

solución particular, 309
 Escalado temporal:
 señales en tiempo continuo, 16
 señales en tiempo discreto, 288
 Espectro:
 amplitud, 116
 bilateral, 118
 de líneas, 116
 densidad de potencia, 185
 energía, 184
 estimación *véase* Transformada discreta de Fourier
 fase, 116
 Estabilidad en el dominio s , 272
 Estabilidad en sentido entrada acotada/salida acotada, *véase* Sistema estable
 Exponencial bilateral, 173
 Exponencial compleja, 4, 292

F

Fenómeno de Gibbs, 145
 Filtro adaptado, 59
 Filtro de Butterworth, 470
 Filtro de Chebyshev, 476
 Filtro de retención de orden cero, 368
 Filtro IIR, *véase* Diseño de filtros digitales
 Filtro paso banda, 205
 Filtros de reconstrucción:
 ideales, 201, 367
 prácticos, 368
 Filtros ideales, 203, 205
 Filtros, 205, *véase también* Diseño de filtros
 Forma de Euler, 36, 500
 Formas canónicas, tiempo continuo:
 primera forma, 73, 257
 segunda forma, 74, 257
 Formas canónicas, tiempo discreto:
 primera forma, 314-316
 segunda forma, 316-317
 Función δ :
 definición, 23
 derivadas, 30
 propiedades, 25-30
 Función de muestreo, 22
 Función de transferencia, 138, 248, 273
 en bucle abierto, 262
 Función escalón discreto, *véase* Función escalón unidad
 Función escalón unidad:
 en tiempo continuo, 20
 en tiempo discreto, 290
 Función exponencial, 4, 506
 Función impulso discreto, 290
 Función impulso unidad, *véase* función δ
 Función impulso, *véase* función δ
 derivada de, 30
 Función logarítmica, 506

Función racional, 233, 254, 406
 Función rampa, 21
 Función rectangular, 2, 20
 Función signo, 21, 183
 Función sinc, 22
 Funciones de singularidad, 30
 Funciones de ventana:
 en el diseño de filtros digitales FIR, 488-491
 Funciones de ventana en estimación espectral, 451-454
 Funciones de Walsh, 153
 Funciones especiales:
 beta, 508
 gamma incompleta, 508
 gamma, 507

I

Identidades trigonométricas, 505-506
 Integrador, 71
 Integral de convolución:
 definición, 55
 interpretación gráfica, 61
 propiedades, 56, 57
 Integrales definidas, 510-512
 Integrales indefinidas, 512-515
 Interconexión en cascada, 260
 Interconexión en paralelo, 260, 261, 299
 Interpolación, 205, 370
 Inversa de una matriz, 521

L

Ley de Kirchhoff de corrientes, 265
 Ley de Kirchhoff de tensiones, 139, 265
 Limitada en el tiempo, 9
 Límite de la banda de paso, 207
 Linealidad, 44, 294

M

Matrices:
 definición, 517
 determinante, 521
 inversa, 521
 menor, 522
 operaciones, 518
 tipos especiales, 519
 Matriz de transición, *véase* Matriz de transición de estados
 Matriz de transición de estados, tiempo continuo:
 definición, 82
 determinación mediante la transformada de Laplace, 269-272
 evaluación en el dominio del tiempo, 83-88
 propiedades, 88

Matriz de transición de estados, tiempo discreto:
 definición, 322
 determinación mediante la transformada Z, 420-422
 evaluación en el dominio del tiempo, 321-322
 propiedades, 323-324
 relación con la respuesta al impulso, 324
 Matriz diagonal, 519
 Matriz hermítica, 520
 Modelo de modulación de impulsos, 200, 366
 Modulación de amplitud, 195
 Modulación, *véase* Modulación de amplitud
 Muestreo de funciones en tiempo continuo:
 frecuencia de Nyquist, 202
 modelo de modulación de impulsos, 200, 366
 solapamiento, 203, 365
 teorema de muestreo de Nyquist, 202, 365
 transformada de Fourier, 362
 Muestreo ideal, 200
 Multiplicación de matrices, 518
 Multiplicadores por coeficientes, 314
 Multiplicadores por un escalar, 72

N

Números complejos, 499
 conjugado, 501
 forma polar, 499
 forma trigonométrica, 500
 operaciones aritméticas, 501
 potencias y raíces, 502-503

O

Operación de desplazamiento, 10
 Operación de reflexión, 13
 Ortogonalización de Gram-Schmidt, 152

P

Paso banda, 205, 466
 Período, 4, 292
 Planta, 266
 Polos de orden múltiple, 274
 Polos de orden simple, 273-274
 Potencia media, 7
 Primera diferencia, 291
 Principio de incertidumbre, 213
 Promediado temporal, 52, 59
 Propiedad de convolución:
 desarrollo en serie de Fourier, 133
 transformada de Fourier en tiempo continuo, 186
 transformada de Fourier en tiempo discreto, 357
 transformada discreta de Fourier, 437
 transformada Z, 403
 Propiedad de desplazamiento, *véase* función δ
 Propiedad de escalado, *véase* función δ

Propiedad de inversión, 88
 Propiedad de muestreo, *véase* función δ
 Propiedad de separación, 88
 Propiedad de transición, 88
 Pulso gaussiano, 29, 215
 Pulso triangular, 63
 transformada de Fourier del, 172

R

Rectificador, 120
 Región de convergencia:
 transformada de Laplace, 233
 transformada Z, 390-393
 Relleno con ceros, *véase también* Transformada discreta de Fourier
 Representación mediante variables de estado, 78, 317
 equivalencia, 91, 321
 Representación ortogonal de señales, 110-115
 Respuesta al impulso, 75
 Restadores, 72
 Retardo unidad, 315

S

Secuencia exponencial, 291
 Secuencia periódica:
 definición, 292
 período fundamental, 292
 Semiplano izquierdo, 273
 Señal causal, 67
 Señal de banda limitada, 125, 190, 203
 Señal en tiempo discreto, 3, 285
 Señal no periódica, 4
 Señal sinusoidal, 4
 Señales aleatorias, 33
 Señales analógicas, 33
 Señales aperiódicas, *véase* Señal no periódica
 Señales armónicas:
 en tiempo continuo, 4
 en tiempo discreto, 293
 Señales de energía finita, 7
 Señales de potencia media finita, 7
 Señales digitales, 33
 Señales elementales, 19, 290
 Señales en tiempo continuo, 2
 continuas por tramos, 2
 Señales ortogonales, 110
 Señales ortonormales, 111
 Señales periódicas:
 definición, 3
 período fundamental, 4
 representación, 116
 Series de exponenciales, 510
 Simetría:
 efectos de, 129

 señal simétrica impar, 15
 señal simétrica par, 15
 Sistema:
 causal, 51
 con entradas periódicas, 137
 en tiempo continuo y en tiempo discreto, 44
 función, 138
 inverso, 53
 lineal y no lineal, 44
 sin distorsión, 142
 sin memoria, 50
 variante e invariante con el tiempo, 48
 Sistema anticipativo, 51
 Sistema causal, 51, 66
 Sistema de datos muestreados, 364
 Sistema de realimentación, 262
 Sistema en bucle cerrado, 262
 Sistema estable, 54, 94
 Sistema inverso, 53
 Sistema lineal invariante con el tiempo, 55
 propiedades, 66
 Sistema marginalmente estable, 274
 Sistema no anticipativo, *véase también* Sistema causal, 51
 Sistema no causal, *véase* Sistema anticipativo
 Sistema sin distorsión, 142, 358
 Sistemas de respuesta al impulso finita, 295
 Sistemas en tiempo continuo:
 causales, 51
 clasificación, 44-54
 con y sin memoria, 50
 consideraciones sobre estabilidad, 94
 definición, 44
 diagramas de simulación, 73
 estables, 54
 invertibilidad e inverso, 53
 lineales y no lineales, 44
 representación mediante ecuaciones diferenciales, 69
 representación mediante la respuesta al impulso, 56
 representación mediante variables de estado, 78
 variantes e invariantes con el tiempo, 48
 Sistemas en tiempo discreto, 44, 294
 diagramas de simulación, 314
 estabilidad, 324
 representación mediante ecuaciones en diferencias, 305
 representación mediante variables de estado, 317
 respuesta al impulso finita, 295
 respuesta al impulso infinita, 295
 respuesta al impulso, 294
 Sistemas LTI estables, 68
 Sistemas LTI invertibles, 67
 Sistemas sin memoria, 50, 66
 Sobremuestreo, 370

Sobreoscilación, 146, 269
 Solución en el dominio del tiempo, 81
 Submuestreo, 370
 Suma de convolución:
 definición, 295
 forma tabular para secuencias finitas, 298-299
 interpretación gráfica, 295
 propiedades, 299
 Sumadores, 72, 314

T

Tablas:
 efectos de la simetría, 131
 parejas de transformadas de Fourier:
 en tiempo continuo, 177
 en tiempo discreto, 363
 propiedades del desarrollo en serie de Fourier:
 en tiempo discreto, 349
 propiedades de la transformada de Fourier:
 en tiempo continuo, 195
 en tiempo discreto, 362
 transformaciones de frecuencia:
 analógica, 469
 digital, 470
 transformada de Laplace y sus equivalentes en transformada Z, 482
 transformada de Laplace:
 parejas, 236
 propiedades, 253
 transformada Z:
 parejas, 405
 propiedades, 404
 Teorema de Cayley-Hamilton, 85, 86, 94, 322, 524
 Teorema de De Moivre, 503
 Teorema de los residuos, 406
 Teorema de Parseval, 135, 184
 Teorema del valor final:
 Transformada de Laplace, 251
 Transformada Z, 402
 Teorema del valor inicial:
 transformada de Laplace, 250, 275
 transformada Z, 402
 Tiempo de subida, 269
 Transformación bilineal, 485
 Transformación:
 de la variable independiente, 288
 del vector de estados, 91
 Transformada de Fourier:
 aplicaciones de:
 filtrado de señales, 205
 modulación de amplitud, 195
 multiplexación, 198
 teorema de muestreo, 199
 definición, 168-170
 desarrollo, 168
 ejemplos, 171
 en tiempo discreto, *véase* Transformada de Fourier en tiempo discreto
 existencia, 170
 propiedades:
 convolución, 186
 derivación, 182
 desplazamiento en el tiempo, 180
 dualidad, 189
 escalado en el tiempo, 180
 linealidad, 177
 modulación, 191
 simetría, 179
 Transformada de Fourier en tiempo discreto:
 definición, 351
 función de frecuencia, 357
 propiedad de periodicidad, 352
 propiedades, 355-362
 relación inversa, 352
 tabla de parejas de transformadas, 363
 tabla de propiedades, 362
 uso en convolución, 357
 Transformada de Laplace:
 aplicaciones:
 análisis de circuitos RLC, 264
 control, 266
 solución de ecuaciones diferenciales, 263
 bilateral utilizando la unilateral, 230
 bilateral, 232
 inversa, 253-254
 propiedades:
 convolución, 246
 desplazamiento en el dominio s , 240
 desplazamiento en el tiempo, 239
 diferenciación en el dominio s , 245
 diferenciación en el dominio del tiempo, 241
 escalado en el tiempo, 240
 integración en el dominio del tiempo, 244
 linealidad, 238
 modulación, 246
 teorema del valor inicial, 250
 teorema del valor final, 251
 región de convergencia, 233
 unilateral, 235
 Transformada de Laplace bilateral, *véase* Transformada de Laplace
 Transformada de Laplace unilateral, *véase* Transformada de Laplace
 Transformada discreta de Fourier:
 convolución lineal mediante la DFT, 440
 definición, 435
 desplazamiento circular, 436
 interpretación matricial, 439
 periodicidad de la DFT y de la IDFT, 435
 propiedades, 436-440
 relleno con ceros, 440

transformada inversa (IDFT), 435
 Transformada inversa de Laplace, 253-254
 Transformada Z:
 definición, 388
 integral de inversión, 406
 inversión por desarrollo en serie de potencias, 406
 inversión por descomposición en fracciones simples, 408
 propiedad de convolución, 403
 propiedades de la transformada Z unilateral, 395
 región de convergencia, 390-392
 relación con la transformada de Laplace, 424
 solución de ecuaciones en diferencias, 399
 tabla de propiedades, 404
 tabla de transformadas, 405
 Transformada Z inversa, 406

Transformada Z unilateral, *véase* Transformada Z
 Transformadas rápidas de Fourier (FFT):
 algoritmo de diezmado en frecuencia, 447
 algoritmo de diezmado en el tiempo, 443
 diagrama de flujo de señal para diezmado en frecuencia, 449
 diagrama de flujo de señal para diezmado en el tiempo, 445
 en orden de inversión de bits, 446
 estimación espectral de señales analógicas, 450
 sustitución de variables intermedias, 445
 Tren de impulsos, 192, 200

V

Valor principal, 500

APÉNDICE A

Algunas equivalencias útiles

$$\sim\sim p \equiv p$$

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$\sim(\forall x) P(x) \equiv (\exists x) \sim P(x)$$

$$\sim(\exists x) P(x) \equiv (\forall x) \sim P(x)$$

$$(\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \equiv (\forall x) (P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x) \equiv (\exists x) (P(x) \vee Q(x))$$

Nota: el $\forall$ no se distribuye sobre un $\vee$, y $\exists$ no se distribuye sobre un $\wedge$, de modo que se necesita una nueva variable modelo, z , en las siguientes dos equivalencias.

$$\begin{aligned} (\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x) &\equiv (\forall x) (P(x) \vee (\forall z) Q(z)) \\ &\equiv (\forall x) (\forall z) (P(x) \vee Q(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x) &\equiv (\exists x) (P(x) \wedge (\exists z) Q(z)) \\ &\equiv (\exists x) (\exists z) (P(x) \wedge Q(z)) \end{aligned}$$

APÉNDICE B

Algunos cuantificadores elementales y sus significados

Fórmula	Significado
$(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x))$	Para toda x , todas las P son Q
$(\forall x) (P(x) \rightarrow \sim Q(x))$	Para toda x , las P no son Q
$(\exists x) (P(x) \wedge Q(x))$	Para algunas x , x son P y Q
$(\exists x) (P(x) \wedge \sim Q(x))$	Para algunas x , x no son P y Q
$(\forall x) (P(x))$	Para todas las x , x es P
$(\exists x) (P(x))$	Algunas x son P (o hay P)
$\sim(\forall x) (P(x))$	No todas las x son P (o algunas x son P)
$(\forall x) \sim(P(x))$	Todas las x no son P
$(\forall x) (\exists y) P(x,y)$	Para todas las x , hay una y tal que P
$(\exists x) \sim P(x)$	Algunas x no son P

APÉNDICE C

Algunas propiedades de conjunto

Comunicatividad	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Asociatividad	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Distributividad	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Ley del medio excluido	$A \cup A' = U$
Ley de contradicción	$A \cap A' = \emptyset$
Identidad	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Leyes de De Morgan	$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
Involución	$(A')' = A$
Equivalencia	$(A' \cup B) \cap (A \cup B') = (A' \cap B') \cup (A \cap B)$
Diferencia simétrica	$(A' \cap B) \cup (A \cap B') = (A' \cup B') \cap (A \cup B)$

APÉNDICE D

Información de soporte de CLIPS

En la página principal de CLIPS, en <http://www.jsc.nasa.gov/~clips/CLIPS.html> o como alternativa en <http://www.ghg.net/clips/CLIPS.html>, puede encontrarse información sobre solución de fallas, actualizaciones y otros temas relacionados. Las preguntas sobre CLIPS pueden enviarse mediante correo electrónico a clips@ghg.net. Los usuarios de Usenet pueden encontrar información y enviar preguntas sobre CLIPS al grupo de noticias comp.ai.shells.

También está disponible una sala de conferencia electrónica para usuarios de CLIPS. Los suscriptores a esta sala pueden enviar preguntas, observaciones, respuestas, editoriales, etc., en forma de correo electrónico a la conferencia. Todos los suscriptores tendrán una copia de estos mensajes en sus respectivas direcciones de correo electrónico. Para suscribirse, envíe un mensaje de una sola línea a listserv@cosmic.uga.edu que diga SUBSCRIBE CLIP-LIST (el guión es obligatorio) SU NOMBRE. El campo de asunto se ignora, pero la dirección encontrada en los campos "Responder:", "Responder a:" o "De:" se introducirá en la lista de distribución. Durante la suscripción recibirá un mensaje de correo que le indica cómo participar en la conferencia desde ese momento. Guarde este mensaje de correo porque puede necesitar las instrucciones más adelante, si desea eliminar su suscripción del servidor de lista.

APÉNDICE E

Resumen de comandos y funciones de CLIPS

Funciones de predicado

(and <expresión>+)

Devuelve TRUE si cada uno de sus argumentos se evalúa a TRUE, de lo contrario devuelve FALSE.

(eq <expresión> <expresión>+)

Devuelve TRUE si su primer argumento es igual en tipo y valor a todos sus argumentos subsecuentes, de lo contrario devuelve FALSE.

(evenp <expresión>)

Devuelve TRUE si <expresión> es un entero par, de lo contrario devuelve FALSE.

(floatp <expresión>)

Devuelve TRUE si <expresión> es un punto flotante, de lo contrario devuelve FALSE.

(integerp <expresión>)

Devuelve TRUE si <expresión> es un entero, de lo contrario devuelve FALSE.

(lexemep <expresión>)

Devuelve TRUE si <expresión> es una cadena o un símbolo, de lo contrario devuelve FALSE.

(multifieldp <expresión>)

Devuelve TRUE si <expresión> es un valor de campo múltiple, de lo contrario devuelve FALSE.

(neq <expresión> <expresión>+)

Devuelve TRUE si su primer argumento no es igual en tipo y valor a todos sus argumentos subsecuentes, de lo contrario devuelve FALSE.

(not <expresión>)

Devuelve TRUE si su argumento se evalúa a FALSE, de lo contrario devuelve TRUE.

- (numberp <expresión>)
Devuelve TRUE si <expresión> es un punto flotante o un entero, de lo contrario devuelve FALSE.
- (oddp <expresión>)
Devuelve TRUE si <expresión> es un entero impar, de lo contrario devuelve FALSE.
- (or <expresión>+)
Devuelve TRUE si cualquiera de sus argumentos se evalúa a TRUE, de lo contrario devuelve FALSE.
- (stringp <expresión>)
Devuelve TRUE si <expresión> es una cadena, de lo contrario devuelve FALSE.
- (symbolp <expresión>)
Devuelve TRUE si <expresión> es un símbolo, de lo contrario devuelve FALSE.
- (= <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)
Devuelve TRUE si su primer argumento es de un valor numérico igual al de todos sus argumentos subsecuentes, de lo contrario devuelve FALSE.
- (<> <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)
Devuelve TRUE si su primer argumento no es de un valor numérico igual al de todos sus argumentos subsecuentes, de lo contrario devuelve FALSE.
- (> <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)
Devuelve TRUE si, para todos sus argumentos, el argumento $n - 1$ es mayor que el argumento n , de lo contrario devuelve FALSE.
- (>= <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)
Devuelve TRUE si, para todos sus argumentos, el argumento $n - 1$ es mayor o igual que el argumento n , de lo contrario devuelve FALSE.
- (< <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)
Devuelve TRUE si, para todos sus argumentos, el argumento $n - 1$ es menor que el argumento n , de lo contrario devuelve FALSE.
- (<= <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)
Devuelve TRUE si, para todos sus argumentos, el argumento $n - 1$ es menor o igual que el argumento n , de lo contrario devuelve FALSE.

Funciones de campo múltiple

- (create\$ <expresión>*)
Añade cero o más expresiones juntas para crear un valor de campo múltiple.
- (delete\$ <expresión-campo-múltiple>
 <expresión-entero-inicial>
 <expresión-entero-final>)

Elimina todos los campos del rango especificado (<expresión-entero-inicial> y <expresión-entero-final>) de <expresión-campo-múltiple> y devuelve el resultado.

(explode\$ <expresión-cadena>))

Devuelve un valor de campo múltiple creado de los campos contenidos en una cadena.

(first\$ <expresión-campo-múltiple>)

Devuelve el primer campo de <expresión-campo-múltiple>.

(implode\$ <expresión-campo-múltiple>)

Devuelve una cadena que contiene los campos de un valor de campo múltiple.

(insert\$ <expresión-campo-múltiple>

<expresión-entero>

<expresión-campo-simple-o-múltiple>+)

Inserta todos los valores de <expresión-campo-simple-o-múltiple> en la <expresión-campo-múltiple> antes del *enésimo* valor (<expresión-entero>) de <expresión-campo-múltiple>.

(length\$ <expresión-campo-múltiple>)

Devuelve el número de campos de un valor de campo múltiple.

(member\$ <expresión-campo-simple>

<expresión-campo-múltiple>)

Devuelve la posición del primer argumento en el segundo argumento o FALSE si el primer argumento no está contenido en el segundo argumento.

(nth\$ <expresión-entero> <expresión-campo-múltiple>)

Devuelve el *enésimo* campo (<expresión-entero>) contenido en <expresión-campo-múltiple>.

(replace\$ <expresión-campo-múltiple>

<expresión-entero-inicial>

<expresión-entero-final>

<expresión-campo-simple-o-múltiple>+)

Reemplaza los campos del rango especificado (<expresión-entero-inicial> o <expresión-entero-final>) en <expresión-campo-múltiple> con todos los valores de <expresión-campo-simple-o-múltiple> y devuelve el resultado.

(rest\$ <expresión-campo-múltiple>)

Devuelve un valor de campo múltiple que contiene todos los campos menos el primero de <expresión-campo-múltiple>.

(subseq\$ <expresión-campo-múltiple>

<expresión-entero-inicial>

<expresión-entero-final>)

Extrae los campos del rango especificado (<expresión-entero-inicial> a <expresión-entero-final>) de <expresión-campo-múltiple> y los devuelve en un valor de campo múltiple.

(subsetp <expresión>)

Devuelve TRUE si el primer argumento es un subconjunto del segundo argumento, de lo contrario devuelve FALSE.

Funciones de cadena

(lowercase <expresión-cadena-o-símbolo>)

Devuelve su argumento con todas las letras mayúsculas reemplazadas con letras minúsculas.

(str-cat <expresión>*)

Devuelve todos sus argumentos concatenados como una cadena.

(str-compare <expresión-cadena-o-símbolo>
<expresión-cadena-o-símbolo>)

Devuelve cero si ambos argumentos son iguales, de lo contrario devuelve un valor diferente a cero.

(str-index <expresión-lexema> <expresión-lexema>)

Devuelve la posición del entero del primer argumento dentro del segundo argumento si el primero es una subcadena del segundo, de lo contrario devuelve FALSE.

(str-length <expresión-cadena-o-símbolo>)

Devuelve la longitud de una cadena en caracteres.

(sub-string <expresión-entero-inicial>
<expresión-entero-final>
<expresión-cadena>)

Devuelve la subcadena de <expresión-cadena> del rango especificado (<expresión-entero-inicial> a <expresión-entero-final>).

(sym-cat <expresión>*)

Devuelve todos sus argumentos concatenados como un símbolo.

(uppercase <expresión-cadena-o-símbolo>)

Devuelve su argumento con todas las letras minúsculas reemplazados con letras mayúsculas.

Funciones de E/S

(close [<nombre-lógico>])

Cierra el archivo asociado con el nombre lógico <nombre-lógico> (o todos los archivos si no están especificados). Devuelve TRUE si el archivo se cerró con éxito, de lo contrario devuelve FALSE.

(format <nombre-lógico> <expresión-cadena>
<expresión>*)

Evalúa e imprime como salida formateada al nombre lógico <nombre-lógico> cero o más expresiones formateadas por <expresión-cadena>. Consulte la sección 8.12 para conocer detalles sobre indicadores de formato.

(open <nombre-archivo> <nombre-lógico> [<modo>])

Abre el archivo <nombre-archivo> en el modo especificado ("r", "w", "r+" o "a") y asocia el nombre lógico <nombre-lógico> con el archivo. Devuelve TRUE si el archivo se abrió con éxito, de lo contrario devuelve FALSE.

(printout <nombre-lógico> <expresión>*)

Evalúa e imprime como salida sin formato al nombre lógico <nombre-lógico> cero o más expresiones.

(read [<nombre-lógico>])

Lee un campo simple del nombre lógico especificado (*stdin*, si no se especificó). Devuelve el campo si tiene éxito o EOF si no hay entrada disponible.

(readline [<nombre-lógico>])

Lee una línea completa del nombre lógico especificado (*stdin*, si no se especificó). Devuelve una cadena si tiene éxito o EOF si no hay entrada disponible.

(remove <nombre-archivo>)

Elimina el archivo <nombre-archivo>.

(rename <nombre-archivo-antiguo> <nombre-archivo-nuevo>)

Cambia el nombre del archivo <nombre-archivo-antiguo> por <nombre-archivo-nuevo>.

Funciones matemáticas básicas

(abs <expresión-numérica>)

Devuelve el valor absoluto de su único argumento.

(div <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)

Devuelve el valor del primer argumento dividido entre cada uno de los argumentos subsiguientes. La división se realiza utilizando cálculos aritméticos con enteros.

(float <expresión-numérica>)

Devuelve su único argumento convertido a punto flotante de tipo.

(integer <expresión-numérica>)

Devuelve su único argumento convertido a entero de tipo.

(max <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)

Devuelve el valor de su argumento más grande.

(min <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)
Devuelve el valor de su argumento más pequeño.

(+ <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)
Devuelve la suma de sus argumentos.

(- <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)
Devuelve el valor del primer argumento menos la suma de todos los argumentos subsecuentes.

(* <expresión-numérica> <expresión-numérica>+)
Devuelve el producto de sus argumentos.

(/ <expresión-numérica> <expresión-numérica> +)
Devuelve el valor del primer argumento dividido por cada uno de los argumentos subsecuentes.

Funciones trigonométricas

(acos <expresión-numérica>)
Devuelve el coseno del arco de su argumento (en radianes).

(acosh <expresión-numérica>)
Devuelve el coseno del arco hiperbólico de su argumento (en radianes).

(acot <expresión-numérica>)
Devuelve la tangente del arco de su argumento (en radianes).

(acoth <expresión-numérica>)
Devuelve la cotangente del arco hiperbólico de su argumento (en radianes).

(acsc <expresión-numérica>)
Devuelve la cosecante del arco de su argumento (en radianes).

(acsch <expresión-numérica>)
Devuelve la cosecante del arco hiperbólico de su argumento (en radianes).

(asec <expresión-numérica>)
Devuelve la secante del arco de su argumento (en radianes).

(asech <expresión-numérica>)
Devuelve la secante del arco hiperbólico de su argumento (en radianes).

(asin <expresión-numérica>)
Devuelve el seno del arco de su argumento (en radianes).

(asinh <expresión-numérica>)
Devuelve el seno del arco hiperbólico de su argumento (en radianes).

(atan <expresión-numérica>)
Devuelve la tangente del arco de su argumento (en radianes).

(*atanh* <expresión-numérica>)
Devuelve la tangente del arco hiperbólico de su argumento (en radianes).

(*cos* <expresión-numérica>)
Devuelve el coseno de su argumento (en radianes).

(*cosh* <expresión-numérica>)
Devuelve el coseno hiperbólico de su argumento (en radianes).

(*cot* <expresión-numérica>)
Devuelve la cotangente de su argumento (en radianes).

(*coth* <expresión-numérica>)
Devuelve la cotangente hiperbólica de su argumento (en radianes).

(*csc* <expresión-numérica>)
Devuelve la cosecante de su argumento (en radianes).

(*csch* <expresión-numérica>)
Devuelve la cosecante hiperbólica de su argumento (en radianes).

(*sec* <expresión-numérica>)
Devuelve la secante de su argumento (en radianes).

(*sech* <expresión-numérica>)
Devuelve la secante hiperbólica de su argumento (en radianes).

(*sin* <expresión-numérica>)
Devuelve el seno de su argumento (en radianes).

(*sinh* <expresión-numérica>)
Devuelve el seno hiperbólico de su argumento (en radianes).

(*tan* <expresión-numérica>)
Devuelve la tangente de su argumento (en radianes).

(*tanh* <expresión-numérica>)
Devuelve la tangente hiperbólica de su argumento (en radianes).

Funciones de conversión

(*deg-grad* <expresión-numérica>)
Devuelve el valor de su argumento convertido de unidades de grados a unidades de gradientes.

(*deg-rad* <expresión-numérica>)
Devuelve el valor de su argumento convertido de unidades de grados a unidades de radianes.

(exp <expresión-numérica>)

Devuelve el valor de e elevado a la potencia de su único argumento.

(grad-deg <expresión-numérica>)

Devuelve el valor de su argumento convertido de unidades de gradientes a unidades de grados.

(log <expresión-numérica>)

Devuelve el logaritmo base e de su argumento.

(log10 <expresión-numérica>)

Devuelve el logaritmo base 10 de su argumento.

(mod <expresión-numérica> <expresión-numérica>)

Devuelve el sobrante del resultado de la división de su primer argumento entre su segundo argumento.

(pi)

Devuelve el valor de π .

(rad-deg <expresión-numérica>)

Devuelve el valor de su argumento convertido de unidades de radianes a unidades de grados.

(round <expresión-numérica>)

Devuelve el valor de su argumento redondeado al entero más cercano.

(sqrt <expresión-numérica>)

Devuelve la raíz cuadrada de su argumento.

(** <expresión-numérica> <expresión-numérica>)

Devuelve el valor de su primer argumento elevado a la potencia de su segundo argumento.

Funciones de procedimiento

(bind <variable> <valor>)

Une una variable a un valor especificado.

(if <expresión-predicado>

then <expresión> + [else <expresión>+])

Evalúa la expresión contenida en la porción *else* de la función si la <expresión-predicado> se evalúa al símbolo FALSE, de lo contrario evalúa las expresiones contenidas en la porción *then* de la función.

(while <expresión-predicado> [do] <expresión>*)

Evalúa <expresión>* siempre y cuando la <expresión-predicado> no evalúe al símbolo FALSE.

Otras funciones

(gensym)

Devuelve un símbolo secuenciado de la forma genX donde X es un entero.

(gensym*)

Devuelve un símbolo secuenciado de la forma genX donde X es un entero. A diferencia de la función gensym, gensym* produce un símbolo único que no existe en la actualidad dentro del ambiente de CLIPS.

(random)

Devuelve un valor entero "aleatorio".

(seed <expresión-entero>)

Establece la semilla usada por el generador del número aleatorio para la función random.

(setgen <expresión-entero>)

Establece el índice de secuencia usado por gensym y gensym*.

(time)

Devuelve un valor de punto flotante que representa el número de segundos transcurridos desde un tiempo de referencia del sistema.

Comandos de ambiente

(apropos <lexema>)

Despliega todos los símbolos definidos actualmente en el ambiente de CLIPS que contiene la subcadena <lexema> especificada.

(batch <nombre-archivo>)

Permite el procesamiento "en lotes" de comandos interactivos de CLIPS al reemplazar entrada estándar con el contenido del archivo <nombre-archivo>. Devuelve TRUE si el archivo se ejecutó con éxito, de lo contrario devuelve FALSE.

(clear)

Elimina todas las construcciones del ambiente de CLIPS.

(exit)

Sale del ambiente de CLIPS.

(get-dynamic-constraint-checking)

Devuelve el valor actual de la acción de verificación dinámica de restricción.

(get-static-constraint-checking)

Devuelve el valor actual de la acción de verificación estática de restricción.


```
(load <nombre-archivo>)
```

Carga las construcciones almacenadas en el archivo especificado por <nombre-archivo> en el ambiente de CLIPS. Devuelve TRUE si el archivo se cargó con éxito, de lo contrario devuelve FALSE.

```
(reset)
```

Reinicia el ambiente de CLIPS.

```
(save <nombre-archivo>)
```

Guarda todas las construcciones del ambiente de CLIPS en el archivo especificado por `<nombre-archivo>`.

```
(set-dynamic-constraint-checking
  <expresión-booleana>)
```

Inhabilita la verificación dinámica de restricción si <expresión-booleana> es FALSE, de lo contrario habilita la verificación dinámica de restricción. Se devuelve el valor antiguo de la acción de verificación de restricción.

```
(set-static-constraint-checking
  <expresión-booleana>)
```

Inhabilita la verificación estática de restricción si <expresión-booleana> es FALSE, de lo contrario habilita la verificación estática de restricción. Se devuelve el valor antiguo de la acción de verificación de restricción.

```
(system <expresión-lexema>*)
```

Concatena sus argumentos como una cadena y pasa la cadena como un comando que habrá de ejecutarse por el sistema operativo.

Comandos de depuración

(dribble-off)

Devuelve el envío de salida al archivo de registro abierto con la función *dribble-on*. Devuelve TRUE si el archivo de registro se cerró con éxito, de lo contrario devuelve FALSE.

(dribble-on <nombre-archivo>)

Envía al archivo de registro <nombre-archivo> toda la salida que normalmente va a la pantalla. Devuelve TRUE si el archivo de registro se abrió con éxito, de lo contrario devuelve FALSE.

```
(unwatch <elemento-observación>)
```

Inhabilita el despliegue de mensajes informativos cuando suceden ciertas operaciones de CLIPS.

```
(watch <elemento-observación>)
```

```
<elemento-observación> ::= activations | all |
                           compilations | facts | focus |
                           rules | statistics
```

Habilita el despliegue de mensajes informativos cuando suceden ciertas operaciones de CLIPS.

Comandos de deftemplate

(list-deftemplates [<nombre-módulo>])
Enumera las deftemplates en el módulo especificado (o en el módulo actual si no se especifica <nombre-módulo>).

(ppdeftemplate <nombre-deftemplate>)
Despliega el texto de la deftemplate especificada.

(undeftemplate <nombre-deftemplate>)
Elimina la deftemplate especificada.

Funciones y comandos de hecho

(assert <patrón-lado-derecho>)
Agrega uno o más hechos a la lista de hechos. Se devuelve la dirección de hecho del último hecho agregado.

(assert-string <expresión-cadena>)
Convierte una cadena en un hecho y lo afirma. Devuelve la dirección de hecho del hecho recién afirmado.

(dependencies <índice-hecho-o-dirección-hecho>)
Enumera todas las igualaciones parciales de las que el hecho especificado recibe soporte.

(dependents <índice-hecho-o-dirección-hecho>)
Enumera todos los hechos que reciben soporte lógico del hecho especificado.

(duplicate <índice-hecho-o-dirección-hecho>
<ranura-lado-derecho>*)
Afirma una copia duplicada de un hecho de deftemplate con uno o más valores de ranura cambiados.

(hechos [<nombre-módulo>
[<expresión-entero-inicial>
[<expresión-entero-final>
[<expresión-entero-máxima>]]]])
Despliega los hechos en la lista de hechos. Si se especifica <nombre-módulo>, sólo se enumeran aquellos hechos visibles para el módulo especificado, de lo contrario se enumeran los hechos visibles para el módulo actual. Los hechos con índices de hecho menores que <expresión-entero-inicial> o mayores que <expresión-entero-final> no se enumeran. Si se especifica <expresión-entero-máxima>, entonces no se enumerarán más hechos además de ese valor.

(fact-index <expresión-dirección-hecho>)
Devuelve el índice de hecho asociado con una dirección de hecho.

- (get-fact-duplication)
Devuelve el valor actual de la acción de duplicación de hecho.
- (load-facts <nombre-archivo>)
Afirma los hechos contenidos en el archivo <nombre-archivo> del módulo actual. Devuelve TRUE si tiene éxito, de lo contrario devuelve FALSE.
- (modify <índice-hecho-o-dirección-hecho> <ranura-RHS>*)
Cambia uno o más valores de ranura de un hecho de deftemplate.
- (retract <índice-hecho-o-dirección-hecho>+)
Elimina uno o más hechos de la lista de hechos.
- (save-facts <nombre-archivo>
[visible | local <nombres-deftemplate>*])
Guarda los hechos especificados al archivo <nombre-archivo>. Devuelve TRUE si tiene éxito, de lo contrario devuelve FALSE.
- (set-fact-duplication <expresión-booleana>)
Permite afirmar hechos idénticos si <expresión-booleana> es FALSE, de lo contrario evita agregar hechos duplicados a la lista de hechos. Se devuelve el valor antiguo de la acción de duplicación.

Comandos de deffacts

- (list-deffacts [<nombre-módulo>])
Enumera los deffacts del módulo especificado (o del módulo actual si <nombre-módulo> no se especifica).
- (ppdeffacts <nombre-deffacts>)
Despliega el texto del deffacts especificado.
- (undeffacts <nombre-deffacts>)
Elimina el deffacts especificado.

Comandos de defrule

- (list-defrules [<nombre-módulo>])
Enumera las defrules del módulo especificado (o del módulo actual si <nombre-módulo> no se especifica).
- (matches <nombre-defrule>)
Despliega la lista de hechos e igualaciones parciales que igualan los patrones de la regla especificada.
- (ppdefrule <nombre-defrule>)
Despliega el texto de la defrule especificada.

- (refresh <nombre-defrule>)
Actualiza la defrule especificada. Las activaciones de la regla que ya se han disparado pero aún son válidas se colocan en la agenda.
- (remove-break [<nombre-defrule>])
Elimina un punto de división para la regla especificada. Si la regla no se especifica, se eliminan todos los puntos de división.
- (set-break <nombre-defrule>)
Establece un punto de división para la regla especificada. Esto provocará la detención de la ejecución de la regla antes de que se dispare.
- (show-breaks [<nombre-módulo>])
Enumera las reglas del módulo especificado que tienen puntos de división establecidos (o del módulo actual si <nombre-módulo> no se especifica).
- (undefrule <nombre-defrule>)
Elimina la defrule especificada.

Funciones y comandos de agenda

- (agenda [<nombre-módulo>])
Enumera las activaciones en la agenda del módulo especificado (o del módulo actual si <nombre-módulo> no se especifica).
- (clear-focus-stack)
Devuelve todos los nombres de módulo de la pila de concentración.
- (focus <nombre-módulo>+)
Pone uno o más módulos en la pila de concentración. Los módulos especificados se colocan en la pila de concentración en el orden inverso de la lista de argumentos.
- (get-focus)
Devuelve el nombre de módulo de la concentración actual.
- (get-focus-stack)
Devuelve todos los nombres de módulo de la pila de concentración como un valor de campo múltiple.
- (halt)
Detiene la ejecución de reglas.
- (list-focus-stack)
Enumera todos los nombres de módulo en la pila de concentración.
- (pop-focus-stack)
Devuelve el módulo nombre de la concentración actual y elimina la concentración actual de la pila de concentración.

`(run [<expresión-entero>])`

Inicia la ejecución de reglas de la concentración actual. Si <expresión-entero> se especifica, entonces sólo se ejecuta ese número de reglas, de lo contrario la ejecución se detiene cuando la agenda está vacía.

Comandos de defmodule

`(get-current-module)`

Devuelve el módulo actual.

`(list-defmodules)`

Enumera todos los defmodules del ambiente de CLIPS.

`(ppdefmodule <nombre-defmodule>)`

Despliega el texto del defmodule especificado.

`(set-current-module <nombre-defmodule>)`

Establece el módulo actual para el módulo especificado y devuelve el módulo actual previo.

APÉNDICE F

CLIPS BNF

Programa CLIPS

```
<CLIPS-program> ::= <construct>*

<construct> ::= <deftemplate-construct> |
               <deffacts-construct> |
               <defrule-construct> |
               <defmodule-construct>
```

Deftemplate Construct

```
<deftemplate-construct> ::= (deftemplate <name>
                             [<comment>]
                             <slot-definition> *)

<slot-definition> ::= <single-slot-definition> |
                     <multislot-definition>

<single-slot-definition> ::= (slot <slot-name>
                                <slot-attribute>*)

<slot-name> ::= <symbol>

<multislot-definition> ::= (multislot <slot-name>
                             <slot-attribute>*)

<slot-attribute> ::= <type-attribute> |
                    <allowed-constant-attribute> |
                    <range-attribute> |
                    <cardinality-attribute> |
                    <default-attribute>

<type-attribute> ::= (type <type-specification>)

<type-specification> ::= <allowed-type>+ | ?VARIABLE
```

```

<allowed-type>          ::= SYMBOL | STRING | LEXEME |
                           INTEGER | FLOAT | NUMBER

<allowed-constant-attribute>
                           ::= (allowed-symbols <symbol-list>) |
                              (allowed-strings <string-list>) |
                              (allowed-lexemes <lexeme-list>) |
                              (allowed-integers <integer-list>) |
                              (allowed-floats <float-list>) |
                              (allowed-numbers <number-list>) |
                              (allowed-values <value-list>)

<symbol-list>           ::= <symbol>+ | ?VARIABLE

<string-list>           ::= <string>+ | ?VARIABLE

<lexeme-list>           ::= <lexeme>+ | ?VARIABLE

<integer-list>          ::= <integer>+ | ?VARIABLE

<float-list>            ::= <float>+ | ?VARIABLE

<number-list>           ::= <number>+ | ?VARIABLE

<value-list>            ::= <constant>+ | ?VARIABLE

<range-attributes>      ::= (range <range-specification>
                           <range-specification>)

<range-specification>   ::= <number>+ | ?VARIABLE

<cardinality-attribute>
                           ::= (cardinality <cardinality-specification>
                              <cardinality-specification>)

<cardinality-specification> ::= (integer> | ?VARIABLE

<default-attribute>     ::= (default <default-item>) |
                           (default-dynamic <expression>*)

<default-item>          ::= ?DERIVE | ?NONE | <expression>*

```

Deffacts Construct

```

<deffacts-construct>    ::= (deffacts <name> [<comment>]
                           <RHS-pattern>*)

```

Defrule Construct

```

<defrule-construct> ::= (defrule <name> [<comment>]
                        [<declaration>]
                        <conditional-element>*
                        =>
                        <expression>*)

<declaration>      ::= (declare <rule-property>+)

<rule-property>    ::= (salience <integer-expression>)
                      (auto-focus <boolean-symbol>) |

<boolean-symbol>   ::= TRUE | FALSE

<conditional-element> ::= <pattern-CE> |
                        <assigned-pattern-CE> |
                        <test-CE> |
                        <not-CE> |
                        <and-CE> |
                        <or-CE> |
                        <logical-CE> |
                        <exists-CE> |
                        <forall-CE>

<pattern-CE>       ::= <ordered-pattern-CE> |
                        <template-pattern-CE>

<assigned-pattern-CE>
    ::= <single-field-variable> <- <pattern-CE>

<test-CE>          ::= (test <function-call>)

<not-CE>           ::= (not <conditional-element>)

<and-CE>           ::= (and <conditional-element>+)

<or-CE>            ::= (or <conditional-element>+)

<logical-CE>       ::= (logical <conditional-element>+)

<exists-CE>        ::= (exists <conditional-element>+)

<forall-CE>        ::= (forall <conditional-element>
                        <conditional-element>+)

<ordered-patterns-CE> ::= (<symbol> <constraint>+)

```



```

<template-pattern-CE>
    ::= (<deftemplate-name <LHS-slot>*)

<LHS-slot>
    ::= <single-field-LHS-slot>
       <multifield-LHS-slot>

<single-field-LHS-slot> ::= (<slot-name> <constraint>)
<multifield-LHS-slot>  ::= (<slot-name> <constraint>*)
<constraint>           ::= ? | $? | <connected-constraint>

<connected-constraint>
    ::= <single-constraint> |
       <single-constraint> & <connected-constraint> |
       <single-constraint> | <connected-constraint>

<single-constraint>    ::= <term> | ~<term>

<term>
    ::= <constant> |
       <variable> |
       :<function-call> |
       =<function-call>

```

Fact Specification

```

<RHS-pattern>
    ::= <ordered-RHS-pattern> |
       <template-RHS-pattern>

<ordered-RHS-pattern> ::= (<symbol> <RHS-field>+)

<template-RHS-pattern>
    ::= (<deftemplate-name> <RHS-slot>*)

<RHS-slot>
    ::= <single-field-RHS-slot> |
       <multifield-RHS-slot>

<single-field-RHS-slot> ::= (<slot-name> <RHS-field>)
<multifield-RHS-slot>  ::= (<slot-name> <RHS-field>*)

<RHS-field>
    ::= <variable> |
       <constant> |
       <function-call>

<deftemplate-name>    ::= <symbol>

```

Variables and Expressions

```

<single-field-variable> ::= ?<variable-symbol>

```

```

<multifield-variable> ::= $?<variable-symbol>

<variable> ::= <single-field-variable> |
               <multifield-variable>

<function-call> ::= (<function-name> <expression>*) |
                   <special-function-call>

<special-function-call>
    ::= (assert <RHS-pattern>+) |
       (modify <expression> <RHS-slot>+) |
       (duplicate <expression> <RHS-slot>+) |
       (bind <single-field-variable> <expression>)

<expression> ::= <constant> |
                 <variable> |
                 <function-call>

```

Data types

```

<symbol> ::= A valid symbol as specified in Section 7.4

<string> ::= A valid string as defined in Section 7.4

<float> ::= A valid float as defined in Section 7.4

<integer>
    ::= A valid integer as specified in Section 7.4

<number> ::= <float> | <integer>

<lexeme> ::= <symbol> | <string>

<constant> ::= <number> | <lexeme>

<comment> ::= <string>

<variable-symbol> ::= A <symbol> beginning with an
                    alphabetic character

<function-name> ::= <symbol>

<name> ::= <symbol>

```


Índice

Índice

= 61
" 87
~ 81, 331, 382
>> 80
" 331
"hágalo dos veces" 319
\$ 358
\$? 331, 377
% 358, 396
& 331, 383
(331
() 36
) 331
* 329, 358, 358, 570
** 572
+ 330, 334, 358, 569
+j 358, 486
- 570
/ 385, 570
< 328, 329, 331, 566
<- 367
<= 566
<= 342, 348
<> 61, 566
= 411, 566
==> 342, 348
=> 62, 346
=j 486
> 328, 386, 566
>, 329
>= 566
? 331
?DERIVE 442
?NONE 443
?VARIABLE 437
[328
\ 332
] 328
{ 328
{ } 35

| 35, 86, 330, 331, 383

} 328

' 81

II-función 263

∫ 35

^a, operador 249

- 385

∅ 86

(E 79

"a" 393

"r" 393

"r+" 393

"w" 393

+ 126

a posteriori 57

a posteriori, probabilidad 174

a priori 57

a priori, probabilidad 170

abajo 71

abducción 151

abierto, enunciado 83

abrir 393, 569

abs 569

absoluta, probabilidad 178

acción, marco de 77

acciones 27, 334

acíclico 98

acos 570

acosh 570

acot 570

acoth 570

acsc 570

acsch 570

activación 480

activación, función de 45

activado 12, 26, 346

acto 27, 182

actual, enfoque 464

Ada 328, 333

adecuado 86

- aditiva, Ley 177
- afirmación 125, 209
- afirmativo en calidad 111
- agenda 23, 346, 347, 463, 577
- AKO 64
- aleatoria, variable 293
- aleatorio, error 167
- alfa, memoria 482
- algorítmica, programación 33
- algoritmo 33
- alternativa, negación 86
- alto 265
- ambiente 243
- ambigüedad 166
- ámbito 124
- amplitud, primera, búsqueda 69
- análisis, árbol de 62
- analogía 8, 149
- ancho de banda 263
- and 565
- and, elemento condicional 355, 415
- and, restricción 383
- and, restricción conectiva 385
- ángulo, corchetes de 61
- ANS 43
- antecedente 25, 110
- APL 36
- aplicación, operaciones de 36
- apropiado, subconjunto 79, 267
- apropos 573
- aproximado, razonamiento 282
- árbol 97
- arcos 63
- ARE 65
- argumento(s) 109, 385, 387
- aritméticos, operadores 385
- ART 328, 477
- artificiales, sistemas neuronales 43
- ART-IM 328
- asec 570
- asech 570
- asignación 272
- asignación de nombre, procedimientos de 36
- asin 570
- asinh 570
- asociación 35
- asociativa, memoria 46
- asociativas, redes 64
- assert 337, 437, 575
- assert-string 575
- atan 570
- atanh 571
- atenuación, factor de 240
- atómico 63
- átomos 36
- atributos 65
- atributo-valor, pares 66, 527
- autoaprendizaje 99
- autociclo 98
- autoepistémico, razonamiento 155
- auto-focus, atributo 469
- automatizado, conocimiento, adquisición 100
- automatizado, razonamiento, sistemas 78
- AV 66
- Axiomas 83, 125
- barra 35, 61
- básica, asignación 246
- básica, probabilidad, asignación de 246
- Bayes, Teorema de 181
- bayesiana, toma de decisiones 183
- Bel 250
- beta, memoria 483
- bicondicional 84
- bien formadas, fórmulas 125
- binaria, variable 272
- bivalente, lógica 257
- bloques, mundo de 371, 381
- boca abajo 34,
- boca abajo, razonamiento 145
- bold, intersección 269
- bold, unión 268
- bordes 63, 97
- bpa 246
- búsqueda, espacio de 513
- C 328, 333
- cadena 61, 143, 330, 332, 437
- cadena de razonamiento 110
- cálculo de restricciones indistintas 288
- calidad 316
- calificación, reglas de 296
- campo, restricción de 382, 384
- campos 330
- canónica, forma 293
- cantidad 112
- característica, función 256
- cardinalidad 251
- cardinalidad, atributo de 441
- cargar 357, 574
- cartesiano, producto 271
- caso 39
- caso, dirección de 330, 333
- caso, nombre de 330, 333
- categorico, silogismo 110

- causal, cadena 134
- causal, conocimiento 7
- causal, conocimiento, marcos de 77
- causales, asociaciones 153
- CAUSE 66
- centro de gravedad 291
- cerrada, palabra, suposición de 152
- cerrado, enunciado 83
- cerrar 394, 568
- certidumbre, factores de 210, 233, 236, 510
- ciclo(s) 27, 98
- cierto, evento 173
- cilíndricas, extensiones 275
- circuito 98
- clase 39, 64
- clásica, probabilidad 170
- cláusulas, forma de 129
- clear-focus-stack 466, 577
- CLIPS 327, 477
- CLIPS, lenguaje orientado a objetos 328
- CLOS 328
- codificar y solucionar, modelo 319
- código y verificación, etapa de 324
- codominio 35
- Cognate 328
- cognición 11
- cognoscitiva, ciencia 10
- cognoscitivo, procesador 12
- comando 334
- combinada, masa 249
- combinatoria, explosión 44
- Comentario(s) 345, 358
- Common Lisp Object System 328
- comodines 376
- compatibilidad de reglas 229
- compatibilidad, función de 257
- compensaciones 277
- complemento 80
- completa, evidencia 196
- completar 128
- composición 273
- composición, operador de 273
- composición, reglas de 295
- composicional, regla 299
- comprobable 127
- compuesta, evidencia 201
- compuesto, enunciado 84
- compuesto, evento 171
- computacional, lingüística 276
- concentración 269
- concepto, esquema 73
- conclusión 78
- condicional 84
- condicional y conjuntiva, composición 295
- condicional, composición 295
- condicional, elemento 25
- condicional, parte 25
- condicional, probabilidad 178
- conectado, gráfico 98
- conectiva, restricción 382
- conexionismo 43
- confianza, calificación de 296
- confianza, mantenimiento de 154, 424
- confianza, valor de 285
- confianza, valor de, del antecedente 286
- configuración 16
- conflictos, resolución de 27
- conjunción 84
- conjuntiva, composición 295
- conjuntiva, forma normal 129
- conjunto 35
- conjunto de soporte 143
- conjunto, complemento de 266
- conjunto, contención de 266
- conjunto, equivalencia de 266
- conjunto, intersección de 267
- conjunto, producto de 268
- conjunto, unión de 267
- conocimiento, abstracción de 21
- conocimiento, adquisición, cuello de botella en 8
- conocimiento, adquisición, tarea de 322
- conocimiento, adquisición, utilería de 23
- conocimiento, análisis, tarea de 322
- conocimiento, base de 327
- conocimiento, dominio de 3
- conocimiento, estructura del 73
- conocimiento, etapa de definición del 321
- conocimiento, etapa de diseño del 323
- conocimiento, etapa de verificación del 324
- conocimiento, fuente 313
- conocimiento, ingeniería del 6
- conocimiento, programación basada en 14
- conocimiento, sistema experto basado en 2, 6
- conocimiento, tarea de extracción de 322
- consecuencias 193
- consecuente 27, 110
- consenso 249
- consistente 127
- construcciones 335
- consulta 70
- consultables, nodos 209
- contador, propagación de 45
- contexto, sensible al 155
- contextos 213

- contingente 84
- contingente, enunciados de 92
- continuo 265
- contradicción 84
- contradicción de reglas 229
- contrapositivo 119
- control, estrategia de 30, 231
- control, cadena de 396
- control, estructura de 19
- control, hecho 406, 448, 469, 525
- control, patrón 406
- convexas, funciones 300
- convexo, conjunto bayesiano 300
- COOL 328
- cópula 111
- cortar 68
- cortes a 264
- corto plazo, memoria a 12
- cos 571
- cosh 571
- cot 571
- coth 571
- create\$ 566
- creencia, función de 250
- creencia, medida de 251
- crfl 353
- crisp, conjuntos 257
- cruce, punto de 260
- csc 571
- csch 571
- cuantificación, reglas de 296
- cuantificador 86, 112
- cuantificador, libre de 129
- cuerpo 499

- datos, abstracción de 21
- datos, fusión de 233
- datos, objetos de 36
- Dbt 253
- decidible 127
- decisión, árboles de 98
- decisión, procedimiento 112
- decisión, rejillas de 98
- declarativo, conocimiento 58
- declarativo, paradigma 38
- deductiva, lógica 109
- deffacts 342
- definitivo, conocimiento 72
- defmodule 456
- defrule 345
- deftemplate 335
 - explícita 336
 - implícita 336
- degeneración, árbol de 98
- deg-grad 571
- deg-rad 571
- delete\$ 566
- delimitador 331
- Dempster, regla de combinación de 249, 254
- Dempster-Shafer, teoría de 243
- dependencias 425, 427, 575
- dependiente(s) 425, 427, 575
- depresión, prueba de 289
- derecha, justificar a la 397
- derecha, memoria 482
- derecho, lado 25
- derivación, árbol de 62
- derrotable 155
- descendente 34
- descendente, razonamiento 145
- desdifusión, problema de 292
- desesperado 183
- detallado, diseño, etapa de 323
- detener 498, 499, 577
- determinista 105, 171
- devolución, restricción de campo del valor de 411
- devolución, valor de 334, 386
- diagrama 98
- dilación 270
- dinámico, conocimiento, estructura de 216
- directa, suma 249
- directo, razonamiento 115
- discriminación, función de 256
- disparar 26, 47
- disparos 346
- disposición 112, 298
- distribución, problema de 37, 312
- disyunción 84
- disyuntiva, composición 295
- disyuntiva, forma 129
- div 569
- doble, flecha 62
- dominio 1, 35
- dominio, variable de 87
- dos entradas, nodo de 483
- dos valores, lógica de 257
- dribble-off 430, 574
- dribble-on 430, 574
- duda 253
- duplicate 341, 575

- Eclipse 328
- efectiva, probabilidad, razón de 205
- elástica, restricción 287

elementos 78
emular 2
enfoque 464, 577
enfoque, pila de 465
enrejado 98
entero 330, 437, 569
entrada, resolución de 143
enunciado 83
enunciados, cálculo de 83
enunciados, orientado a 33
envenenado 185
EOF 395, 397
epistémica, probabilidad 236
epistemología 57
eq 565
equivalencia, axioma de 128
errático 167
error 166
errores de medición 167
espacio(s) 214, 332, 365
especificidad 230
esperada, utilidad 185
espiral, modelo de 319
esquemas 73
esquematas 73
estado, espacio de 101
estado(s) 101, 193
estándar, cuadro 150
estándar, dispositivo de entrada 394, 397
estándar, dispositivo de salida 353
estándar, forma 111
estática, estructura de conocimiento 216
estática, verificación de restricción 439
estereotipos 73
estocástico, proceso 187
estocásticos, eventos independientes 176
estructura 98
estructural, semejanza 480
evenp 565
evento, árbol de 171
evento(s) 170, 171, 182
evidencia 144, 192
evidencia, medida de 246
evidencial, conflicto 255
evidencial, intervalo 250, 252
evidencial, razonamiento 243
exactitud 167
exacto, razonamiento 165
exclusivo, OR 45
existencial, cuantificador 88
existencial, importación 82
exists, elemento condicional 419

exp 572
experiencia 2, 3
experimental, probabilidad 173
experimental, conocimiento 20, 133
experto 2
experto, errores de conocimiento del 313
expertos, sistemas 1
explicación, utilidad de 6, 23
explícita, prioridad 229
explícito, elemento condicional and 413
explícito, elemento condicional or 413
explode\$ 398, 567
exportar 460
expresión 385, 388, 391
extensión, principio de 280
externa, dirección 330, 333
externas, funciones 407
extralógicas, características 129

fact 327, 334
 deftemplate 336
 ordenado 336, 341
facts 338, 575
falacia 118
falacia de la inversión 118
falso negativo 167
falso positivo 167
faltantes, reglas 233
fallos, detección, aislamiento y recuperación de 448
fallos, tolerancia a 46
fijo, matriz de estado 190
finito, estado, máquina de 102
first\$ 567
FL 295
flecha 346
floatp 565
focal, elemento 247
forall, elemento condicional 422
formal, lógica 81
formal, prueba, tarea de 324
formato 396, 568
formato, marcas de 396
fraccionada, red semántica 214
fragmento 12
fuerte, escritura 323
función 334
funcional, programación 34
funcionales, formas 36
funciones 35

ganancias 185

- garantía 10
- General Problem Solver 11
- generalizada, ley multiplicativa 179
- generalizada, regla delta 48
- generalizado, *modus ponens* 300
- generar y probar 150
- genérico 65
- gensym* 522, 573
- get-current-module 457, 578
- get-dynamic-constraint-checking 440, 573
- get-fact-duplication 576
- get-focus 466, 577
- get-focus-stack 466, 577
- get-static-constraint-checking 439, 573
- global, base de datos 23
- grad-deg 572
- grado de confirmación 236
- grado de creencia 191
- grado de membresía 258
- gráfico 98
- gramática 61
- granularidad 13

- hacia atrás, inducción 185
- hacia atrás, razonamiento 26, 328, 526
- hacia delante, razonamiento 26, 328
- hecho, dirección de 367, 512
- hecho, identificador de 338, 339, 512
- hecho, índice de 338
- hecho, lista de 327, 337
- hecho-índice 575
- herencia 39, 66
- herramienta 22
- heurística 72
- heurístico, conocimiento 7
- hijo 97
- hipótesis 9, 167, 192
- hipotético, razonamiento 6
- hojas 97

- if 498, 572
- if-added 76
- if-needed 75
- if-removal 76
- ignorancia 246, 253
- Igr 253
- igualaciones 27, 419, 459, 489, 576
- imágenes 35
- imperativo 33
- implicaciones 85
- implícita, prioridad 229
- implícito, elemento condicional and 413
- implode\$ 567
- importar 460
- imposible, creencia 212
- imposible, evento 173
- impresión 353, 394, 395, 569
- incertidumbre 165, 509
- incompleto 166
- incondicional, probabilidad 178
- incondicional, soporte 427
- inconsciente, conocimiento 58
- inconsistente 127
- incorrección 166
- increíble 247
- incremental, modelo de cascada 319
- incrementalmente 10
- independiente 181
- independientes, eventos 176
- indiferente 192
- indirecto, razonamiento 119
- indistinta, gramática 279
- indistinta, lógica 204, 256
- indistinta, probabilidad 295
- indistinta, producción 279
- indistinta, proposición 258
- indistinta, relación 272
- indistinta, restricción 287
- indistinto, calificador 258, 295
- indistinto, predicado 293
- indistinto, razonamiento 282
- indistinto, sistema experto 280
- indistintos, cuantificadores 258
- individuo 65
- inducción 168
- inducción, basado en 43
- inducir 49
- inductivo, aprendizaje 49
- inexacto, razonamiento 166, 227
- inferencia, errores de cadena de 315
- inferencia, errores del motor de 314
- inferencia, motor de 3, 13, 23, 327
- inferencia, red de 208, 213
- inferencia, redes 42
- inferencias 4
- inferior, límite 250
- infija, forma 385
- infinito, valor, lógica de 281
- inicio, símbolo de 61
- initial-fact 343, 346, 351, 461
- insert\$ 567
- instanciado 26
- integridad 128
- intensificación 270

intergerp 270
interiores, probabilidades 179
interpretación 127
interrupt, comando 369
intersección 79
intervalo 257
intrusas, brechas 213
inválida, inducción 168
inválido 127
inversa, probabilidad 181
inversa, propagación 45, 48
inverso 119, 182
invertir 119
ir-removal 76
IS 66
ISA 64
izquierda, justificar a la 397
izquierda, memoria 483
izquierdo, lado 25

jerarquía 97
Johnson, centro de espacio de 328
justo 171

Kyburg 300
L1 281
largo plazo, memoria a 12
length\$ 567
lenguaje 22
LEX 231
LEXEME 437
lexemp 565
lexicográfico 231
ley de contraposición 119
ley de separación, 115
leyes de inferencia 119
LHS 25, 346
libre 124
literales 129
limitada, diferencia 269
limitada, suma 268
limitado, producto 169
limitar 124, 365
límites de errores de ignorancia 315
límites de ignorancia 7
limpiar 344, 352, 573
lineal, modelo 320
lingüísticas, variables 276
LISP 328, 333
listas 36
list-deffacts 350, 458, 576
list-defmodules 578

list-defrules 350, 457, 576
list-deftemplates 350, 458, 575
list-focus-stack 465, 577
LN 281
load-facts 503, 519, 524
local 503
log 572
log10 572
lógica 78
lógica L 281
lógica, equivalencia 85
lógica, programación 78
logical, elemento condicional 424
lógicas, combinaciones 211
lógicas, variables, 83
lógico L 281
lógico, AND 80
lógico, nombre 353, 393
 nulo 396
lógico, NOT 81
lógico, soporte 425
lote 428, 573
lowcase 568
Lukasiewics, operadores lógicos de 281
llaves 35

mágico, cuadro 149
MAIN, module 456
mal estructurados, problemas 18
marco de discernimiento 245
marco, problema de 154
marco(s) 42, 74
marginales, probabilidades 179
Markov, algoritmo de 30
Markov, proceso de cadena de 190
más general, cláusula 142
más general, unificador 142
masa 246
material, equivalencia 85
material, implicación 84
matriz 139, 213
max 569
máximo, método 289
máximo, producto 274
max-min 273
max-min, producto matriz de 273
max-min, regla composicional de inferencia 286
mayúsculas y minúsculas, sensible a 331
MEA 231
medición de aumento de creencia 236
medición de aumento de incredulidad 236
medio, término 111

- medio, tiempo, entre fallos 316
medios, términos, análisis de 231
meet, operador 267
member\$ 567
membresía, función de 257
menor, premisa 111
menor, término 111
menores, incrementos 319
meta(s) 38, 60, 68
metaconocimiento 60
metalenguaje 60
metametodología 318
metaregla 10, 154
metasímbolo 126
métrica 316
mgu 142
microincremento 319
min 569
min, función 204
mínimo, límite superior 299
misión 315
misión crítica 313
mitad del ancho 262
mix 289
mod 412, 572
modelo 127, 135, 207
modificación, reglas de 295
modificar 340, 576
modificar y duplicar 341
módulo 351
módulo, separador de 456
modus ponens 115
modus tollens 119
momentos, método de 289
monitoreo 538
monotonicidad 153
monotónicos, sistemas 153
muestra, espacio de 171
muestra, punto de 171
multifield, comodín 376
multifield, ranuras 336
multifield, valor 333
multifield, variables 493
multifieldp 565
multiplicativa, ley 179
multislot 335
mundo 154
mutual, independencia 176
mutualmente exclusivos, eventos 173
MYCIN 509
nada 36, 131
NAND 86
NASA 328
negación 84
negativa, calidad 111
neq 565
neurona 26
no comprobable 127
no confiable 142
no creíble 247
no determinista 171
no monotónico, sistema 153
no terminal 61
nodos 63, 97
nones 192
nones, forma de probabilidad de 194
NOR 86
normal 129
normalización 254, 271
normalizado 265
not 565
not, elemento condicional 417
not, restricción 382
novedad de hechos 231
nth\$ 567
nula, cadena 30
nula, hipótesis 167
nulo 131
nulo, conjunto 80
numberp 566
numérico, campo 330
número 330, 437
OAV 66
objetivo, teoría de probabilidad 173
objeto, diseño orientado al 38
objeto, orientado al 38
objeto, programación orientada al 38, 327
objeto-atributo-valor, triple 66, 509
objetos 6
ocultas, capas 48
oddp 566
operandos 385
OPS5 328, 477
OPS83 477
or 566
or, restricción 383
or, restricción de campo 385
oración 61
oraciones, cálculo de 83
órdenes 128, 150
orientado, árbol 97
ortogonal, suma 249

- padre 97
- padre, cláusulas 130
- pairwise independiente 176
- paradigma 14
- parcial, evidencia 196
- parcial, igualación 479
- particular 112
- Pascal 328, 335
- pasos 190
- patrón 25, 345
- patrón, CE 345
- patrón, coincidencia de 480
- patrón, igualación de 71
- patrón, nodos de 481
- patrón, parte 25
- patrón, red de 480
- patrón, unión de 367
- perceptrón 47
- permitido, atributo de cadenas 440
- permitido, atributo de enteros 440
- permitido, atributo de lexemas 440
- permitido, atributo de números 440
- permitido, atributo de puntos flotantes 440
- permitido, atributo de símbolos 440
- permitido, atributo de valores 440
- personal, probabilidad 193
- personal, teoría de construcción 323
- peso(s) 44, 98
- pi 572
- pila 380
- plan 151
- planeación 513
- planear-generar-probar 151
- plasticidad 47
- plausibilidad 250
- plausible, creencia 212
- plausible, inferencia 155
- plausibles, relaciones 211
- PLs 250
- poblaciones 172
- podado 185
- poder de un conjunto 268
- poder, conjunto de 93
- ponderadas, combinaciones 211
- pop-focus 466
- pop-focus-stack 577
- porfirítico 213
- portabilidad 328
- posibilidad 293
- posibilidad, calificación de 296
- posibilidad, distribución de 293
- posibilidad, ecuación de asignación de 293
- posible, creencia 212
- Poss 293
- posterior, probabilidad 174
- postulados 125
- ppdeffacts 350, 459, 576
- ppdefmodule 578
- ppdefrule 345, 350, 459, 576
- ppdeftemplate 350, 459, 575
- precedencia de operaciones aritméticas 388
- precisión 167
- predefinidas, funciones 407
- predeterminado 75
- predeterminado, atributo 442
- predeterminado, dinámico, atributo 444
- predeterminado, razonamiento 154
- predicado 111
- predicado, base de datos de 69
- predicado, expresión de 67
- predicado, función de 407, 498
- predicado, función o variable de 499
- predicado, funciones 87
- predicado, lógica de 86
- predicado, restricción de campo de 410
- predicados 36
- prefijo, forma de 385
- premisas 78
- prenex, forma 139
- primario, término 278
- primer momento de inercia 291
- primer orden 86, 128
- primitivas, funciones 36
- primitivos, tipos de datos 330
- principal, premisa 111
- principal, término 111
- principales, conectivos 117
- principales, incrementos 319
- principio de indiferencia 246
- probabilidad 169, 192
- probabilidad de suficiencia 194
- probabilidad, calificación de 296
- probabilidad, distribución de 293
- probabilidad, razón de 193
- probabilidad, vector de 187
- probabilística, suma 268
- probable, creencia 213
- probado 127
- problema, dominio de 3
- problema, espacio de 102
- procedimiento, archivos adjuntos de 75
- procedimientos, conocimiento de 58
- procedimientos, programa de 33

- procedimientos, programación de 327
proceso, modelo de 318
producción, memoria de 24
producción, reglas de 11, 13
producción, sistemas de 13, 328
profundidad, primera, búsqueda de 69
profundo 73
profundo, conocimiento 7
profundo, razonamiento 154
programación 513
PROLOG 527
prominencia 346, 445, 454
prominencia, jerarquía de 451
pronóstico 9
propiedad 65
proposición 83
proposicional, cálculo 83
proposicional, función 124
proposicional, red 63
prototipo 76
proyección 274
prueba, revisión de preparación de 324
prueba, tareas de análisis de 324
punto flotante 330, 437, 569
puntos de interrupción 355
- rad-deg 572
raíz, nodo 97
ramas 97
random 573
rango 35
rango de creencia 250
rango, atributo de 441
ranura(s) 74, 334, 335
rápido, prototipo 10
read 392, 395, 397, 569
readline 397, 569
real, tiempo 187
reconocer-actuar, ciclo 27
reducción al absurdo 130
redundantes, reglas 232
reescritura, reglas de 29
Referencia manual viii
referencia, transparente en 35
refracción 347
refresh 348, 498, 577
refutación 132
refutación completa 132
refutado 128
regla de sustitución 121
regla, inducción de 7
regla, modelo de 157
- reglas 5
reglas de inferencia 119
reglas, programación basada en 327
regresar 41
regular, matriz de transición 190
relación 271
relación, nombre de 334
relacional, unión 274
rellenados 74
remove 569
remove-break 356, 459, 577
rename 569
repertorio, cuadrículas de 323
replace\$ 567
reproducible, incertidumbre 227
reset 343, 574
resolución 128
resolución, árbol de refutación de 133
resolución, refutación de 132
resolvente 130
rest\$ 567
restricción, relación de 299
Rete, algoritmo 32
Rete, algoritmo de igualación de patrones 477
retracción 340
retract 340, 367, 576
return 467
RHS 27, 346
round 572
run 346, 467, 578
run, comando 500
ruta 98
- S, función 261
sabiduría 60
salir 333, 334, 573
save 358, 574
save-facts 503, 519
script 74
sec 571
secuencial 33
secundario, efecto 386
sech 571
seed 573
segundo orden 128
seleccionar-ejecutar, ciclo 27
semántica 60
semántica, red 63
semántica, regla 278
semánticos, errores 314
semidecidible 127
sensorimotor 73

- sentido común, conocimiento de 109, 299
- sentido común, razonamiento 155, 281
- señales 330
- set-break 355, 459, 577
- set-current-module 457, 578
- set-dynamic-constraint-checking 440, 574
- set-fact-duplication 511, 576
- setgen 573
- set-static-constraint-checking 439, 574
- shell 14, 23
- show-breaks 356, 458, 577
- singleton, conjunto 244
- sigmoidea, función 45
- significado 278
- silogismo 78
- simbólica, lógica 82
- simbólicas, expresiones 36
- símbolo 330, 331, 437
- simple, evento 171
- simple, evidencia 201
- sin 571
- sin procedimientos 33
- sinapsis 47
- single-field, comodín 370
- single-field, ranuras 335
- singleton 86
- sinh 571
- sintáctica, regla 278
- sintaxis 60
- sintaxis, errores de 314
- síntesis 513
- sísmica, encuesta 183
- sistema, etapa de evaluación del 325
- sistemático, error 167
- situación-acción, ciclo 27
- situacional, marco 77
- situación-respuesta, ciclo 27
- Skolem, funciones de 138
- SmallTalk 328
- software, metodología de ingeniería de 309
- sonido 128
- soporte 250, 263, 264
- sospecha 253
- Spt 250
- sqrt 572
- str-cat 568
- str-compare 568
- str-index 568
- stringp 566
- str-length 568
- subclase 39, 65
- subconjunto 79, 267
- subjetiva, probabilidad 174
- submetas 40, 68
- subseq\$ 567
- substep 568
- sub-string 568
- subsunción de reglas 230
- sujeto 111
- sup 299
- superclase(s) 39, 65
- superficial 73
- superficial, conocimiento 7
- superficial, razonamiento 134
- superior, límite 250
- superior, nivel 28, 333, 334
- superior, nivel, hipótesis de 209
- superior, nivel, indicador de, 386
- superior, parte 71
- suposición del antecedente 115
- suposiciones, mantenimiento de confianza basada en 154
- supp 264
- supremo 299
- sustitución, casos de 140
- symbolp 566
- sym-cat 568
- system 428, 574
- tácito, conocimiento 58
- tan 571
- tanh 571
- tareas 320
- tautología 84
- taxonomía 32, 513
- temporal, razonamiento 186
- temporal, redundancia 478
- temporales, eventos 186
- teorema 125, 126
- terminal 61
- terminales, nodos 481
- término, conjunto de 277
- test, elemento condicional 408, 493
- textura 213
- tiempo, restricciones de 8
- tiempo, rótulo de 27, 231
- time 444, 573
- tipo 1, subconjunto indeterminado 265
- tipo 2, subconjunto indeterminado 266
- tipo I, error 167
- tipo II, error 167
- tipo N, subconjunto indeterminado 266
- tipo, atributo 437
- total, ancho 263

- trabajo, memoria de 23
- trabajo, plan de 321
- traducción, reglas de, 295
- transiciones 101
- trazo 86
- tres valores, lógica de 281
- triplet 66
- trivalente 281

- umbral, valor de 45, 239
- una entrada, nodos de
- undefacts 351, 459, 576
- undefrule 351, 459, 577
- undeftemplate 351, 459, 575
- unidad, preferencia de 143
- unificable 142
- unificación 41, 140
- unificación, algoritmo de 142
- unificador 142
- unión 80, 483
- unión signo de 383
- unión, operador de 267
- unión, operador de negación de 86
- unión, red de 483
- unir 365, 391
- unitario, sistema numérico 127
- universal, conjunto 79
- universal, cuantificador 87
- UN-TIPO-DE 64
- unwatch 342, 574
- upcase 568

- usuario, funciones definidas por el 333, 407
- usuario, Guía del ix
- usuario, interfaz de 23

- V&V 157
- vacía, lista 36
- vacio, conjunto 80
- validación 157
- válido 82, 127
- valor 65
- variable(s) 365, 376, 391
- Venn, diagrama de 78
- verificación 157
- verificación de detención 27
- vértices 97
- vida, ciclo de 317
- vínculos 63, 97
- visible 503
- vuelo, técnicas, paneles de 313

- watch 341, 466, 574
 - activaciones 341, 348
 - todos 341
 - compilaciones 341, 357, 485
 - hechos 341
 - enfoque 341
 - reglas 341, 349
 - estadísticas 341, 349
- wffs 125
- while 498, 499 572

- XOR 45